جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لشئون الكتب

القسم العلمى

تطبيقات الرياضيات

كتاب الطالب

الصف الثانى الثانوى

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ نبيل توفيق الضبع
أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

مراجعة

أ/ فتحى أحمد شحاتة
أ/ سمير محمد سعداوى

٢٠١٩- ٢٠٢٠ م

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يشهد عالم اليوم تطورًا علميًّا مستمرًا ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقًا من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمى في التفكير؛ لتصبح العقول هى أدوات التفكير العلمى وليست مخازن للحقائق العلمية.

ونحن نقدم هذا الكتاب « تطبيقات الرياضيات» للصف الثانى الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمى، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .

وفى ضوء ما سبق روعى فى الكتاب « تطبيقات الرياضيات » مايلى:

- ★ تقسيم الكتاب إلى ثلاثة أجزاء الميكانيكا - الهندسة والقياس - الاحتمال، وكل جزء مقسم إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخططٌ تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضَّح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التى تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.
- ★ كما قُدِّم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهى كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى الدرس.
- ★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة، يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة، وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى هذه الوحدة.
- ★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى، يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.
- ★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة، تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

أولا: الميكانيكا

المحتويات

ثانيًا: الهندسة والقياس

الوحدة الثالثة

الهندسة والقياس

ثالثًا: الاحتمال

الوحدة الرابعة

الاحتمال

الميكانيكا

مقدمة عن تطور علم الميكانيكا

الميكانيكا بالمفهوم العام هو العلم الذى يقوم بدراسة حركة أو اتزان الأجسام المادية، وذلك باستخدام القوانين الخاصة بها، فمثلًا هناك قوانين تَسري على دوران الأرض حول الشمس وإطلاق الصواريخ أو قذيفة المدفع أو غير ذلك. ويقصد بها التغير الذى يَحدث بمرور الزمن لمواضع الأجسام المادية فى الفراغ، والتأثير الميكانيكى المتبادل بين الأجسام هو التأثير الذى تتغير له حركة هذه الأجسام، طبقًا لتأثيرات القوى المختلفة عليها ، لذلك فإن المسألة الأساسية فى الميكانيكا هى دراسة القوانين العامة لحركة واتزان الأجسام المادية تحت تأثير القوى عليها.

ويمكن تقسيم الميكانيكا إلى قسمين هما:

الإستاتيكا[١] *Statics*

(علم توازن الأجسام) يبحث فى سكون الأجسام تحت تأثير مجموعة من المؤثرات تُسمى القوى ، وتوصف القوى التى لا تُغير من حالة الجسم بأنها متزنة، ويقال للجسم: إنه فى حالة توازن تحت تأثير هذه القوى.

وقد بدأت الدراسة العامة لاتزان الأجسام (الإستاتيكا) فى العصور القديمة نتيجة لمتطلبات الإنتاج البسيطة فى هذا الوقت (كالرافعة والبوابة والمستوى المائل وغيرها) وكان لمؤلفات أرشميدس دور مهم فى هذا الوقت لترسيخ علم الإستاتيكا.

الديناميكا[٢] *Dynamics*

(علم حركة الأجسام) والتى تتضمن قوانين حركة الأجسام المادية تحت تأثير القوى ، وتنقسم الديناميكا إلى: الكيناماتيكا *Kinematics* وهى تبحث فى خصائص الحركة من الوجهة الهندسية (وصف الحركة وصفًا مجردًا دون التعرض للقوى المسببة لها)، والكيناتيكا *Kinetics* وهى تبحث فى تأثير القوى المسببة أو المغيرة للحركة، وقد تلت الديناميكا فى دراستها الإستاتيكا بأمد طويل؛ نتيجة النهضة فى مجالات النقل والتجارة والصناعة والإنتاج وصناعة الأسلحة والاكتشافات الفلكية.

وهناك:

ميكانيكا النقطة المادية (أى الجسم الذى يمكن إهمال أبعاده عند بحث حركته أو اتزانه).

ميكانيكا الجسم الجاسئ *Rigid Body* (أى الجسم المكون من عدد كبير جدًا من الجسيمات المترابطة مع بعضها البعض؛ بحيث إن المسافة بين أي جسيمين منها تكون ثابتة ولا تتأثر بأي مؤثر خارجي).

---

١ سوف ندرس فى هذه الوحدة مفهوم القوة وخواصها ووحدات قياسها وتحليل القوة إلى مركبتين، وإيجاد محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة ، ثم دراسة اتزان نقطة مادية تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة، وتطبيقات عليها.

٢ سوف ندرس فى هذه الوحدة (الكيناماتيكا) وهى التى تختص بوصف حركة الأجسام دون التعرض للقوى المسببة لها، وتتناول هذه الدراسة حركة الأجسام، والظواهر المصاحبة لهذه الحركة، ومسببات الحركة وقوانينها، وتطبيقات على الحركة الأفقية والرأسية بعجلة منتظمة، وقانون الجذب العام لنيوتن.

ميكانيكا الأجسام ذات الكتل المتغيرة (توجد لبعض الأنظمة والأجسام تَغيرات تَطرأ عليها تتغيَّر فيها الكتلة بتغير الزمن كأن يَنفصل عنها أو يتحد بها جُسيمات تَنقص أو تَزيد من كتلتها فى أثناء الحركة، ومن هذه الأجسام الصواريخ النفاثة وعربات المناجم التى تَتغير كتلتها نتيجة استهلاك الوقودِ وغيرها من الأنظمة المختلفة).

ميكانيكا الأجسام القابلة للتشكيل (المرونة Elasticity) هى خاصية الأجسام التى لها القدرة على الرجوع إلى شكلها و أبعادها الأصلية بعد تشكيلها، أما اللدونة Plasticity وهي عند تَعرُّض الأجسام إلى مؤثرات خارجيةتتغير أشكالها ولا تعود إلى حالتها الطبيعية عند زوال المؤثِّر الخارجي.

تطور علم الميكانيكا:

الميكانيكا الكلاسيكية *Classical machanics*

تعد أقدم فروع الميكانيكا حيث تهتم بدراسة القوى التى تؤثر على الأجسام ، كما تهتم بتفسير حركة الكواكب وتساعد كذلك فى العديد من التقنيات الحديثة (الهندسة الإنشائية والهندسة المدنية والملاحظة الفضائية ...).

ميكانيكا الكم *Quantum mechanics*

هي مجموعة من النظريات الفيزيائية التي ظهرت فى القرن العشرين، وذلك لتفسير الظواهر على مستوى الذرة والجسيمات، وقد دمجت بين الخاصية الجسيمية والخاصية الموجية ليظهر مصطلح ازدواجية (الموجة – الجسيم) ، وبهذا تُصبح ميكانيكا الكم مسئولة عن التفسير الفيزيائي على المستوى الذري، لذلك ميكانيكا الكم هي تعميم للفيزياء الكلاسيكية لإمكانية تطبيقها على المستويين الذري والعادي، وسبب تسميتها بميكانيكا الكم يعود إلى أهميّة الكم فى بنائها (وهو مصطلح فيزيائي يستخدم لوصف أصغر كمّية من الطاقة يُمكن تَبادلها بين الجسيمات، ويُستخدم للإشارة إلى كميات الطاقة المحددة التي تَنبعث بشكلٍ متقطعٍ، وليس بشكلٍ مُستمر).

ميكانيكا الموائع *Fluid* Mechanics

هى أحد فروع ميكانيكا الكم وهي تدرس أساسًا الموائع (السوائل والغازات)، ويدرس هذا التخصص السلوك الفيزيائى لهذه المواد، وتنقسم إلى إستاتيكا الموائع ودراستها فى حالة عدم الحركة وديناميكا الموائع ودراستها فى حالة الحركة

الميكانيكا الحيوية *:Biomechanics*

علم الميكانيكا الحيوية (البيوميكانيك) هو علم دراسة القوانين العامة فى حركة أى كائن حى والتحليل الميكانيكي لحركة الأجسام الحية من جميع النواحى (التشريحية - الفسيولوجية - البدنية - الميكانيكية ...)، والذى يتعامل مع القوة على الأجسام الحية سواء كانت فى حالة السكون أو الحركة، ومن أمثلة ذلك : حركة الأمعاء، وتدفق الدم فى الشرايين، وانتقال البويضة فى قناة فالوب، وانتقال السوائل فى الحالب من الكلية إلى المثانة، وعملية هضم الطعام وحركته، ومن خلال التحليل الميكانيكي يمكن التوصل إلى حالات جديدة وملائمة لتطوير مستوى الأداء.

النظرية النسبية العامة *General relativity theory*

النظرية النسبية لأينشتاين غيّرت الكثير من المفاهيم فيما يتعلق بالمصطلحات الأساسية فى الفيزياء: المكان، الزمان الكتلة والطاقة؛ حيث أحدثت نقلة نوعية فى الفيزياء النظرية وفيزياء الفضاء فى القرن العشرين.

قامت نظرية النسبية بتحويل مفهوم الحركة، حيث نَصَّت بأنَّ كل الحركة نسبية. ومفهوم الوقت تَغير من كونه ثابتًا ومحددًا، إلى كونه بُعدًا آخر غير مكاني. وجعلت الزمان والمكان شيئًا موحدًا بعد أن كان يتم التعامل معهما كشيئين مختلفين. وجعلت مفهوم الوقت يتوقَّف على سرعة الأجسام، وأصبح تقلص البعد وتَمدُّد الزمن مفهومًا أساسيًّا لفهم الكون.وبذلك تَغيرت كل الفيزياء الكلاسيكية النيوتونية.

نشاط

١ - استخدم الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) فى البحث عن دور علماء الرياضيات فى تطور علم الميكانيكا وإليك بعض نتائج البحث:

كان للعالم الإنجليزى إسحق نيوتن Isaac Newton الفضل فى تمهيد الطريق لعلم الميكانيكا الكلاسكية عن طريق قوانين الحركة التى فسرت الكثير من الظواهر الطبيعية والفلكية، كما كان للعالم الألماني يوهانز كيبلر johannes Kepler وجاليليوجاليلي الإيطالي Galileo Galilei دور عظيم فى وضع قوانين تصف حركة الكواكب؛ حيث بينت قوانين كيبلر أن هناك قوة تجاذب بينها، وبينت أيضًا حركة الكواكب حول الشمس وفق المنظور الجديد الذي يعتمد على مركزية الشمس بشكل أصبحت فيه الحسابات تطابق الأرصاد الفلكية إلى درجة كبيرة، وقد ظلت هذه القوانين سائدة منذ القرن السابع عشر حتى ظهور النظرية النسبية التى صاغها أينشاتين Einstein خلال السنوات ١٩٠٥ - ١٩١٦ وميكانيكا الكم التى اشترك فى صياغتها ماكس بلانك Max plank وهينزبرج Heyznberg وشرودنجر Schrodinger وديراك Dirac فى بداية القرن العشرين.

كما ابتكر الدكتور أحمد زويل Dr. Ahmed Zewail نظام تصوير سريعًا للغاية، يعمل باستخدام الليزر، له القدرة على رصد حركة الجزيئات عند نشوئها وعند التحام بعضها ببعض، وقد سجل أحمد زويل فى قائمة الشرف بالولايات المتحدة الأمريكية والتى تضم إلبرت أينشتاين وألكسندر جراهام بيل.

ولمزيد من المعلومات ابحث فى الموسوعة الحرة (ويكيبيديا) على الموقع: ***http: //ar.wikipedia.org***

وحدات القياس: *Measuring Units*

عندما يتقدم أحد الطلاب إلى الكليات العسكرية فإنه يقوم بإجراء بعض الفحوصات الطبية مثل قياس الطول، والوزن ، وضغط الدم، ومعدل ضربات القلب، ... فعملية القياس هى مقارنة مقدار بمقدار آخر من نفس النوع، وذلك لمعرفة عدد مرات احتواء المقدار الأول إلى المقدار الثانى، والنظام المستخدم فى معظم أنحاء العالم هو النظام الدولى للوحدات. International system of units (SI)

و يتضمن هذا النظام الدولى للوحدات (SI) سبع وحدات أساسية، وقد حُددت وحدات هذه الكميات الأساسية باستخدام القياس المباشر معتمدة على وحدات معيارية لكل من الطول والزمن والكتلة المحفوظة بدائرة الأوزان والمقاييس بفرنسا، أما الوحدات الأخرى فيمكن اشتقاقها من الوحدات الأساسية، وسنختص فى دراستنا بالكميات الآتية:

أولًا: الكميات الأساسية ووحدات قياسها فى نظام (SI) *Fundamental quantities*

الكمية الأساسية		الوحدة الأساسية		الرمز	
الطول	length	متر	meter	م	(m)
الكتلة	mass	كيلو جرام	kilogram	كجم	(kg)
الزمن	time	ثانية	second	ث	(s)

ومن مميزات استخدام وحدات النظام الدولي هو سهولة التحويل بين الوحدات

أضف إلى معلوماتك

١- الفيمتو ثانية *Femtosecond*

الفيمتو ثانية: هو جزء من مليون مليار جزء من الثانية، أي (عشرة مرفوعة للقوة (-١٥)) من الثانية والنسبة بين الثانية والفيمتو ثانية هي النسبة بين الثانية و٣٢ مليون سنة.

فى عام١٩٩٠م تَمكَّن العالم المصرى أحمد زويل من تثبيت اختراعه المعروف بكيمياء الفيمتو، وذلك بعد جهد مضنٍ مع فريق بحثه القابع فى معهد كاليفورنيا للتقنية امتد منذ عام ١٩٧٩، ويتَلخَّص اختراعه فى اختراع وحدة زمنيةٍ تخطَّت حاجز الزمن العادي إلى وحدة زمن الفيمتو ثانية، وتوصَّل هذا العالم إلى اكتشافه العلمي باستخدام نبضات ليزر قصيرة المدى وشعاع جزيئي داخل أمبوب مفرغ، وكاميرا رقمية ذات مواصفات فريدة، وذلك لتصوير حركة الجزيئات منذ ولادتها وقبل التحاقها بباقي الجزيئات الأخرى، وأصبح بالإمكان التدخل السريع ومباغتة التفاعلات الكيميائية عند حدوثها باستخدام نبضات الليزر كتليسكوب للمشاهدة، ومتابعة عمليات الهدم والبناء فى الخلية، وقد جعل هذا العالم العربي العملاق الباب مفتوحًا لاستخدام هذا الاكتشاف العلمي فى مجال الطب، والفيزياء، وأبحاث الفضاء وغيرها الكثير، وسُجِّلت باسمه مدرسة علمية جديدة عُرِفَت باسم كيمياء الفيمتو.

٢- مضاعفات الوحدات

الوحدة		الرمز	القياس
تيرا	tera	T	١٠^١٢
جيجا	giga	G	١٠^٩
ميجا	mega	M	١٠^٦
كيلو	kilo	K	١٠^٣

كسور الوحدات

الوحدة		الرمز	القياس
ديسي	deci	d	١٠^-١
سنتي	centi	c	١٠^-٢
مللي	milli	m	١٠^-٣
ميكرو	micro	u	١٠^-٦
نانو	nano	n	١٠^-٩
بيكو	pico	p	١٠^-١٢
فمتو	femto	f	١٠^-١٥

وعلى ذلك يمكن تحويل كلٍّ من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

(١) ٢,٧٥ كم إلى م.

(٢) ٦٣٥ مم إلى ديسم.

(٣) ٧٥٠ كيلو هرتز إلى ميجا هرتز.

(٤) ١٩٧٠ جم إلى كجم.

على النحو التالى:

(١) ٢,٧٥ كم = ٢,٧٥ × ١٠٠٠ = ٢٧٥٠ م

(٢) ٦٣٥ مم = ٦٣٥ × ١٠^-٢ = ٦,٣٥ ديسم

(٣) ٧٥٠ كيلو هرتز = ٧٥٠ × ١٠^-٣ = ٠,٧٥ ميجا هرتز

(٤) ١٩٧٠ جم = ١٩٧٠ × ١٠^-٣ = ١,٩٧ كيلو جرام.

تذكر أن

كم = ١٠٠٠م

م = ١٠ ديسم

ديسم = ١٠ سم

سم = ١٠ مم

ثانيًا: الكميات المشتقة *Derived quantities*

١ وحدة قياس السرعة

تعرف السرعة بأنها معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن.

وحدة قياس السرعة = وحدة قياس المسافة ÷ وحدة قياس الزمن

فإن السرعة تقاس بوحدة: متر / ثانية (م/ث).

هل تعلم

الثانية العيارية: هى الفترة الزمنية التى تستغرقها ذرة السيزيوم لتتذبذب بمقدار دورة كاملة.

٢ العجلة

تعرف العجلة بأنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن ويكون:

وحدة قياس العجلة : مترًا / ثانية مربعة (م/ث^٢).

لاحظ أن

وحدات قياس الكميات المتجهة (السرعة، العجلة، القوة) تعامل من حيث مقاديرها فقط بصرف النظر عن الاتجاه.

وعلى ذلك يمكن تحويل كلٍّ من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

(١) ١ كم/س إلى م/ث.

(٢) ١ كم/س إلى سم/ث.

(٣) ١ كم/س/ث إلى م/ث^٢

(٤) كم/س/ث إلى سم/ث^٢

على النحو التالى:

(١) ١ كم/س $= \frac{١ \times ١٠٠٠ م}{٦٠ \times ٦٠ ث} = \frac{٥}{١٨}$ م/ث

تذكر أن

اليوم الشمسى المتوسط = ٢٤ ساعة.

الساعة = ٦٠ دقيقة.

الدقيقة = ٦٠ ثانية.

٢ ١ كم/س $= \dfrac{\text{١} \times \text{١٠٠٠} \times \text{١٠٠}\ \text{سم}}{\text{٦٠} \times \text{٦٠}\ \text{ث}} = \dfrac{\text{٢٥٠}}{\text{٩}}$ سم/ث

٣ كم/س/ث $= \dfrac{\text{١٠٠٠}\ \text{م}}{\text{٦٠} \times \text{٦٠}\ \text{ث} \times \text{ث}} = \dfrac{\text{٥}}{\text{١٨}}$ م/ث$^{\text{٢}}$

٤ كم/س/ث $= \dfrac{\text{١٠٠٠} \times \text{١٠٠}\ \text{سم}}{\text{٦٠} \times \text{٦٠}\ \text{ث} \times \text{ث}} = \dfrac{\text{٢٥٠}}{\text{٩}}$ سم/ث$^{\text{٢}}$

تدريب

١ حول كلًّا من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

أ ٧٢ كم/س إلى م/ث   ب ١٠٠٠سم/ث إلى كم/س   جـ ٣٦ كم/س/ث إلى سم/ث$^{\text{٢}}$

٣ القوة *Force*

تعرف القوة بأنها حاصل ضرب الكتلة (ك) فى عجلة الحركة (جـ)

فإذا رمزنا للقوة بالرمز (ق) فإن ق = ك × جـ

وحدات قياس مقدار القوة

الوحدات المطلقة: مثل الداين والنيوتن حيث ١ نيوتن = ١٠$^{\text{٥}}$ داين ويعرف النيوتن والداين على النحو التالي:

النيوتن: هو مقدار القوة التى إذا أثرت على كتلة تساوى ١ كيلو جرام أكسبتها عجلة مقدارها ١متر/ث$^{\text{٢}}$

الداين: هو مقدار القوة التى إذا أثرت على كتلة تساوى ١ جرام أكسبتها عجلة مقدارها ١ سم/ث$^{\text{٢}}$

الوحدات التثاقلية:

مثل: ثقل الجرام (ث جم) ، ثقل الكيلو جرام (ث كجم) حيث ١ ث كجم = ١٠$^{\text{٣}}$ ث.جم

ويعرف ثقل الكيلو جرام وثقل الجرام على النحو التالى:

ثقل الكيلو جرام: هو مقدار القوة التى إذا أثرت على كتلة تساوى ١ كيلو جرام أكسبتها عجلة مقدار ٩,٨ متر/ث$^{\text{٢}}$

ثقل الجرام: هو مقدار القوة التى إذا أثرت على كتلة تساوى ١ جرام أكسبتها عجلة مقدارها ٩٨٠ سم/ث$^{\text{٢}}$

وتربط الوحدات التثاقلية بالوحدات المطلقة بالعلاقة: ١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن، ١ ث جم = ٩٨٠ داين

أضف إلى معلوماتك

جميع الأجسام (بغض النظر عن كتلتها) تسقط على سطح الأرض بتسارع (عجلة) منتظم يقع بين ٩,٧٨، ٩,٨٢ م/ث$^{\text{٢}}$ اعتمادًا على دائرة العرض ولكننا سنعتبرها ٩,٨ م/ث$^{\text{٢}}$ لسهولة الاستخدام ما لم تُحدد قيم أخرى لها.

وعلى ذلك يمكن تحويل كلٍّ من الوحدات الآتية إلى الوحدات المناظرة لها:

(١) ٣,١٤ نيوتن إلى داين

(٢) ٦,٧٥ × ١٠^٧ داين إلى نيوتن

على النحو التالى:

(١) ٣,١٤ نيوتن = ٣,١٤ × ١٠^٥ = ٣١٤٠٠٠ داين

(٢) ٦,٧٥ × ١٠^٧ داين = ٦,٧٥ × ١٠^٧ ÷ ١٠^٥ = ٦٧٥ نيوتن

تدريب

(٢) حول كلًّا من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

(أ) $\frac{١}{٧}$ ث جم إلى داين

(ب) ٥,٣٦ × ١٢٥٠ داين إلى نيوتن

(جـ) ٢,٥٠ نيوتن إلى داين

يمكن وضع الكميات المشتقة فى جدول على النحو التالي:

الكمية المشتقة	علاقتها بالكميات الأخرى	وحدة القياس
السرعة (ع)(V)	المسافة ÷ الزمن	م/ث m/s
العجلة (جـ)(a)	السرعة ÷ الزمن	م/ث^٢ m/s^2
القوة (ق)(F)	الكتلة × العجلة	نيوتن N

تحقق من فهمك

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ تقاس الكتلة بوحدة:

أ الداين   ب النيوتن   ج الكيلو جرام   د ثقل الكيلو جرام

٢ من الكميات الأساسية فى النظام الدولى:

أ الكتلة   ب السرعة   ج العجلة   د القوة

٣ الملليمتر وحدة تعادل:

أ 10^{-3} متر   ب 10^{-3} متر مكعب   ج 10^{-2} سنتيمتر   د 10^{-4} ديسميتر

أجب عن الأسئلة الآتية:

٤ ماذا يطلق على القيم التالية:

أ 10^{-2} متر   ب 10^{-3} متر   ج ١٠٠٠ متر

٥ حول كلًّا ممايأتى إلى متر:

أ ٦٣,٤ سنتيمتر   ب ٥١٢,٦ ملليمتر   ج ٠,٥٣٤ ديسيمتير

٦ تفكير ناقد: احسب بوحدة الكيلوجرام كتلة الماء اللازمة لملء وعاء على شكل متوازى مستطيلات طوله ١,٦م وعرضه ٠,٦٥٠ م وارتفاعه ٣٦ سنتيمتر، علمًا بأن كثافة الماء تساوى ١جم/سم^{3} مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

[إرشاد: الكتلة = الحجم × الكثافة]

الوحدة الأولى

الاستاتيكا
Statics

مقدمة الوحدة

يختص علم الإستاتيكا بحل جميع المشاكل الهندسية المتعلقة بدراسة توازن الأجسام المادية، وعمليات تحليل وتحصيل القوى المؤثرة عليها، والتأثير المتبادل الناشئ عنها ، وتطبيقاته المختلفة فى بناء المنازل والمبانى والجسور وتصميم الآلات والمحركات. وقد كان لنيوتن أبحاث ومؤلفات فى هذا المجال منها كتاب المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية الذى يتكون من ثلاثة أجزاء، ويعتبر أساس علم الميكانيكا الكلاسيكى. ومن أقوال نيوتن المشهورة عن نفسه «لست أعلم كيف أبدو للعالم، ولكننى أبدو لنفسى، وكأننى صبى يلعب على شاطئ البحر، ألهو بين الحين والحين بالعثور على حصاة ملساء أو صدفة أجمل من العادة، بينما ينبسط محيط الحقيقة العظيم مغلق الأسرار أمامى».

مخرجات التعلم

فى نهاية الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم القوة ، والقوة كمتجه ، ووحدات قياس مقدار القوة فى ضوء وحدات القياس السابقة.
- يوجد محصلة قوتين مقدارًا واتجاهًا (القوتان تؤثران فى نفس النقطة).
- يتعرف تحليل قوة معلومة إلى مركبتين فى اتجاهين معلومين.
- يتعرف تحليل قوة معلومة إلى مركبتين متعامدتين.
- يوجد محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة.
- يبحث اتزان جسيم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة فى الحالات الآتية:
  - إذا اتزنت قوتان مستويتان متلاقيتان فى نقطة.
  - إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة.
  - إذا اتزنت عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة.
- يوجد محصلة قوتين هندسيًّا وجبريًّا مستخدمًا تكنولوجيا المعلومات فى صورة أنشطة.
- يتعرف تطبيقات ما درسه فى الإستاتيكا فى مواقف فيزيائية وحياتية.

المصطلحات الأساسية

استاتيكا	Statics
قوة	Force
جسم جاسئ	Rigid body
قوة التثاقل	Gravitation force
عجلة السقوط الحر	acceleration of gravity
نيوتن	Newton
داين	Dyne
ثقل كيلو جرام	Kilogram weight
ثقل جرام	Gram weight
خط عمل قوة	Line of action of the force
تحليل قوة	Resolving force
مركبة قوة	force Component
اتزان جسم	equilibrium of a body
قاعدة مثلث القوى	triangle of forces
قاعدة لامى	lami's rule
اتزان جسم جاسئ	Equilibrium of rigid body
مستوى أملس	smooth plane
مستوى مائل أملس	inclined smooth plane
مركز ثقل	centre of gravity

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): القوى.

الدرس (١ - ٢): تحليل قوة إلى مركبتين.

الدرس (١ - ٣): محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

الدرس (١ - ٤): اتزان جسم جاسئ تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب Graphical computer programs

مخطط تنظيمى للوحدة

القـوى
Forces

سوف تتعلم

- بعض المفاهيم الأساسية فى الإستاتيكا.
- خواص القوة
- محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة.
- إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قوة Force
- محصلة Resultant
- جسم جاسئ Rigid body
- قوة التثاقل Gravitation force
- عجلة السقوط الحر Acceleration of gravity
- نيوتن Newton
- داين Dyne
- ثقل كيلو جرام Kilogram weight
- ثقل جرام Gram weight

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية Graphical programs

تمهيد:

عَلمت أنَّ الإستاتيكا هى فرع الميكانيكا الذى يدرس **القوى وشروط اتزان الأجسام المادية التى تؤثِّر عليها القوى**، وستكون دراستنا فى هذه الوحدة على اتزان الأجسام الجاسئة [(١)] فقط.

ومن دراستك فى المتجهات علمت الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة.

تذكر أن

الكمية القياسية Scalor تتحدد تحديدًا تامًّا بقيمتها العددية مثل المسافة، الكتلة، الزمن، المساحة، الحجم...

الكمية المتجهة Vector وتتحدد باتجاهها بالإضافة إلى قيمتها العددية مثل القوة والإزاحة والسرعة، والوزن...إلخ.

القوة: *Force*

تتوقف حالة اتزان أو حركة الجسم على طبيعة التأثير الميكانيكى المتبادل بينه وبين الأجسام الأخرى، أى على حالات الضغط أو الشد أو التجاذب أو التنافر التى تحدث للجسم نتيجةً لهذا التأثير.

تعريف

➤ تعرف القوة بأنها تأثير أحد الاجسام على جسم آخر.

أضف إلى معلوماتك

تنقسم الأجسام الطبيعية إلى:

- أجسام جاسئة لا يتغير شكلها مهما كانت القوى المؤثرة عليها.
- أجسام قابلة للتشكيل فيتغير شكلها تحت تأثير القوى مثل السوائل والغازات والمطاط والصلصال...إلخ

خواص القوة:

يتحدد تأثير القوة على الجسم بالعوامل الآتية:

أولاً: مقدار القوة.

يَتعين مقدار القوة بمقارنتها بوحدة القوى وقد سبق لك دراسة الوحدة الأساسية لقياس القوة فى الميكانيكا وهى **النيوتن (N)** أو ثقل الكيلوجرام **(kg.wt)** حيث:

➤ ١ ث كجم = ١٠٠٠ ث جم ، ١ نيوتن = 10^5 داين

➤ ١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن ، ١ ث جم = ٩٨٠ داين

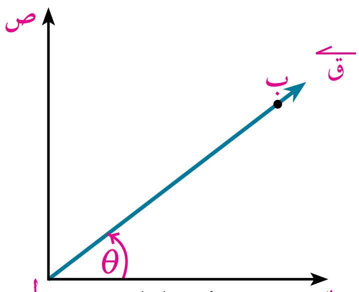
(مالم يذكر خلاف ذلك) [(٢)]

١- الجسم الجاسئ هو الجسم الذى يحتفظ بشكله دون تشوه إذا وقع تحت تأثير عوامل خارجية.

٢- قوة التثاقل (أو الوزن) هى مقدار جذب الأرض للجسم، حيث إن الأرض تجذب الأجسام الساقطة نحوها، وتختلف قيمة عجلة السقوط الحر للأجسام من مكان لآخر على سطح الأرض والقيمة التقريبية لها تساوى ٩,٨ م/ ث^2 ما لم يذكر خلاف ذلك، وسيعرض هذا الموضوع بالتفصيل فى مواضع أخرى فى الميكانيكا.

ثانيا: اتجاه القوة

يُمثل شكل (١) المجاور متجه القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ ويُمكِن تَمثيله بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ نقطة البداية، ب نقطة النهاية للقطعة المستقيمة الموجهة، ويُعبر عن مقدار القوة بمعيار المتجه $||\overrightarrow{\text{أ ب}}||$ (طوله) (بمقياس رسم مناسب) و يناظر اتجاه السهم اتجاه القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، وتسمى زاوية θ بالزاوية القطبية للمتجه فى مستوى القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ وتُكتب على الصورة القطبية كالآتى (ق ، θ).



شكل (١)

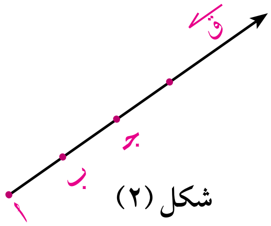
أضف إلى معلوماتك

الزاوية القطبية polar angle هى الزاوية الموجبة التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ثالثًا: نقطة تأثير القوة وخط عملها

فى شكل (١): تَنطبق نقطة أ عادة على نقطة تاثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، ويُمكِنُ نَقْل نقطة تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ إلى أى نقطة أخرى، بحيث تقع على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ دون أن يغير ذلك من تأثيرها على الجسم كما فى **شكل (٢)** خط عمل القوة يسمى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ فى **شكل (١)** بخط عمل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$

أىْ أنَّ خط عمل القوة هو الخط المستقيم المار بنقطة تأثيرها والموازى لاتجاهها.

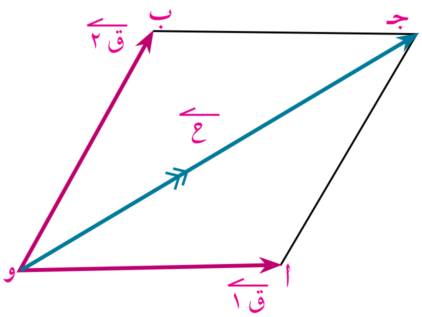


شكل (٢)

محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة:

لكل قوتين مؤثرتين على جسم فى نقطة واحدة، قوة محصلة تؤثر فى نفس النقطة، تقوم بنفس التأثير الذى تقوم به القوتان وتمثل هندسيًّا بقطر متوازى الأضلاع المرسوم بهاتين القوتين كضلعين متجاورين فيه.

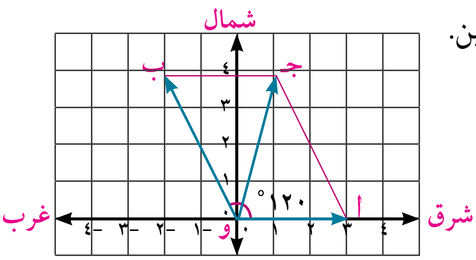
ففى الشكل المقابل نجد أنَّ: $\overrightarrow{\text{ح}}$ الممثل لقطر متوازى الأضلاع $\overrightarrow{\text{و جـ}}$ يُمثل محصلة القوتين $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ **أىْ أنَّ:** $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ق}}_2$



نشاط

استخدام برنامج (GeoGebra)

$\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ قوتان تُؤثِّران فى نقطة من جسم جاسئ ،حيث ق$_1$ = ٣٠٠ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق، ق$_2$= ٤٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد محصلة القوتين.



- اختر مقياس رسم مناسبًا (ليكن ١ سم لكل ١٠٠ نيوتن).
- ارسم $\overrightarrow{\text{و أ}}$ تمثل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ حيث $||\overrightarrow{\text{و أ}}||$ = ٣ سم فى الاتجاه الموجب لمحورالسينات.
- ارسم ∠ أ و ب القطبية حيث ق (∠ أ و ب) = ١٢٠°
- ثم ارسم $\overrightarrow{\text{و ب}}$ تمثل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ حيث $||\overrightarrow{\text{و ب}}||$ = ٤ سم.
- أكمل رسم متوازى الأضلاع و أ جـ ب.

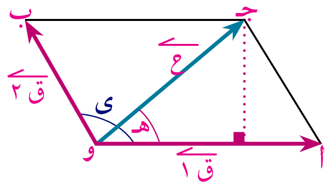
- لاحظ أن محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{و جـ}$.
- حدد باستخدام البرنامج $\|\overleftarrow{و جـ}\| \simeq ٣,٦$ سم. **أيْ أنَّ** ح $\simeq ٣,٦ \times ١٠٠ = ٣٦٠$ نيوتن.
- لاحظ أن $\overleftarrow{و جـ}$ يصنع مع $\overleftarrow{و أ}$ زاوية قياسها ٥٣″ ٥٣′ ٧٣°

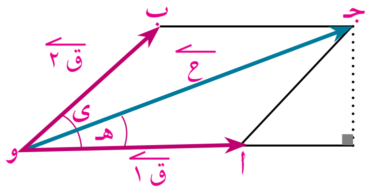
أيْ أنَّ محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ مقدارها ٣٦٠ نيوتن تقريبًا وتصنع مع $\overleftarrow{ق_١}$ زاوية قياسها ٥٣″ /٥٣ /٧٣°.

تطبيق على النشاط

(١) استخدم برنامج (*GeoGebra*) فى إيجاد محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ اللتين تؤثران فى نقطة مادية حيث $ق_١ = ٤٠٠$ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشرق ، $ق_٢ = ٥٠٠$ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٨٠° شمال الشرق.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليًّا: *The resultant of two force meeting at apoint analytically*

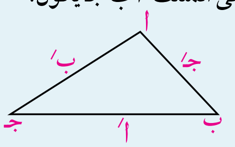




تذكر أن

قاعدة جيب التمام:

فى المثلث أ ب جـ يكون:



$أ′^٢ = ب′^٢ + جـ′^٢ - ٢ ب′ جـ′ جتا أ$

نفرض أنَّ $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متلاقيتان فى نقطة (و) وأن قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين (ى) فإذا كان $\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ تمثلان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فإن $\overleftarrow{و جـ}$ تمثل المحصلة $\overleftarrow{ع}$ وبفرض أن هـ هو قياس الزاوية التى تصنعها $\overleftarrow{ع}$ مع $\overleftarrow{ق_١}$ فإنه كما سبق فى دراسة قاعدة جيب التمام يمكن إيجاد مقدار واتجاه محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ من العلاقات:

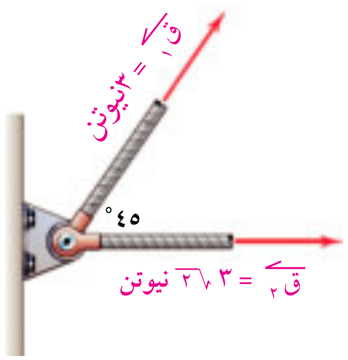
$$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى} \quad ، \quad ظاهـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}$$

حيث: $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ع مقادير القوى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ع}$ على الترتيب

فكر: كيف يمكن الاستدلال على صحة العلاقات السابقة .

مثال

(٧) قوتان مقدارهما ٣ ، $٣\sqrt{٢}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية والزاوية بين اتجاهيهما ٤٥°. أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها مع القوة الأولى.



الحل

بوضع: $ق_١ = ٣$ ، $ق_٢ = ٣\sqrt{٢}$ ، $ى = ٤٥°$

$$\therefore ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$$

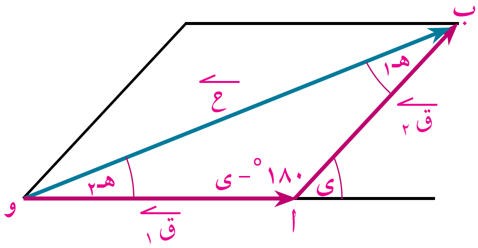
$$\therefore ع = \sqrt{(٣)^٢ + (٣\sqrt{٢})^٢ + ٢ \times ٣ \times ٣\sqrt{٢} جتا ٤٥°}$$

$$= \sqrt{٩ + ١٨ + ١٨\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥} \text{ نيوتن}$$

$$\because ظاهـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى} \qquad \therefore ظاهـ = \frac{٣\sqrt{٢} \times جا ٤٥°}{٣ + ٣\sqrt{٢} جتا ٤٥°} = \frac{١}{٢}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة فإن: ق($\measuredangle$ هـ) = ٥٤″ ٣٣′ ٢٦°

حل آخر للجزء الثانى من المثال :



لاحظ أن: فى الشكل المقابل المثلث و أ ب يمثل القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ حيث $\measuredangle$ هـ١ هى زاوية ميل خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ مع المحصلة $\overleftarrow{ع}$ ، $\measuredangle$ هـ٢ هى زاوية ميل خط عمل $\overleftarrow{ق_1}$ مع المحصلة $\overleftarrow{ع}$ باستخدام قاعدة جيب الزاوية.

لاحظ أن: جا (١٨٠° − ى) = جاى

فإن: $\frac{ق_1}{جا هـ_1} = \frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ح}{جا ى}$ حيث ى = هـ١ + هـ٢

وتستخدم هذه القاعدة لإيجاد قياس زاوية ميل المحصلة على أى من $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$

ففى المثال السابق: لإيجاد قياس زاوية ميل المحصلة مع $\overleftarrow{ق_1}$ نستخدم العلاقة: $\frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ح}{جا ى}$

$\therefore \frac{٣\sqrt{٢}}{جا هـ_2} = \frac{٣\sqrt{٥}}{جا ٤٥}$

أىْ أنَّ جا هـ٢ = $\frac{٣\sqrt{٢} \times جا ٤٥°}{٣\sqrt{٥}}$

ومنها فإن قياس زاوية ميل المحصلة مع $\overleftarrow{ق_1}$ تساوى ٥٤″ ٣٣′ ٢٦° وهو نفس الجواب السابق.

ملاحظة : **يمكن استخدام هذه الطريقة فى حل التمارين.**

حاول أنْ تحل

(٢) قوتان مقدارهما ١٠ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية، وقياس الزاوية بين اتجاهيهما يساوي ٦٠°. أوجد مقدار محصلتهما، وزاوية ميلها على القوة الأولى.

تفكير ناقد: أوجد مقدار واتجاه محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ فى الحالات الآتية:

١- إذا كانت القوتان متعامدتين.

٢- إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار .

مثال

(٨) أوجد مقدار واتجاه المحصلة لكل من $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ فى كل حالة من الحالات الآتية:

أ ق١ = ٥ نيوتن ، ق٢ = ١٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

ب ق١ = ق٢ = ١٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

لاحظ أن

إذا كانت $\overleftarrow{ق_1} \perp \overleftarrow{ق_2}$

فإن ع = $\sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$

، ظاهـ = $\frac{ق_2}{ق_1}$

الحل

أ $\because$ $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ متعامدتان أى ق($\measuredangle$ ى) = ٩٠° **فتكون جا ى** = ١ ، جتاى = ٠

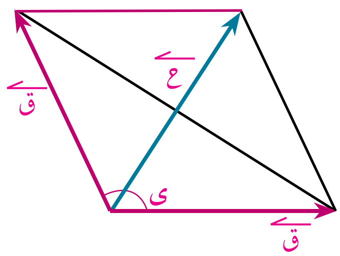
$\therefore$ ع = $\sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$ ، **لذلك فإن:** ع = $\sqrt{(٥)^2 + (١٢)^2}$ = ١٣ نيوتن

ويكون اتجاه المحصلة مع $\overleftarrow{ق_١}$ هو: ظاهـ = $\frac{ق_٢}{ق_١}$ أىْ أنَّ: ظاهـ = $\frac{١٢}{٥}$

∴ قياس زاوية ميل المحصلة مع $\overleftarrow{ق_١}$ هى ٤٩″ ٢٢′ ٦٧°

ب ∵ ع = $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$ وبالتعويض عن ق$_١$ = ق$_٢$ = ١٦

∴ ع = $\sqrt{(١٦)^٢ + (١٦)^٢ + ٢ × ١٦ × ١٦ جتا ١٢٠}$ = ١٦ نيوتن



ونلاحظ من الشكل المرسوم أن: ق$_١$ = ق$_٢$ = ع = ١٦ نيوتن، وأن المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين المتساويتين، أىْ أنَّ قياس زاوية ميل المحصلة على أىٍّ من القوتين = ٦٠°

لاحظ أن : من هندسة الشكل:

∵ جتا $\frac{ى}{٢}$ = $\frac{\frac{١}{٢} ع}{و}$ ∴ ع = ٢ و جتا $\frac{ى}{٢}$

حاول أنْ تحل

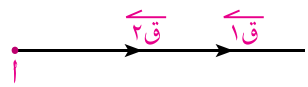
٣ أوجد مقدار واتجاه المحصلة لكل من $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى كل حالة من الحالات الآتية:

أ ق$_١$ = ٤,٥ نيوتن ، ق$_٢$ = ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

ب ق$_١$ = ق$_٢$ = ١٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

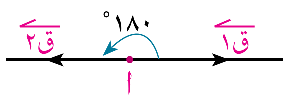
حالات خاصة:

١- إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى نفس الاتجاه:



➢ فى هذه الحالة فإن ق (∠ى) = صفر° و يكون جتاى = ١ وبالتعويض فى قانون إيجاد المحصلة **نجد أنَّ**: ع = ق$_١$ + ق$_٢$ و يكون اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين ، وتسمى ع فى هذه الحالة بالقيمة **العظمى للمحصلة.**

٢- إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل، وفى اتجاهين متضادين:



➢ فى هذه الحالةفإن ق (∠ى) = ١٨٠° ويكون جتاى = -١ وبالتعويض فى قانون إيجاد المحصلة نجد أنَّ: ع = |ق$_١$ - ق$_٢$| ويكون اتجاه المحصلة يَعمل فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا ، وتسمى ع فى هذه الحالة بالقيمة **الصغرى للمحصلة.**

مثال: أوجد القيمتين العظمى والصغرى لمحصلة القوتين ٤ ، ٧ نيوتن.

➢ القيمة العظمى = ٤ + ٧ = ١١ نيوتن وتعمل فى اتجاه القوتين.

➢ القيمة الصغرى = |٤ - ٧| = ٣ نيوتن وتعمل فى اتجاه القوة ٧ نيوتن.

مثال

٩ قوتان مقدارهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية، وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد: مقدار $\overleftarrow{ق}$ وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{ق}$.

الحل

بالتعويض عن: $ق_١ = ق$ ، $ق_٢ = ٤$ ، $ع = ٤\sqrt{٣}$ ، $ى = ١٢٠°$

في القانون : $ع^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى$

$\therefore (٤\sqrt{٣})^٢ = ق^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times ق \times ٤ جتا ١٢٠°$ أي أن : $٤٨ = ق^٢ + ١٦ - ٤ ق$

$\therefore ق^٢ - ٤ق - ٣٢ = ٠$ أيْ أنَّ: $(ق + ٤)(ق - ٨) = ٠$ ومنها $ق = ٨$ نيوتن، $ق = -٤$ مرفوض

لإيجاد قياس الزاوية بين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ع}$ نستخدم القانون: $ظاهـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}$

$\therefore ظاهـ = \frac{٤ \times جا ١٢٠}{٨ + ٤ \times جتا ١٢٠} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

أى أن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{ق_١} = ٣٠°$

حل آخر للجزء الثاني:

لإيجاد قياس الزاوية بين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ع}$ نستخدم قانون الجيب: $\frac{ق_٢}{جا هـ_٢} = \frac{ح}{جا ى}$

$\therefore \frac{٤}{جا هـ_٢} = \frac{٤\sqrt{٣}}{جا ١٢٠}$

$جا هـ_٢ = \frac{١}{٢}$ بالاختصار والتبسيط

أيْ أنَّ قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{ق}$ تساوى ٣٠°

حاول أنْ تحل

(٤) قوتان مقدارهما ٦ ، ق ث كجم تؤثران فى نقطة مادية، وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°. أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التى مقدارها ق.

تعبير شفهى: أوجد محصلة قوتين متساويتين فى المقدار، ولهما نفس خط العمل و يعملان فى اتجاهين متضادين.

تمــارين (١ - ١)

أكمل مايأتي:

(١) يتحدد تأثير قوة على جسم بالآتي ....

(٢) متجه محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ يساوى ....

(٣) القيمة العظمى لمحصلة قوتين مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن متلاقيتين فى نقطة يساوى ....

(٤) القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقدارهما ٥ ، ٩ نيوتن متلاقيتين فى نقطة يساوى ....

(٥) ٢ ، ٣ نيوتن قوتان فإذا كان قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) مقدار محصلة القوتين ٣ ، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° تساوى.

(أ) ٢ نيوتن (ب) ٦ نيوتن (جـ) ٧ نيوتن (د) ٨ نيوتن

٧ قوتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى

أ ٣٠° ب ٤٥° ج ٦٠° د ٩٠°

٨ قوتان متساويتان متلاقيتان فى نقطة، مقدار كلٍّ منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى:

أ ٣٠° ب ٦٠° ج ١٢٠° د ١٥٠°

٩ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن قيمة ق بالنيوتن تساوى:

أ ١,٥ ب ٣ ج ٣$\sqrt{٣}$ د ٦

١٠ إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى تساوى:

أ $\frac{٣}{٥}$ ب $\frac{٤}{٥}$ ج $\frac{٣}{٤}$ د $\frac{٤}{٣}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

١١ قوتان مقدارهما ٥ ، ١٠ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°. أوجد مقدار المحصلة وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى.

١٢ قوتان مقدارهما ٣ ، ٣$\sqrt{٢}$ ث.كجم تُؤثِّران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٤٥° أوجد مقدار واتجاه محصلتهما.

١٣ قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ ث. كجم تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ١٣ ث. كجم. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

١٤ قوتان مقدارهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كان مقدار محصلتهما ق$\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد مقدار ق.

١٥ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كان اتجاه محصلتهما يميل بزاوية ٤٥° على ق. أوجد مقدار ق.

١٦ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تُؤثِّران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد مقدار ق.

١٧ قوتان مقدارهما ق ، ق$\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٢ق نيوتن. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

١٨ قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وجيب تمام الزاوية بينهما يساوى $\frac{-٤}{٥}$ أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها على القوة الأولى.

١٩ قوتان متساويتان مقدار كلٍّ منهما ق ث.كجم تَحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان

وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ ث. كجم عن الحالة الأولى. أوجد مقدار ق.

(٢٠) قوتان مقدارهما ١٢ ، ق ث. كجم تؤثران فى نقطة ، تعمل الأولى فى اتجاه الشرق، وتعمل الثانية فى اتجاه ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا عُلِمَ أنَّ خط عمل المحصلة يؤثر فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

(٢١) $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ قوتان تؤثران فى نقطة مادية، وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ومقدار محصلتهما $\sqrt{١٩}$ نيوتن. وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار المحصلة يساوى ٧ نيوتن. أوجد قيمة كل من $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$.

(٢٢) قوتان مقدارهما ق ، ٢ق ث. كجم تؤثران فى نقطة ما ، إذا ضُوعِفَ مقدار الثانية وزيد مقدار الأولى ١٥ ث. كجم لا يتغير اتجاه محصلتها. أوجد مقدار ق.

تفكير إبداعى:

(٢٣) قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث. كجم. وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث. كجم. أوجد مقدار كل من القوتين.

(٢٤) قوتان مقدارهما ك ، ق ومقدار محصلتهما ٢ك إذا كان قياس الزاوية بينهما هـ ، وإذا تغير قياس الزاوية وأصبحت (١٨٠° – هـ) فإن مقدار محصلتهما ينقص إلى النصف. أوجد النسبة بين ك ، ق.

(٢٥) ق ، ٢ق قوتان تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى ومقدار محصلتهما يساوى $\sqrt{٥}$ ق (م + ١) وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما (٩٠° – ى) فإن مقدار المحصلة يساوى $\sqrt{٥}$ ق (م - ١).

أثبت أن ظا ى = $\frac{م - ٢}{م + ٢}$

نشاط

$\overrightarrow{و_{١}}$ ، $\overrightarrow{و_{٢}}$ قوتان متلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتها ع نيوتن ، إذا عكس اتجاه $\overrightarrow{و_{٢}}$ فإن المحصلة تصبح ع $\sqrt{٣}$ نيوتن وفى اتجاه عمودى على المحصلة الأولى. أوجد قياس الزاوية بين القوتين.

١- اعتبر أن قياس الزاوية بين القوتين ى وزاوية ميل المحصلة مع $و_{١}$ قياسها هـ.

٢- أوجد ظا هـ ثم أوجد ظا (٩٠ - هـ) عند عكس اتجاه $و_{٢}$

٣- أثبت أنَّ $و_{١}$ = $و_{٢}$ = ق من الخطوة السابقة.

٤- أوجد باستخدام قانون مقدار المحصلة محصلة القوتين $و_{١}$، $و_{٢}$ قبل وبعد عكس اتجاه $و_{٢}$.

٥- هل يمكنك استنتاج أنَّ جتا ى = - $\frac{١}{٢}$ لإيجاد قياس الزاوية بين القوتين؟ استنتج ذلك من العلاقات السابقة.

٦- هل لديك طرق أخرى للحل؟ اذكر إحدى هذه الطرق.

تحليل القوى

Forces resolution

سوف تتعلم

- تحليل قوة فى اتجاهين معلومين.
- تحليل قوة فى اتجاهين متعامدين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مركبة قوة force Component
- مثلث قوى triangle of forces
- مركز ثقل centre of gravity

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

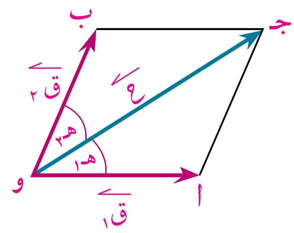
تمهيد:

إنَّ تحليل قوة معلومة إلى عِدَّة مركبات بوجه عام يعنى إيجاد مجموعة مؤلَّفة من عِدَّة قوى ، تكون القوة المعلومة هى مُحصلتها، وسنقتصر على دراسة **تحليل قوة فى اتجاهين معلومين**.

تحليل قوة فى اتجاهين معلومين

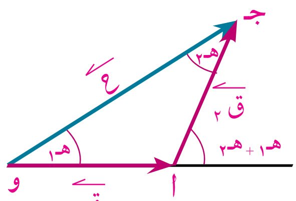
Resolution of a force into two components

يبين شكل (١): متجه المحصلة $\overleftarrow{\text{ح}}$ المراد تحليلها إلى مركبتين فى الاتجاهين $\overleftrightarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ب}}$ واللتين تصنعان زاويتين قياسيهما هـ$_1$ ، هـ$_2$ على الترتيب مع $\overleftarrow{\text{ح}}$ ولتكن المركبتان هما: $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$



شكل (١)

يبين شكل (٢): مثلث القوى مع ملاحظة أن $\overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{و ب}}$



شكل (٢)

(من خواص متوازى الأضلاع)

وبتطبيق قاعدة الجيب نجد أن:

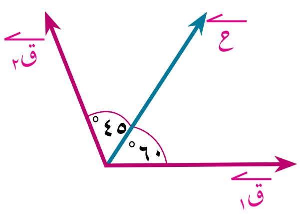
➢ $$\frac{\text{ق}_1}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ح}}{\text{جا (هـ}_1 + \text{هـ}_2)}$$

➢ (لاحظ أن : جا [١٨٠° - (هـ$_1$ + هـ$_2$)] = جا (هـ$_1$ + هـ$_2$)

مثال

١) حلِّل قوة مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين ٦٠° ، ٤٥° فى اتجاهين مختلفين منها مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل



بتطبيق قاعدة الجيب:

$$\frac{\text{ق}_1}{\text{جا } 45°} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا } 60°} = \frac{12}{\text{جا } 105°}$$

$$\therefore \text{ق}_1 = \text{جا } 45° \times \frac{12}{\text{جا } 105°} \simeq 8{,}7846 \text{ نيوتن}$$

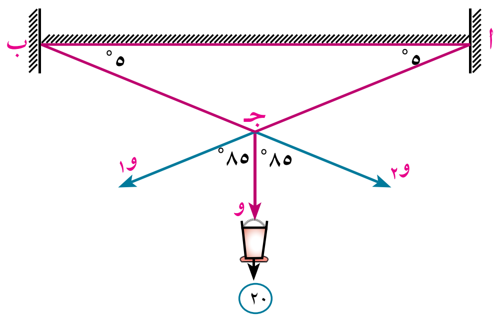
$$ق_{2} = جا\ ٦٠° \times \frac{١٢}{جا\ ١٠٥°} \simeq ١٠,٧٥٨٩ \text{ نيوتن}$$

حاول أنْ تحل

(١) حلل قوة مقدارها ٣٦ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياسهما ٣٠° ، ٤٥° في اتجاهين مختلفين منها.

مثال

تطبيقات حياتية



(٢) مصباح وزنه ٢٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{اجـ}$ ، $\overline{بجـ}$ يميلان على الأفقي بزاويتين متساويتين قياس كل منهما ٥°.

➤ حلل وزن المصباح في الاتجاهين $\overleftarrow{اجـ}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ مقربًا الناتج لأقرب نيوتن.

الحل

نُمثِّل قوة الوزن (**٢٠ نيوتن**) بمتجه يعمل رأسيًا لأسفل نقطة بدايته هي النقطة **جـ**.

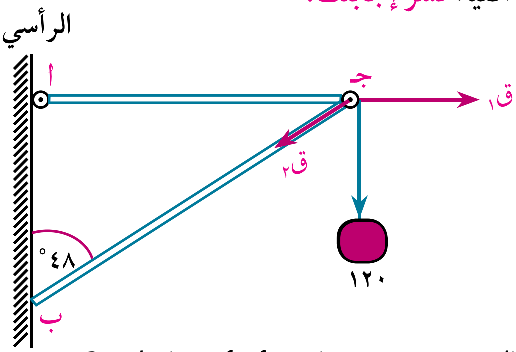
نُحلِّل متجه الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين كما يلي:

$$\frac{و_1}{جا\ ٨٥°} = \frac{و_2}{جا\ ٨٥°} = \frac{٢٠}{جا\ ١٧٠°}$$ **أيْ أن:**

$$و_1 = و_2 = ٢٠ \times \frac{جا\ ٨٥°}{جا\ ١٧٠°}$$ **ومن ذلك تكون:**

$$و_1 = و_2 = ١١٤,٧٣٧١٣ \simeq ١١٥ \text{ نيوتن.}$$

تفكير ناقد: ماذا يَحدث لمقدار مركبة الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقي عن ٥°؟ وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدني أفقيًا؟ **فسِّر إجابتك.**

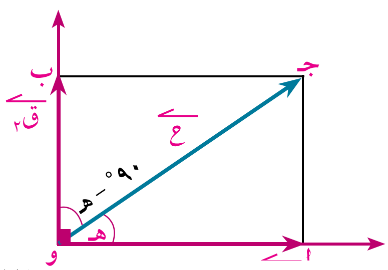


حاول أنْ تحل

(٢) **الشكل المقابل:**

حلِّل القوة الرأسية ١٢٠ث.جم إلى مركبتين إحداهما في الاتجاه الأفقي، والأخرى في اتجاه يصنع مع خط عمل القوة زاوية قياسها ٤٨°.

تحليل قوة في اتجاهين متعامدين *Resolution of a force into two perpendicular components*



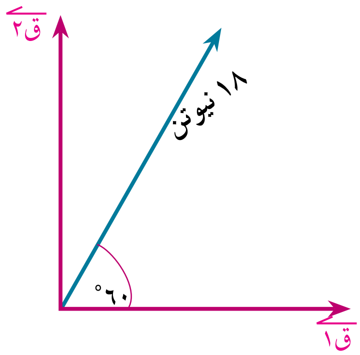
إذا أثرت القوة $\overleftarrow{ع}$ في نقطة مادية (و) كما في الشكل المجاور، وكانت مركبتيهما المتعامدتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ حيث اتجاه $\overleftarrow{ق_1}$ يميل على اتجاه $\overleftarrow{ع}$ بزاوية قياسها هـ ، فإن متوازي الأضلاع يؤول في هذه الحالة إلى المستطيل اجـ ب و ، وبتطبيق قانون الجيب على المثلث و اجـ فإن:

➢ $\frac{ق_1}{\text{جا}(٩٠ - \text{هـ})} = \frac{ق_2}{\text{جا هـ}} = \frac{ح}{\text{جا }٩٠}$ أيْ أنَّ: $\frac{ق_1}{\text{جتا هـ}} = \frac{ق_2}{\text{جا هـ}} = ح$

ومن ذلك نستنتج أنَّ:

➢ $ق_1$ (مقدار المركبة فى اتجاه معلوم) = ع جتا هـ

➢ $ق_2$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على الاتجاه المعلوم) = ع جا هـ



مثال

(٣) حلل قوة مقدارها ١٨ نيوتن فى اتجاهين متعامدين، إحداهما يصنع مع القوة زاوية قياسها ٦٠

الحل

$ق_1 = ١٨ \text{ جتا } ٦٠° = ١٨ \times \frac{١}{٢} = ٩$ نيوتن

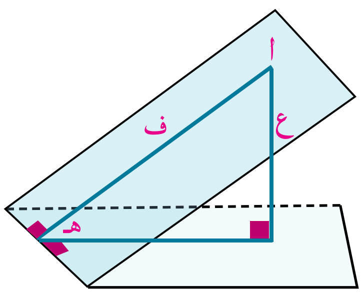
$ق_2 = ١٨ \text{ جا } ٦٠ = ١٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٩\sqrt{٣}$ نيوتن.

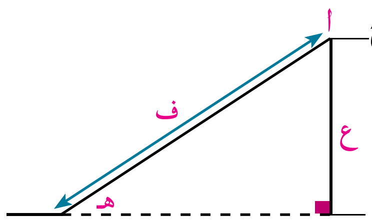
حاول أنْ تحل

(٣) حَلِّل قوة مقدارها $٦\sqrt{٢}$ نيوتن والتى تعمل فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه الشرق والأخرى فى اتجاه الشمال.

المستوى المائل *Inclined Plane*

هو سطح يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث ٠ < هـ < $\frac{\pi}{٢}$ ، وخط أكبر ميل للمستوى هو الخط فى المستوى المائل العمودى على خط تقاطع هذا المستوى مع المستوى الأفقى والموضح بالشكل باللون الأزرق ويكون



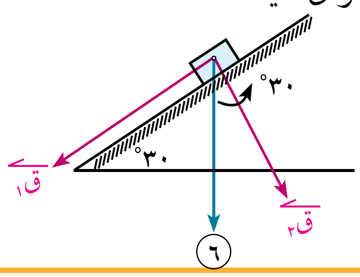


جاهـ = $\frac{ع}{ف}$ حيث:

ع تمثل بُعد النقطة أ عن المستوى الأفقى،
ف تمثل بُعد النقطة أ عن خط تقاطع المستوى المائل مع المستوى الأفقى.

مثال

(٤) وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها٣٠°.
أوجد مركبتى وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.



الحل

الشكل المقابل يبين وزن الجسم ٦ نيوتن، ويؤثر رأسيًّا إلى أسفل، مركبة وزن الجسم $\overleftarrow{ق_1}$ تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ولأسفل، والمركبة الأخرى $\overleftarrow{ق_2}$ وتعمل فى الاتجاه العمودى للمستوى ولأسفل.

مركبة وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ($\overleftarrow{\text{ق}_١}$).

حيث $\text{ق}_١$ = ٦ جا هـ

= ٦ جا ٣٠° = ٦ × $\frac{١}{٢}$ = ٣ نيوتن

مركبة وزن الجسم فى الاتجاه العمودى على المستوى ($\overleftarrow{\text{ق}_٢}$)

حيث $\text{ق}_٢$ = ٦ جتا هـ

= ٦ جتا٣٠° = ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن

تعبير شفهى: هل مقدار كل من مركبتى القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ أقل من مقدار القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ نفسها؟

فسر إجابتك.

أضف إلى معلوماتك

مركز ثقل الجسم الجاسئ

هى النقطة التى يمر بها دائمًا الخط الرأسى المار بنقطة التعليق عندما يعلق الجسم من أى نقطة عليه فعلى سبيل المثال.

(١) مركز ثقل جسم كروى منتظم ومتجانس هى النقطة التى يقع فيها المركز الهندسى لهذا الجسم.

(٢) مركز ثقل قضيب منتظم السمك والكثافة هو منتصف هذا القضيب.

حاول أنْ تحل

④ جسم جاسئ مقدار وزنه ٣٦ نيوتن موضوع على مستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل والاتجاه العمودى عليه.

تمــارين (١ – ٢)

أكمل مايأتى:

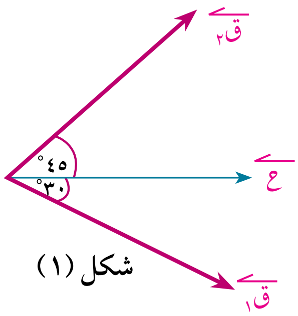
① قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تُساوى .... نيوتن.

② قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

③ فى شكل (١):

أ إذا حلَّلت القوة $\overleftarrow{\text{ع}}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياسيهما ٣٠° ، ٤٥° من جهتيها وكان || $\overleftarrow{\text{ع}}$ || = ١٢ نيوتن ،

فإن: $\text{ق}_١$ = ... نيوتن ، $\text{ق}_٢$ = ... نيوتن.

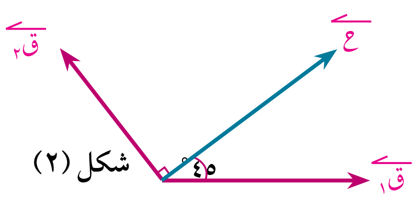


شكل (١)

④ فى شكل (٢):

أ إذا حللت القوة $\overleftarrow{\text{ع}}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٤٥° ، ٩٠° من كلتا جهتيها وكان

|| $\overleftarrow{\text{ع}}$ || = ١٨ نيوتن ، فإن: $\text{ق}_١$ = ... نيوتن ، $\text{ق}_٢$ = ... نيوتن

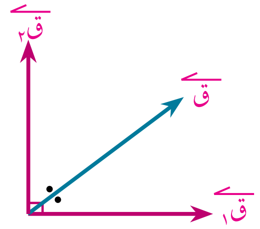


شكل (٢)

٥ فى شكل (٣):

أ إذا حلَّلت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ إلى مركبتين متعامدتين $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ وكان متجه القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ينصف الزاوية بين اتجاهى $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ وكان $\|\overleftarrow{\text{ق}}\|$ = ٦$\sqrt{٢}$ ث كجم فإن: $\|\overleftarrow{\text{ق}}_{١}\|$ =............................ ث كجم ،

$\|\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}\|$ =............................ ث كجم.

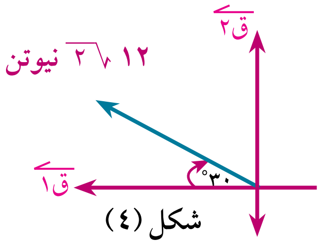


شكل (٣)

٦ فى شكل (٤):

أ قوة مقدارها ١٢$\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

- مقدار مركبة القوة فى اتجاه الغرب =............................ نيوتن.
- مقدار مركبة القوة فى اتجاه الشمال =............................ نيوتن.



شكل (٤)

٧ قوة مقدارها ٦٠٠ ث جم تؤثِّر فى نقطة مادية. أوجد مركبتيها فى اتجاهين يصنعان معها زاويتين قياسيهما ٣٠°، ٤٥°.

٨ قوة مقدارها ١٢٠ نيوتن تَعمل فى اتجاهِ الشمال الشرقى. أوجد مركبتيها فى اتجاه الشرق واتجاه الشمال.

٩ حلِّل قوة أفقية مقدارها ١٦٠ ث جم فى اتجاهين متعامدين، أحدهما يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.

١٠ قوة مقدارها ١٨ نيوتن تَعمل فى اتجاهِ الجنوب. أوجد مركبتيها فى اتجاهى ٦٠° شرق الجنوب، والأخرى فى اتجاه ٣٠° غرب الجنوب.

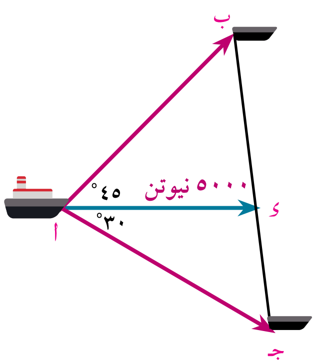
١١ جسم جاسئ وزنه ٤٢ نيوتن موضوع على مستو يَميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مركبتى وزن هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

تفكير إبداعى:

١٢ مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه ٣٩٠ ث جم. أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

الربط بالملاحة البحرية:

١٣ يراد سحب بارجة بواسطة قاطرتين ب ، جـ تتصلان بحبلين مثبتين فى خُطاف فى نقطة أ من البارجة وقياس الزاوية بينهما ٧٥°، فإذا كان زاوية ميل أحد الحبلين على $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ يساوى ٤٥° وكانت محصلة القوى المبذولة لسحب البارجة تساوى ٥٠٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ء}}$. أوجد الشد فى كل من الحبلين .



محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

The resultant of coplanar forces meeting at a point

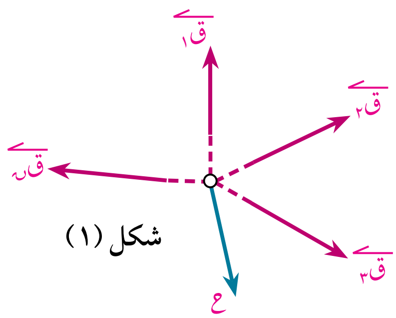
فكر و ناقش

سبق أن درست إيجاد محصلة قوتين مؤثِّرتين على جسم جاسئ فى نقطة واحدة، حيث مُثلت هندسيًّا بقطر متوازى الأضلاع المرسوم بهاتين القوتين كضلعين متجاورين فيه. فهل يمكنك إيجاد محصلة عِدَّة قوى مستوية متلاقية فى نقطة واحدة هندسيًّا؟

تعلم

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة هندسيًّا:

إذا أثرت مجموعة القوى $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٣}$ ، .... ، $\overleftarrow{ق}_{ن}$ فى نقطة مادية كما فى شكل (١)



شكل (١)

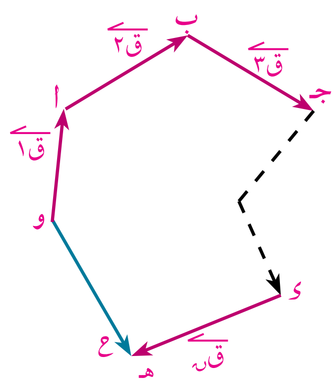
فباستخدام مقياس رسم مناسب

نرسم المتجه $\overleftarrow{و\,أ}$ الذى يمثل $\overleftarrow{ق}_{١}$

ثم نرسم $\overleftarrow{أ\,ب}$ الذى يمثل $\overleftarrow{ق}_{٢}$

ثم نرسم $\overleftarrow{ب\,جـ}$ الذى يمثل $\overleftarrow{ق}_{٣}$ وهكذا.....

حتى نصل إلى نهاية المتجه $\overleftarrow{ق}_{ن}$ وذلك برسم $\overleftarrow{ء\,هـ}$.



شكل (٢)

المتجه $\overleftarrow{و\,هـ}$ الذى يعمل فى الاتجاه الدورى المضاد يُمثِّل محصلة القوى المعطاة، حيث:

$$\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ق}_{١} + \overleftarrow{ق}_{٢} + \overleftarrow{ق}_{٣} + ... + \overleftarrow{ق}_{ن}$$

ويسمى هذا المضلع بمضلع القوى ومن السهل ملاحظة أن تكوين مضلَّع قوى ما هو إلا تطبيق لقاعدة مثلث قوى عدة مرات متتالية.

سوف تتعلم

- محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة هندسية.
- محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة تحليليًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- محصلة. Resultant
- مركبة جبرية. Algebraic component
- متجه وحدة. Unit vector

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية . Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب.

نشاط

استخدام برنامج (GeoGebra)

$\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$ أربع قوى مستوية تؤثر فى نقطة من جسم جاسئ ، حيث $ق_1$ = ٤٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشرق ، $ق_2$ = ٣٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشمال ، $ق_3$ = ٥٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشمال الغربى ، $ق_4$ = ٢٠٠ نيوتن وتعمل بزاوية قياسها ٣٠° جنوب الغرب. أوجد محصلة هذه القوى.

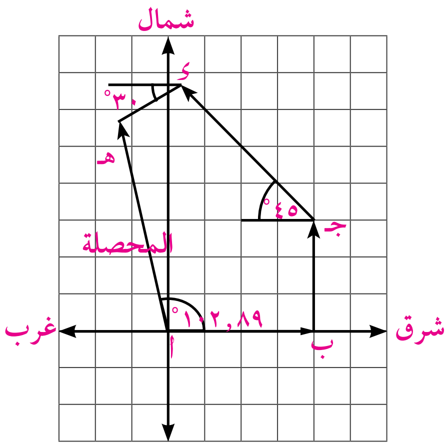
① ارسم القطع المستقيمة الموجهة التى تُمثِّل القوى بمقياس رسم ١: ١٠٠

② ارسم من نقطة الأصل المتجه $\overleftarrow{أ ب}$ الذي طوله ٤ وحدات فى اتجاه الشرق.

③ ارسم من نقطة ب المتجه $\overleftarrow{ب جـ}$ الذي طوله ٣ وحدات فى اتجاه الشمال.

④ ارسم من نقطة جـ المتجه $\overleftarrow{جـ ى}$ الذي طوله ٥ وحدات فى اتجاه الشمال الغربى.

⑤ ارسم من ى المتجه $\overleftarrow{ى هـ}$ الذي طوله ٢ وحدة فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب.



لاحظ المتجه $\overleftarrow{أ هـ}$ بما تسميه؟

من الرسم السابق نجد أن:

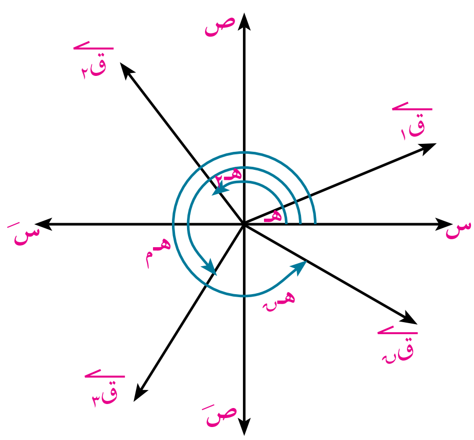
$||\overleftarrow{أ هـ}||$ = ٥,٦٨ وحدة طول.

مقدار المحصلة = ٥,٦٨ × ١٠٠ = ٥٦٨ نيوتن، وتصنع المحصلة مع الشرق زاوية قياسها ١٠٣° تقريبًا.

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة تحليليًّا

The resultant of coplanar forces meeting at apoint analytically

إذا أثرت القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، ..... ، $\overleftarrow{ق_ن}$ المستوية والمتلاقية فى نقطة وفى نظام إحداثى متعامد، وكانت تصنع الزوايا القطبية التى قياساتها $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$ ، .... ، $هـ_ن$ وكانت $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ هما متجها الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ فإن: $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3} + ... + \overleftarrow{ق_ن}$



وبتحليل كل قوة فى اتجاهى $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ المتعامدين فإن:

$\overleftarrow{ح}$ = ($ق_1$ جتا $هـ_1$ ، $ق_1$ جا $هـ_1$)

+ ($ق_2$ جتا $هـ_2$ ، $ق_2$ جا $هـ_2$)

+ .... + ($ق_ن$ جتا $هـ_ن$ ، $ق_ن$ جا $هـ_ن$)

$\overleftarrow{ح}$ = ($ق_1$ جتا $هـ_1$ + $ق_2$ جتا $هـ_2$ + ... + $ق_ن$ جتا $هـ_ن$) $\overleftarrow{س}$

+ ($ق_1$ جا $هـ_1$ + $ق_2$ جا $هـ_2$ + ... + $ق_ن$ جا $هـ_ن$) $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ح} = \left(\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر \text{جتا} هـ_ر\right) \overleftarrow{س} + \left(\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر \text{جا} هـ_ر\right) \overleftarrow{ص}$

> **أضف إلى معلوماتك**
>
> يسمى الرمز Σ (سيجما) برمز التجميع والعبارة $\sum\limits_{ر=١}^{ن}$ مجموع ن عنصرًا بدأ من العنصر الأول.

- **يسمى المقدار:** $\sum\limits_{ر=١}^{ن} ق_ر \text{جتا} هـ_ر$ بالمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ويرمز له بالرمز س.
- **يسمى المقدار:** $\sum\limits_{ر=١}^{ن} ق_ر \text{جا} هـ_ر$ بالمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ ويرمز له بالرمز ص.

ومن ذلك نكتب $\overleftarrow{ع} = س \overleftarrow{س} + ص \overleftarrow{ص}$

وتكون ح معيار المحصلة ، هـ هى قياس الزاوية القطبية لها

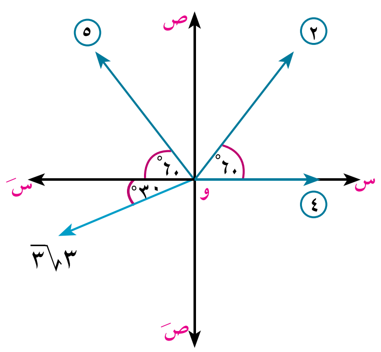
أىْ أنَّ: $ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، $\text{ظا} هـ = \frac{ص}{س}$

مثال

① أربع قوى مستوية تؤثر فى نقطة مادية، الأولى مقدارها ٤ نيوتن وتؤثر فى اتجاه الشرق، والثانية مقدارها ٢ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق، والثالثة مقدارها ٥ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب والرابعة $٣\sqrt{٣}$ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° غرب الجنوب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

القوى ٤ ، ٢ ، ٥ ، $٣\sqrt{٣}$ نيوتن قياس زواياها القطبية هى ٠° ، ٦٠° ، ١٢٠° ، ٢١٠° على الترتيب نوجد المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$



$$س = ٤ \text{جتا}٠° + ٢ \text{جتا}٦٠° + ٥ \text{جتا}١٢٠° + ٣\sqrt{٣} \text{جتا}٢١٠°$$

$$= ٤ + ٢ \times \frac{١}{٢} - ٥ \times \frac{١}{٢} - ٣\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٤ + ١ - \frac{٥}{٢} - \frac{٩}{٢} = -٢$$

$$ص = ٤ \text{جا}٠° + ٢ \text{جا}٦٠° + ٥ \text{جا}١٢٠° + ٣\sqrt{٣} \text{جا}٢١٠°$$

$$= ٠ + ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٣\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢}$$

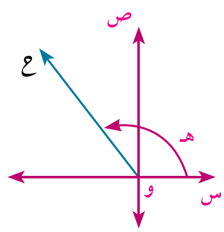
$$= \sqrt{٣} + \frac{٥}{٢}\sqrt{٣} - \frac{٣}{٢}\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$$

$\therefore \overleftarrow{ع} = -٢ \overleftarrow{س} + ٢\sqrt{٣} \overleftarrow{ص}$ **ويكون** $ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$ نيوتن

$$\text{ظا} هـ = \frac{ص}{س} = \frac{٢\sqrt{٣}}{-٢} = -\sqrt{٣}$$

$\because$ س $<$ ٠ ، ص $>$ ٠

$\therefore$ هـ $= ١٢٠°$



أىْ أنَّ مقدار محصلة القوى يُساوى ٤ نيوتن، وتصنع زاوية قطبية قياسها ١٢٠°

حاول أنْ تحل

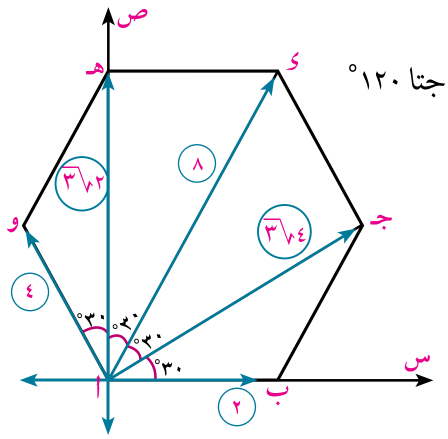
① تؤثِّر القوى المستوية التى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، $٣٠\sqrt{٣}$ ، ٤٠ نيوتن فى نقطة، بحيث كانت الزاوية بين اتجاهى القوتين الأولى والثانية ٦٠° وبين اتجاهى القوتين الثانية والثالثة ٩٠° وبين اتجاهى القوتين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

مثال

(٢) أ ب جـ ء هـ و شكل سداسي منتظم تؤثر القوى التي مقاديرها ٢ ، $٤\sqrt{٣}$ ، ٨ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٤ ث كجم في نقطة أ في الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

باعتبار $\overleftarrow{\text{أب}}$ هو اتجاه القوة الأولى فتكون الزوايا القطبية للقوى هي: ٠° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٢٠° على الترتيب.



$$\therefore \text{س} = ٢ \text{ جتا } ٠° + ٤\sqrt{٣} \text{ جتا } ٣٠° + ٨ \text{ جتا } ٦٠° + ٢\sqrt{٣} \text{ جتا } ٩٠° + ٤ \text{ جتا } ١٢٠°$$

$$= ٢ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٨ \times \frac{١}{٢} + ٢\sqrt{٣} \times ٠ - ٤ \times \frac{١}{٢}$$

$$= ٢ + ٦ + ٤ - ٢ = ١٠ \text{ نيوتن}$$

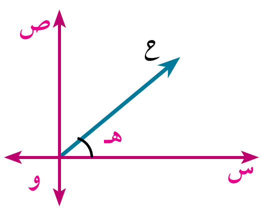
$$\text{ص} = ٢ \text{ جا } ٠° + ٤\sqrt{٣} \text{ جا } ٣٠° + ٨ \text{ جا } ٦٠°$$

$$+ ٢\sqrt{٣} \text{ جا } ٩٠° + ٤ \text{ جا } ١٢٠°$$

$$= ٠ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٢\sqrt{٣} + ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$= ٢\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} = ١٠\sqrt{٣} \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ع}} = ١٠ \, \overleftarrow{\text{س}} + ١٠\sqrt{٣} \, \overleftarrow{\text{ص}}$$



$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢} = ٢٠ \text{ نيوتن}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠} = \sqrt{٣}$$

$\because$ س > ٠ ، ص > ٠ $\qquad \therefore$ ق(∠هـ) = ٦٠°

أيْ أنَّ المحصلة تعمل في اتجاه $\overleftarrow{\text{أء}}$

تمارين (١ – ٣)

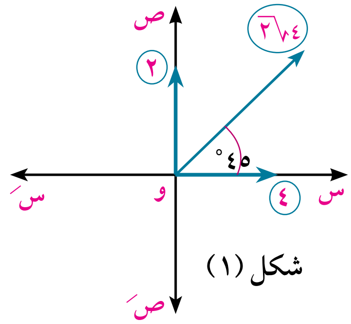
أكمل ما يأتي:

(١) إذا كانت القوى $\overleftarrow{\text{ق}_١} = ٢ \, \overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢} = \overleftarrow{\text{س}} - ٢ \, \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٣} = ٦ \, \overleftarrow{\text{ص}}$ فإن:
مقدار محصلة القوى = ... واتجاهها = ...

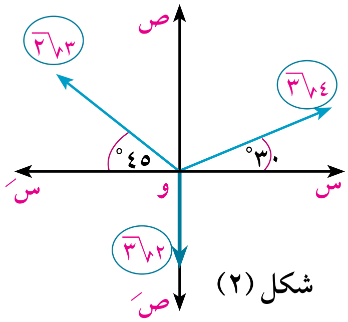
(٢) إذا كانت القوى $\overleftarrow{\text{ق}_١} = ٢ \, \overleftarrow{\text{س}} - ٢ \, \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢} = ٤ \, \overleftarrow{\text{س}} - ٨ \, \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} = ٢\text{أ} \, \overleftarrow{\text{س}} - ٣\text{ب} \, \overleftarrow{\text{ص}}$
فإن: أ = ... ، ب = ...

(٣) إذا كان $\overleftarrow{\text{ق}_١} = ٣ \, \overleftarrow{\text{س}} - ٢ \, \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢} = \text{أ} \, \overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٣} = ٤ \, \overleftarrow{\text{س}} - \text{ب} \, \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} = ٦ \, \overleftarrow{\text{س}} - ٤ \, \overleftarrow{\text{ص}}$
فإن: أ = ... ، ب = ...

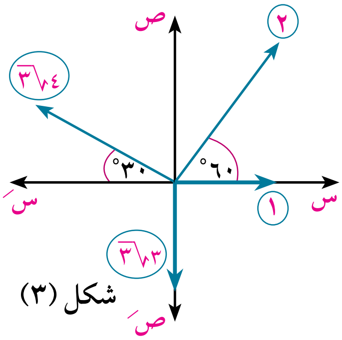
٤ أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المبينة فى كل شكل من الأشكال الآتية:



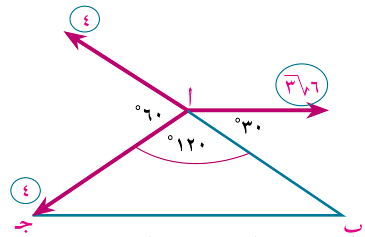
شكل (١)



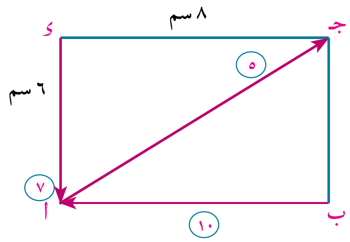
شكل (٢)



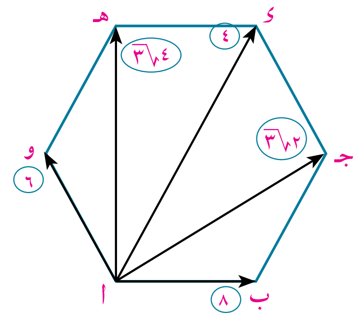
شكل (٣)



مثلث متساوى الساقين
شكل (٤)



مستطيل بعداه ٦ سم ، ٨سم
شكل (٥)



سداسى منتظم
شكل (٦)

٥ أثرت القوى ٣ ، ٦ ، $٩\sqrt{٣}$ ، ١٢ ث كجم فى نقطة مادية، وكان قياس الزاوية بين الأولى والثانية ٦٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° وبين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

٦ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثِّر فى نقطة مادية، الأولى نحو الشرق، والثانية تصنع زاوية ٣٠° غرب الشمال، والثالثة تصنع ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

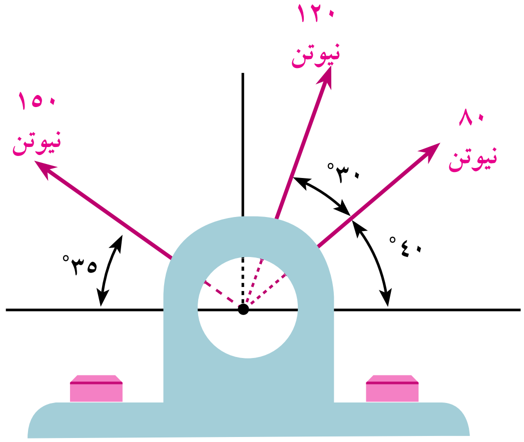
٧ أربع قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، $٣٠\sqrt{٣}$ ، ٤٠ ث جم تؤثِّر فى نقطة مادية، الأولى تؤثر فى اتجاه الشرق، والثانية تؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق، والثالثة تؤثِّر فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب، والرابعة تؤثِّر فى اتجاهٍ يصنع ٦٠° جنوب الشرق. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

٨ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، م نقطة تَلاقى متوسطاته أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{م أ}}$. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

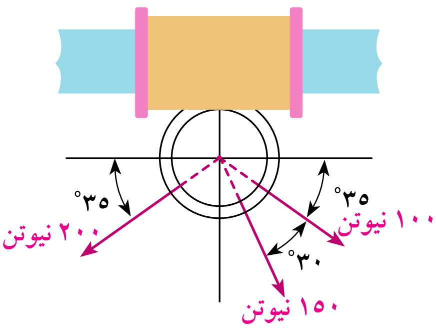
٩ أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم ، هـ $\in$ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب هـ = ٥سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، $٤\sqrt{٢}$ ، ٩ث جم فى الاتجاهات $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى.

(١٠) من بيانات الشكل . أوجد مقدار واتجاه المحصلة .

أ

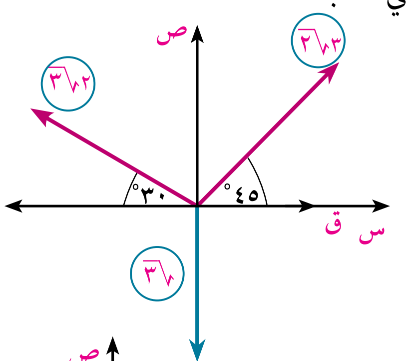


ب

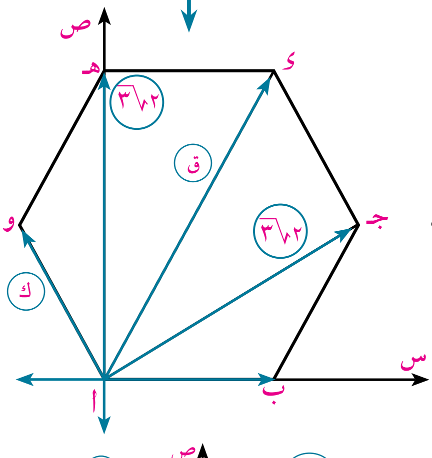


(١١) إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ = أ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ = -١٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ب $\overrightarrow{\text{ص}}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (١٠$\sqrt{2}$ ، ١٣٥°). أوجد قيمتي أ ، ب.

(١٢) فى الشكل المقابل: إذا كان مقدار محصلة القوى تساوى ٣$\sqrt{2}$ نيوتن، فأوجد قيمة ق، قياس الزاوية بين خط عمل المحصلة وخط عمل القوة الأولى .

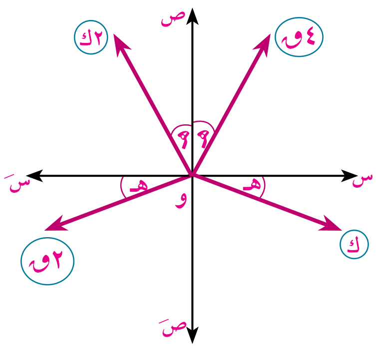


(١٣) فى الشكل المقابل : إذا كانت محصلة القوى تساوى ٢٠ ث كجم، وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ أوجد قيمتى ق ، ك .



تفكير إبداعى:

(١٤) **الشكل المقابل**: يبين أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة (و) فى الاتجاهات الموضحة حيث جا هـ = $\frac{4}{5}$ ، وكانت محصلة هذه القوى تساوى ٨$\sqrt{2}$ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع $\overleftarrow{\text{و س}}$ أوجد قيمتى و ، ك.



اتزان جسيم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

Equilibrium of a particle under the action of coplanar forces meeting at a point

إذا أثرت قوتان أو أكثر فى جسم جاسئ، ولم يتغير وضع الجسم قيل إن هاتين القوتين أو هذه القوى متزنة، وأن الجسم متزن ، و يعد أبسط أنواع الاتزان هوالناتج عن تأثير قوتين فى جسم جاسئ.

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

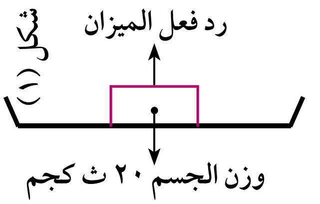
Equilibrium of a rigid body under the action of two forces

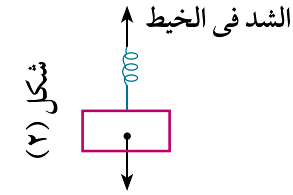
عمل تعاونى

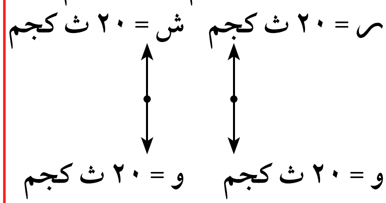
١- ضع جسمًا وزنه ٢٠ ث كجم على كفة ملساء لميزان ضغط أفقى، ولاحظ قراءة الميزان حينئذٍ. كما فى الشكل (١).

٢- اطلب من زميلك أن يربط نفس الجسم بخيط خفيف أملس، و يربط نهاية الخيط فى خُطاف ميزان زنبركى، و يلاحظ قراءة الميزان فى وضع السكون.

٣- قارن بين النتائج فى كل من التجربتين، ماذا تلاحظ؟







نلاحظ أن:

- كل من قوتى رد الفعل ر فى التجربة الأولى وقوة الشد فى الخيط ش فى التجربة الثانية تساوى ٢٠ ث كجم وهو وزن الجسم.

تعلم

شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

يتزن الجسم الجاسئ تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان:

١- متساويتين فى المقدار.

٢- متضادتين فى الاتجاه.

٣- خطى عملهما على استقامة واحدة.

سوف تتعلم

- اتزان جسم تحت تأثير قوتين.
- اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة.
- قاعدة مثلث القوى.
- قاعدة لامى.
- نظرية القوى الثلاث.
- اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة.

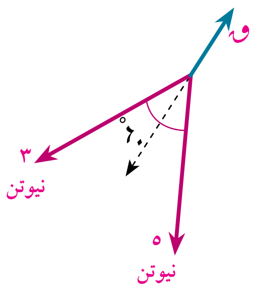
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قاعدة مثلث القوى. Triangle of forces rule
- قاعدة لامى. Lami`s rule
- مضلع القوى. Polygon of forces

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب.

مثال



③ إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأوجد قيمة ق؟

الحل

نوجد محصلة القوتين ٥ ، ٣ نيوتن من القانون:

$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$ $\therefore ع = \sqrt{٢٥ + ٩ + ٢ \times ٥ \times ٣ جتا ٦٠°}$

$\therefore ع = \sqrt{٢٥ + ٩ + ١٥} = \sqrt{٤٩} = ٧$ نيوتن

$\because$ القوة (ق) ومحصلة القوتان ٥ ، ٣ نيوتن فى حالة اتزان. $\therefore ق = ٧$ نيوتن

حاول أنْ تحل

① إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع القوتين المتعامدتين التى مقدار كل منها ٥ ، ١٢ نيوتن فأوجد قيمة ق.

نقل نقطة تأثير القوة إلى أى نقطة على خط عملها

نشاط

① أحضر الأدوات الآتية:
ميزانًا زنبركيًّا - قرصًا رقيقًا من المعدن - خيطًا - ميزانًا مائيًّا - مسطرة.

② اضبط النضد أفقيًّا باستخدام الميزان المائى.

③ صل القرص بخيطين عند الثقبين أ ، ب ثم اربط الطرفين الآخرين للخيطين بميزان الزنبرك.

④ ثبت حلقة أحد الميزانين فى مسمار مثبت فى النضد عند نقطة (جـ) واجذب الميزان الآخر ثم ثبته عند نقطة (ء) فى مسمار آخر يبعد عن المسمار الأول بحيث يكون الخيطان مشدودين كما بالشكل .

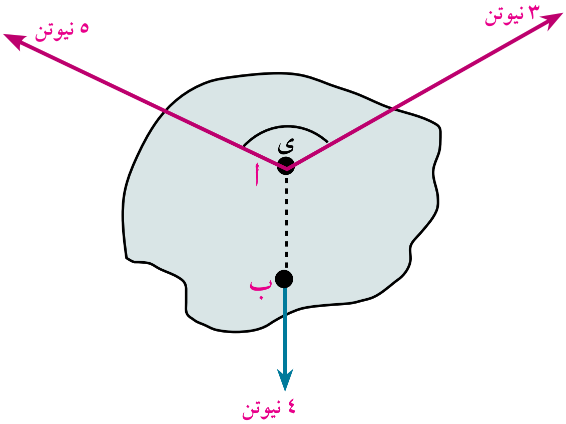
⑤ أوجد مقدار الشد المؤثر فى الخيط وسجل النتائج.

⑥ غير موضع تثبيت طرف الخيط من النقطة أ، إلى النقاط $أ_١$، $أ_٢$، ... وكذلك تغيير الطرف الآخر للخيط من النقطة ب إلى النقاط $ب_١$، $ب_٢$، ... ولاحظ قراءة ميزان الزنبرك فى كل حالة وسجل النتائج - ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أنه عند حدوث التوازن تتساوى القراءتان تمامًا .

من النشاط السابق نستنتج أن :

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين، فإنه يمكن نقل نقطة تأثير أى من القوتين إلى نقطة أخرى على خط عملها دون أن يؤثر ذلك فى اتزان الجسم.



مثال

(١) القوى ٣، ٥، ٤ نيوتن متوازنة كما فى الشكل المقابل.
أوجد قياس الزاوية بين القوتين ٣، ٥ نيوتن.

الحل

∵ مجموعة القوى متزنة.

∴ محصلة القوتين ٣، ٥ نيوتن تتزن مع القوة ٤ نيوتن

ويفرض أن قياس الزاوية بين القوتين ٣، ٥ نيوتن ى فإن :

$ع^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2ق_1 ق_2 جتا ى$

بالتعويض عن : ع = ٤ ، ق$_1$ = ٣ ، ق$_2$ = ٥

١٦ = ٩ + ٢٥ + ٢ × ٣ × ٥ جتا ى　　　٣٠ جتا ى = -١٨

أى أن جتا ى = $\frac{-3}{5}$

∴ ق(∠ى) = ١٨٠° - ٤٩ً ٧َ ٥٣° = ١١ً ٥٢َ ١٢٦°

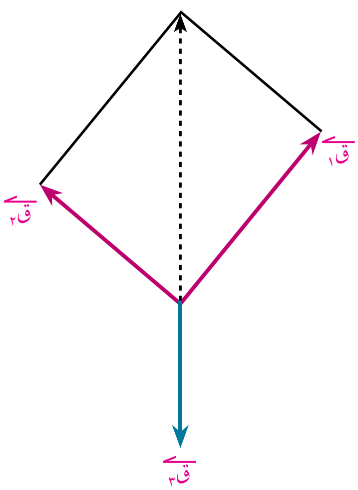
حاول أنْ تحل

(٢) إذا كانت القوى ٧، ٨، ١٣ نيوتن متوازنة فأوجد قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية.

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة

Equilibrium of arigid body under the action of three coplanar forces meeting at apoint

سبق أن درست شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين ، وسوف ندرس توازن ثلاث قوى تقع خطوط عملها فى مستوى واحد وتتلاقى فى نقطة واحدة ، وهذه القوى إما أن تؤثر فى نقطة مادية (أوجسيم) أو تؤثر على جسم بحيث تتلاقى خطوط عملها فى نقطة واحدة.



تعلم

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.

ففى الشكل المقابل :

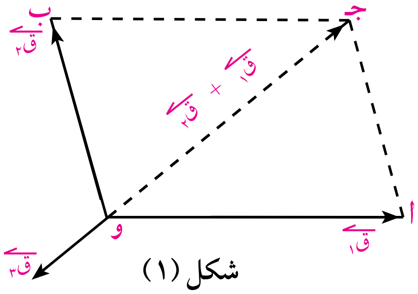
لكى تتزن القوى الثلاث يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث .

تعبير شفهى :

بين أيًّا من القوى التى لها المقادير الآتية يمكن أن تكون متزنة ؟ فسر إجابتك.
على اعتبار أن القوى تؤثر فى نقطة واحدة و فى اتجاهات مختلفة.

أ ٣، ٥، ٩ نيوتن　　　ب ٣، ٥، ٧ نيوتن　　　ج ٤، ١٠، ٦ نيوتن.

قاعدة مثلث القوى *Triangle of forces*



شكل (١)

شكل (١): يمثل القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تؤثران على جسم جاسئ تعملان فى $\overleftarrow{و\,أ}$ ، $\overleftarrow{و\,ب}$

وتكون محصلة هاتين القوتين هي ($\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$) والتي تعمل فى القطر $\overleftarrow{و\,جـ}$ من متوازى الأضلاع و أ جـ ب.

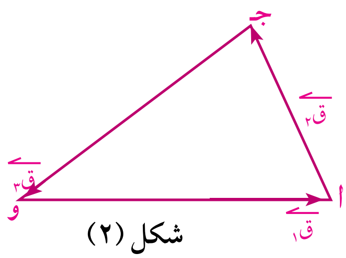
$\overleftarrow{ق_٣}$ تساوى ($\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$) فى المقدار وتضادهها فى الاتجاه

أىْ أنَّ: $\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{0}$ $\therefore$ $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ مجموعة متزنة.

تحقق من فهمك

بين أن مجموعة القوى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ مجموعة متزنة حيث :

$\overleftarrow{ق_١} = ٢\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣} = -٣\overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص}$



شكل (٢)

شكل (٢): يمثل مثلث القوى للمجموعة المتزنة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$

حيث إن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المتناظرة.

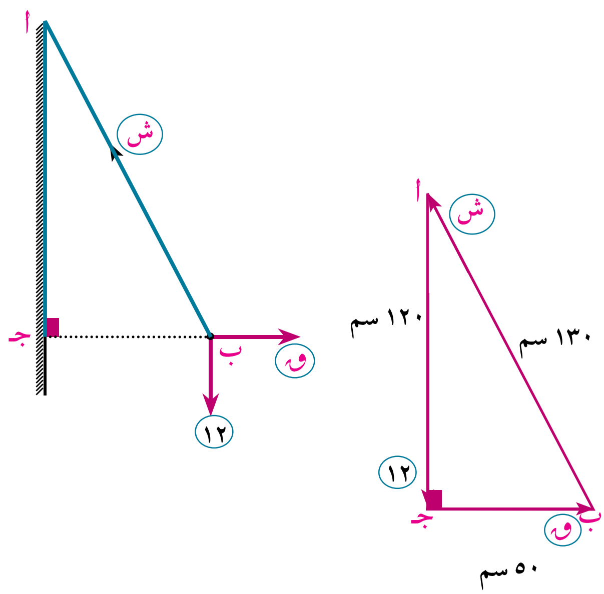
أىْ أنَّ: $\frac{ق_١}{و\,أ} = \frac{ق_٢}{أ\,جـ} = \frac{ق_٣}{جـ\,و}$

أى أن: إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية فى نقطة، ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى، فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

فكر: استخدم قاعدة الجيب لإثبات قاعدة مثلث القوى.

مثال

٢ عُلِّقَ ثُقل مقداره ١٢ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف طوله ١٣٠سم، والطرف الآخر للخيط مثبت فى نقطة على حائط رأسي، جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٥٠سم من الحائط. أوجد مقدار كل من القوة والشد فى الخيط.



الحل

الثقل متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

- قوة الوزن (١٢ نيوتن) وتعمل رأسيًّا لأسفل.
- القوة الأفقية ق.
- الشد فى الخيط ش ويعمل فى $\overleftarrow{ب\,أ}$

نوجد طول $\overline{أ\,جـ}$ من فيثاغورث.

$أ\,جـ = \sqrt{(١٣٠)^٢ - (٥٠)^٢} = ١٢٠$ سم

المثلث ب أ جـ مثلث القوى:

$\frac{ش}{١٣٠} = \frac{١٢}{١٢٠} = \frac{ق}{٥٠}$

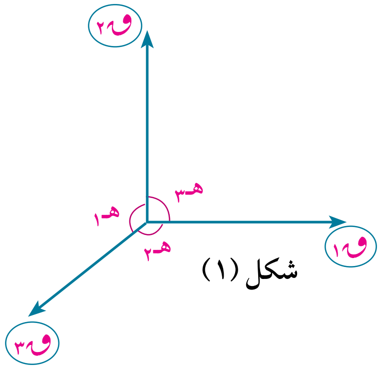
ش = ١٣ نيوتن ، ق = ٥ نيوتن

حاول أنْ تحل

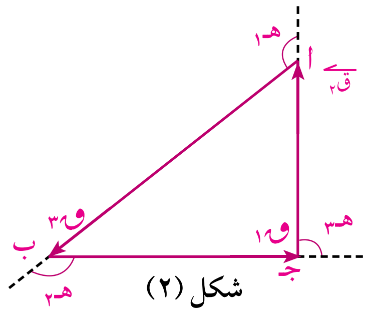
③ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف طوله ٥٠سم، مثبت طرفه الآخر فى نقطة فى سقف الحجرة أُزيح الثقل بقوة أفقية، حتى اتزن وهو على بعد ٤٠سم من السقف ، أوجد مقدار القوة الأفقية والشد فى الخيط.

قاعدة لامى *lami's theorem*

إذا أثرت القوى $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٣}$ فى نقطة مادية كما فى الشكل (١) وكانت متزنه فإنه يُمكن تَمثيلُها بأضلاع المثلث مأخوذة فى ترتيب دوري واحد كما فى الشكل (٢)



شكل (١)



شكل (٢)

باستخدام قاعدة الجيب نجد أن:

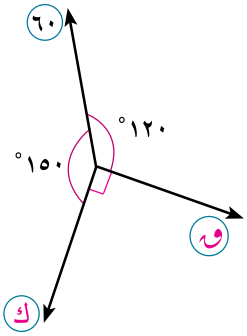
$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا}(١٨٠ - \text{هـ}_١)} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا}(١٨٠ - \text{هـ}_٢)} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا}(١٨٠ - \text{هـ}_٣)}$$

أىْ أنَّ $$\frac{\text{ق}_١}{\text{جا هـ}_١} = \frac{\text{ق}_٢}{\text{جا هـ}_٢} = \frac{\text{ق}_٣}{\text{جا هـ}_٣}$$

> إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخرتين.

مثال

③ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°. فأوجد مقدار كل من ق ، ك.



الحل

المجموعة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث الآتية:

القوة ٦٠ نيوتن ، القوة ق نيوتن ، القوة ك نيوتن بتطبيق قاعدة لامى:

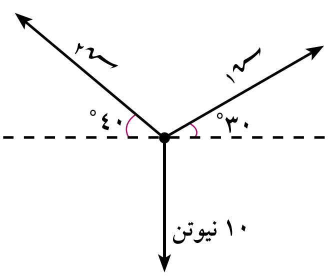
$$\frac{٦٠}{\text{جا }٩٠°} = \frac{\text{ق}}{\text{جا }١٥٠°} = \frac{\text{ك}}{\text{جا }١٢٠°}$$

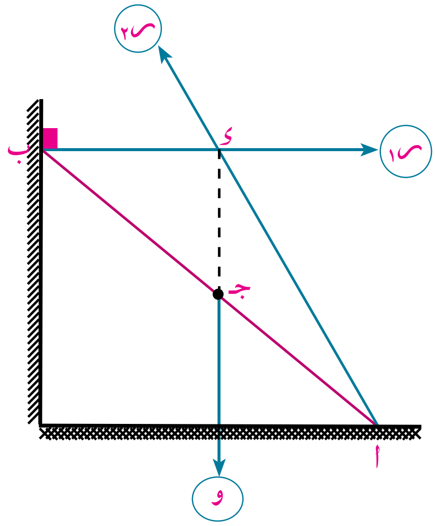
$$\frac{٦٠}{١} = ٢\text{ق} = \frac{٢\text{ك}}{\sqrt{٣}}$$

أىْ أنَّ: ق = ٣٠ نيوتن ، ك = ٣٠$\sqrt{٣}$ نيوتن

حاول أنْ تحل

④ **فى الشكل المقابل** ثقل مقداره ١٠ نيوتن معلق بخيطين يميل الأول على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ويميل الآخر على الأفقى بزاوية قياسها ٤٠°.
أوجد مقدار كل من $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢$ فى حالة الاتزان.





قاعدة:

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

مثال توضيحى: إذا اتزن قضيب منتظم السمك والكثافة وزنه (و) على حائط رأسى أملس وأرض أفقية خشنة فإن:

- مركز ثقل وزن القضيب يعمل فى منتصفه واتجاهه رأسيًّا لأسفل.
- رد فعل الحائط الرأسي (ر١) يكون عموديًّا على الحائط ويعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب ى}}$.
- رد فعل الأرض الأفقية الخشنة (ر٢) غير محدد الاتجاه ولتحديد اتجاهه نرسم $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ الذى يمر بالنقطة ى (نقطة تلاقى خطى عمل $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر١}}$) كما فى الشكل.

مثال

٤ كرة معدنية منتظمة ملساء وزنها ١,٥ ث كجم وطول نصف قطرها ٢٥سم ، ربطت من إحدى نقط سطحها ب بخيط طوله ٢٥سم ومربوط طرفه الآخر من نقطة فى حائط رأسى أملس فاتزنت الكرة وهى مستندة على الحائط. أوجد مقدار الشد فى الخيط ومقدار رد فعل الحائط.

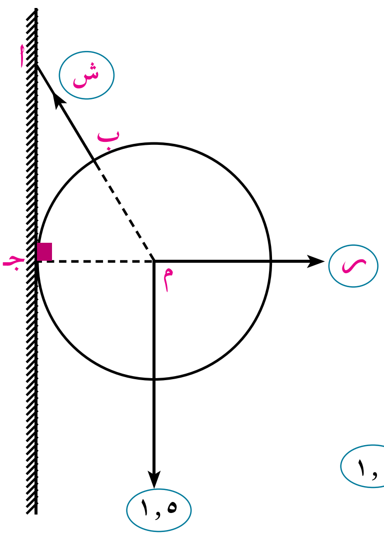
تذكر أن

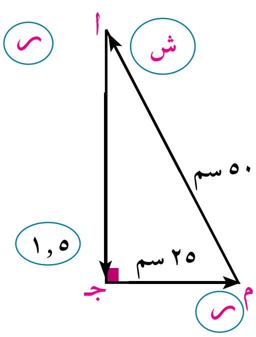
مركز ثقل الكرة المتجانسة يقع فى مركزها الهندسي.

الحل

الكرة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث:

- وزن الكرة ١,٥ ث كجم ويؤثر رأسيًّا لأسفل.
- رد فعل الحائط على الكرة (ر) ويؤثر عند نقطة تماس الكرة مع الحائط، ويعمل فى اتجاه عمودى على الحائط مارًّا بالمركز (م).
- الشد فى الخيط (ش) ويعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ويمر بالمركز (م) نقطة تلاقى قوتي وزن الكرة ورد فعل الحائط. (نظرية)





المثلث م أ جـ هو مثلث القوى، حيث

م أ = ٢٥ + ٢٥ = ٥٠سم

ومن نظرية فيثاغورث: أ جـ = $\sqrt{(٥٠)^٢ - (٢٥)^٢}$

= ٢٥$\sqrt{٣}$سم

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى:

$$\frac{\text{ش}}{٥٠} = \frac{١,٥}{٢٥\sqrt{٣}} = \frac{\text{ر}}{٢٥}$$

أىْ أنَّ: ش = $\sqrt{٣}$ث كجم ، ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ث كجم.

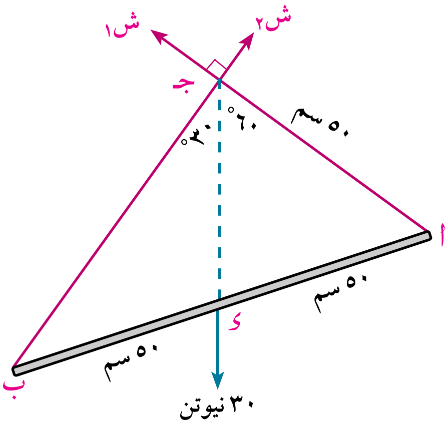
فكر: هل يمكنك حل المسألة السابقة بطرق أخرى؟ اذكر هذه الطرق ثم حل المسألة بإحدى هذه الطرق.

حاول أنْ تحل

٥ كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠٠ ث جم وطول نصف قطرها ٣٠سم معلقة من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٢٠سم، ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس. أوجد فى وضع التوازن كلًّا من الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

مثال

٥ علق قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ووزنه ٣٠ نيوتن من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما فى خُطّاف ، فإذا كان الحبلان متعامدين، وطول أحدهما ٥٠سم. فأوجد مقدار الشد فى كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقًا تعليقًا حرًّا مطلقًا وفى حالة اتزان.



الحل

القضيب متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

وزنه ٣٠ نيوتن، ويعمل رأسيًّا لأسفل ويؤثر عند منتصفه ، الشد فى الحبلين ش١ ، ش٢ ويعملان فى الاتجاهين $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ على الترتيب ويتقاطعان على التعامد عند نقطة جـ.

∵ $\overline{\text{جـ ء}}$ مرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

∴ جـ ء = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٥٠سم

∴ أ جـ ء مثلث متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ أ جـ ء) = ٦٠° ، ق(∠ ب جـ ء) = ٣٠°

بتطبيق قاعدة لامى:

$\frac{\text{ش}_1}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{\text{ش}_2}{\text{جا } 120^\circ} = \frac{30}{\text{جا } 90^\circ}$ ومنها ش١ = ١٥ نيوتن ، ش٢ = ١٥$\sqrt{3}$ نيوتن

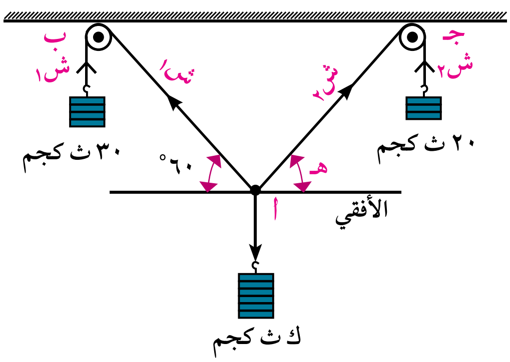
أضف إلى معلوماتك

إذا مر خيط على بكرة ملساء، وكان الخيط مشدودًا فإن الشدين على جانبى البكرة متساوى.

فكر: استخدم طرق أخرى لحل المسألة السابقة.

مثال

٦ **فى الشكل المقابل:** ثقل مقداره ك معلق فى طرف خيط وينتهى طرف الخيط بخيطين يمران على بكرتين ملساوتين عند ب ، جـ ويحملان ثقلين مقدار كل منهما ٣٠ ، ٢٠ ث جم. أوجد مقدار الثقل ك ، قياس زاوية هـ فى وضع الاتزان



الحل

فى الشكل السابق: نفرض أن ش$_1$ ، ش$_2$ هما الشدان فى الخيطين ويعملان فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

البكرتان ملساوتان لذلك فإن: ش$_1$ = ٣٠ ث كجم ، ش$_2$ = ٢٠ث كجم

الجسم الذى ثقله ك متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

وزن الجسم ك ث كجم والشد فى الخيطين ش$_1$ ، ش$_2$

بتطبيق قاعدة لامى:

$$\frac{٣٠}{\text{جا}(٩٠^\circ + \text{هـ})} = \frac{٢٠}{\text{جا}(٦٠^\circ + ٩٠^\circ)} = \frac{\text{ك}}{\text{جا}[١٨٠^\circ - (\text{هـ} + ٦٠^\circ)]}$$ وبالتبسيط

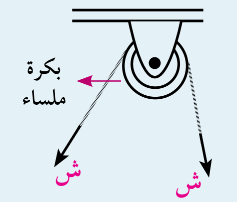
$$\frac{٣٠}{\text{جتا هـ}} = ٤٠ = \frac{\text{ك}}{\text{جا}(\text{هـ} + ٦٠^\circ)}$$

أىْ أنَّ جتا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أى أن ق$(\angle\text{هـ})$ = ٣٥″ ٢٤′ ٤١°

ك = ٤٠ × جا (٥″ ٢٤′ ٤١° + ٦٠°)

أىْ أنَّ ك ≃ ٣٩,٢١٠٧ ث كجم

لاحظ أن



الشد متساوٍ فى طرفي الخيط.

تذكر أن

جا(٩٠° + هـ) = جتا هـ

جا (١٨٠° − هـ) = جا هـ

حاول أنْ تحل

٦ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ث جم؛ حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأس تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط. أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط.

اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة

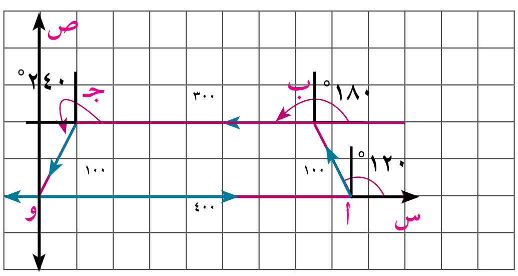
نشاط

مضلع القوى: *Polygon of forces*

باستخدام برنامج (*Geo Gebra*):

مثل القوى التى مقاديرها ٤٠٠ ، ١٠٠ ، ٣٠٠ ، ١٠٠ داين والتى تعمل بزوايا قطبية قياساتها كالآتى: ٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠° ، ٢٤٠° على الترتيب. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ ان:



- نقطة نهاية خط عمل القوة الأخيرة ينطبق على نقطة بداية خط عمل القوة الأولى فى مضلع القوى الموضح بالشكل.

أىْ أنَّه قد تكوَّن مضلع القوى المقفل و أ ب جـ.

نستنتج من هذا النشاط أنَّ:

الشرط اللازم والكافى لاتزانِ مجموعةٍ من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تُمثِّل هذه القوى بأضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى اتجاه دورى واحد.

الطريقة التحليلية لدراسة اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة.

فى النشاط السابق يمكن إيجاد المركبتين السينية والصادية لمجموعة القوى كالآتى:

س = ٤٠٠ جتا ٠° + ١٠٠ جتا ١٢٠° + ٣٠٠ جتا ١٨٠° + ١٠٠ جتا ٢٤٠°

= ٤٠٠ - ١٠٠ × $\frac{١}{٢}$ - ٣٠٠ - ١٠٠ × $\frac{١}{٢}$ = صفر

ص = ٤٠٠ جا ٠° + ١٠٠ جا ١٢٠° + ٣٠٠ جا ١٨٠° + ١٠٠ جا ٢٤٠°

= ٠ + ٥٠ $\sqrt{٣}$ + ٠ - ٥٠ $\sqrt{٣}$ = صفر

نستنتج من ذلك أنه لكى تكون مجموعة القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة متزنه يجب أن تكون:

- المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ = صفر
- المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ = صفر

أىْ أنَّ س = صفر ، ص = صفر

ويمكن التعبير عن شرط توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة كما يأتى: إذا اتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة فإن المجموع الجبرى للمركبات الجبرية لهذه القوى فى كل من اتجاهين متعامدين يساوى صفرًا.

مثال

① إذا كانت $\overleftarrow{ق}_١$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ - ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢$ = -٧ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٣$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ فأثبت أن مجموعة القوى $\overleftarrow{ق}_١$ ، $\overleftarrow{ق}_٢$ ، $\overleftarrow{ق}_٣$ متوازنة.

الحل

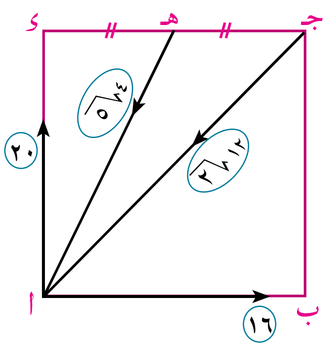
∵ $\overleftarrow{ع}$ = $\overleftarrow{ق}_١$ + $\overleftarrow{ق}_٢$ + $\overleftarrow{ق}_٣$

∴ $\overleftarrow{ع}$ = (٥ - ٧ + ٢) $\overleftarrow{س}$ + (-٣ + ٢ + ١) $\overleftarrow{ص}$ = $\overleftarrow{٠}$ أىْ أنَّ مجموعة القوى متزنة.

حاول أنْ تحل

⑦ إذا كانت القوى $\overleftarrow{ق}_١$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ - ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢$ = -أ $\overleftarrow{س}$ - ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٣$ = -٦ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ متلاقية فى نقطة ومتزنة فأوجد قيمة كل من أ ، ب.

مثال



② **الشكل المقابل:** يمثل القوى ١٦ ، ٢٠ ، ١٢ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٥}$ نيوتن ،والتى توثر فى المربع أ ب جـ ء فى الاتجاهات $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ على الترتيب حيث هـ منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$. أثبت أنَّ مجموعة القوى متزنة.

الحل

من الشكل المقابل نجد أن القوى ١٦ ، ٢٠ ، ١٢ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٥}$ نيوتن

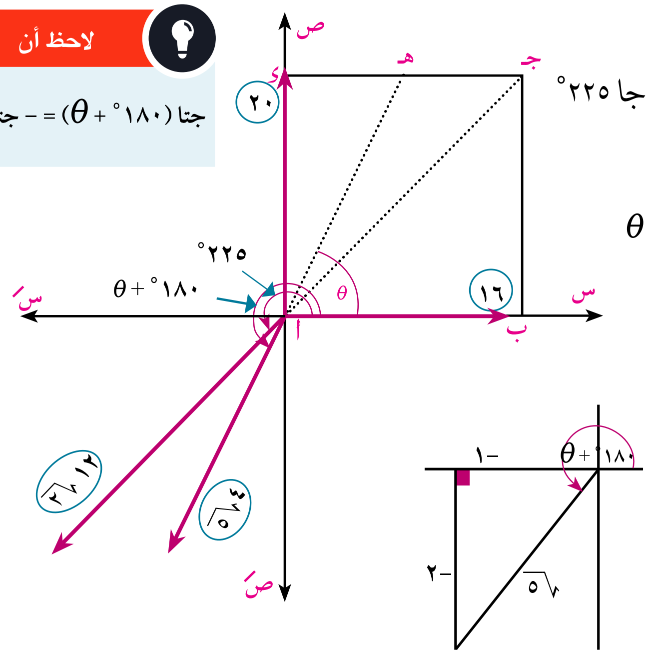
زواياها القطبية هي: ٠° ، ٩٠° ، ٢٢٥° ، (١٨٠° + θ)

∴ س = ١٦ جتا ٠° + ٢٠ جتا ٩٠°

+ ١٢$\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ٤$\sqrt{٥}$ جتا (١٨٠° + θ)

= ١٦ + ٠ - ١٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - ٤$\sqrt{٥}$ × جتا θ

= ١٦ - ١٢ - ٤$\sqrt{٥}$ × $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ = صفر



لاحظ أن

جتا (١٨٠° + θ) = - جتا θ

ص = ١٦ جا ٠° + ٢٠ جا ٩٠° + ١٢$\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥°

+ ٤$\sqrt{٥}$ جا (١٨٠° + θ)

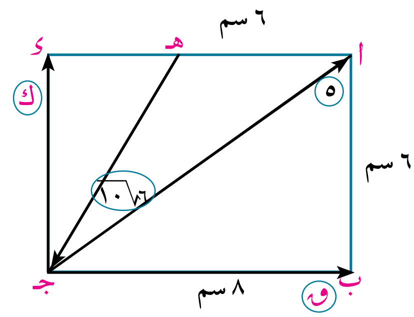
= ٠ + ٢٠ - ١٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - ٤$\sqrt{٥}$ جا θ

= ٢٠ - ١٢ - ٤$\sqrt{٥}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ = صفر

س = صفر ، ص = صفر

∴ المجموعة متزنة.

٩ حاول أنْ تحل



(٨) **الشكل المقابل:** يمثل القوى التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦$\sqrt{١٠}$ نيوتن والمتزنة، والتى تؤثر فى المستطيل أ ب جـ ى فى الاتجاهات جـ ب ، جـ أ ، جـ ى، هـ جـ حيث أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، أ هـ = ٦سم. أوجد قيمة ق ، ك.

تمارين (١ - ٤)

أكمل مايأتى:

(١) الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هندسيًّا بـ ....

(٢) شرط اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة هى أن تكون .... ، ....

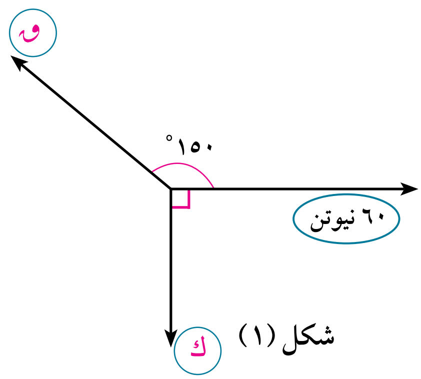
(٣) إذا كانت ق$_١$ = ٤ س + ب ص ، ق$_٢$ = -٧ س - ٢ ص ، ق$_٣$ = أ س - ٣ ص متزنة فإن:

أ = ... ، ب = ...

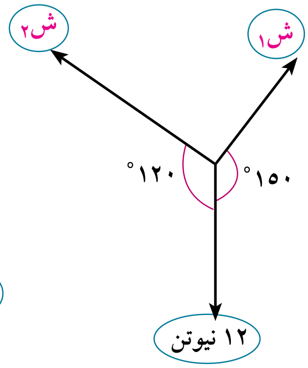
(٤) إذا كانت القوة التى مقدارها ق متزنة مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن فإن مقدار ق = ...

(٥) إذا مُثلت ثلاث قوى مستوية ومتزنة ومأخوذة فى اتجاه دورى واحد بأضلاع مثلث فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع ....

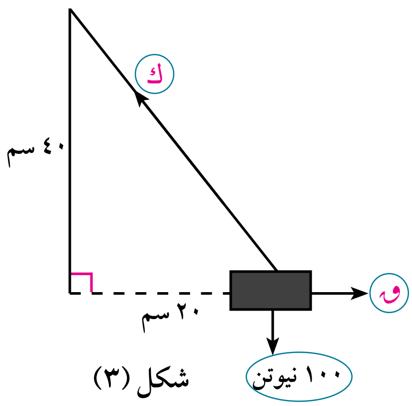
٦ يمثل كل شكل من الأشكال الآتية مجموعة من القوى المستوية المتزنة والمتلاقية فى نقطة. أوجد القيمة المجهولة سواء كانت قوة أو قياس زاوية:



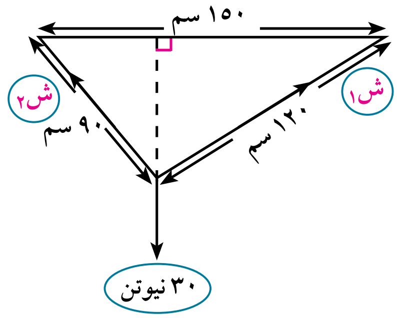
شكل (١)



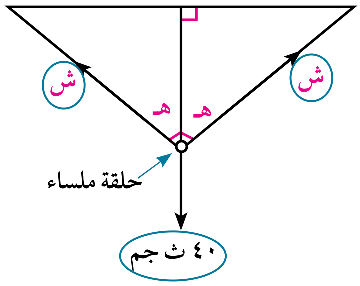
شكل (٢)



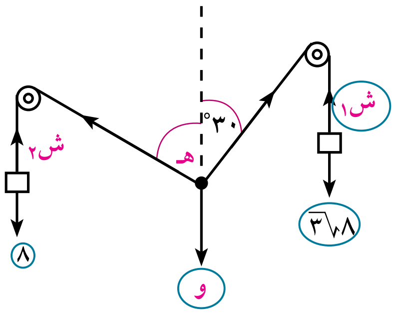
شكل (٣)



شكل (٤)



شكل (٥)



شكل (٦)

٧ أ ب سلم منتظم وزنه ١٢ ث كجم يرتكز بطرفه العلوى أ على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة بحيث كان الطرف العلوى للسلم يبعد عن الأرض ٤ متر والطرف السفلى يبعد عن الحائط مسافة ٣متر. أوجد في وضع الاتزان الضغط على كل من الحائط والأرض .

٨ أ ب قضيب منتظم طوله ٦٠سم وزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب ، وبنقطة جـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠سم أوجد كلاً من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عن أ.

٩ كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد البعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة ٦٠ نيوتن.

١٠ أ ب قضيب منتظم وزنه و ث كجم يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى . أثرت قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ على القضيب عند ب فأتزن القضيب وهو يميل على الرأس بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ ورد فعل المفصل.

(١١) علق ثقل مقدار وزنه ٦٠ ث جم من أحد طرفي خيط طوله ٢٨سم، مثبت طرفه الآخر في نقطة في سقف حجرة، أثرت على الجسم قوة فاتزن الجسم وهو على بعد ١٤سم رأسيًّا أسفل السقف ، فإذا كانت القوة في وضع الاتزان عمودية على الخيط فأوجد مقدار كل من القوة والشد في الخيط.

(١٢) علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث جم بخيطين طولاهما ٦٠سم ، ٨٠سم من نقطتين على خط أفقي واحد البعد بينهما ١٠٠سم. أوجد مقدار الشد في كل من الخيطين.

(١٣) علق جسيم وزنه ٢٠٠ ث جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسي بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠° ، فإذا كان مقدار الشد في الخيط الأول يساوي ١٠٠ ث جم. فأوجد هـ ومقدار الشد في الخيط الثاني.

(١٤) وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم في حالة توازن بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

(١٥) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى.

(١٦) كرة معدنية ملساء وزنها ٣ نيوتن مستقرة بين حائط رأسي أملس ومستوى أملس يميل على الحائط الرأسي بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد الضغط على كل من الحائط الرأسي والمستوى المائل.

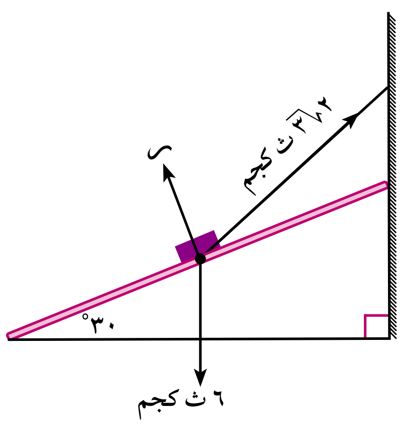
(١٧) علق قضيب منتظم طوله ٥٠سم ووزنه ٢٠ نيوتن من طرفيه بواسطة خيطين ثبت طرفاهما في نقطة واحدة. فإذا كان طولا الخيطين ٣٠سم ، ٤٠سم على الترتيب فأوجد الشد في كل من الخيطين.

(١٨) خمس قوى مستوية مقاديرها ق ، ٦ ، ٤√٢ ، ٥√٢ ، ك ث كجم متزنة وتؤثر في نقطة مادية في اتجاهات الشرق والشمال والشمال الغربي والجنوب الغربي والجنوب على الترتيب. أوجد مقدار كل من ق ، ك.

(١٩) أثرت القوى المستوية ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث كجم في نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠°. أوجد مقدار كل من ق ، ك حتى تكون المجموعة في حالة اتزان.

تفكير إبداعي:

(٢٠) في **الشكل المقابل** جسم وزنه ٦ ث كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠ وحفظ توازنه بواسطة قوة شد ش مقدارها ٢√٣ ث كجم تعمل في خيط مثبت أحد طرفيه بالجسم والآخر في حائط رأسي. أوجد قياس الزاوية التي يصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد فعل المستوى على الجسم.



ملخص الوحدة

وحدات القياس فى النظام الدولى للوحدات (SI)

الكمية الأساسية	الطول	الكتلة	الزمن
الوحدة الأساسية	المتر (م)	الكيلو جرام (كجم)	الثانية (ث)

الكميات المشتقة :

الوحدة	السرعة (ع)	العجلة (جـ)	القوة (ق)
العلاقة بالوحدة الأساسية	$ع = \frac{ف}{ن}$	$جـ = \frac{ع}{ن}$	$ق = ك \times جـ$
القياس	م/ث	م/ث٢	نيوتن

بعض التحويلات للكميات المشتقة :

- ١ كم/س $= \frac{٥}{١٨}$ م/ث ، ١ كم/س $= \frac{٢٥٠}{٩}$ سم /ث ، م/ث $= \frac{١٨}{٥}$ كم/س ، سم/ث $= \frac{٩}{٢٥٠}$ كم/س
- النيوتن $= ١٠^{٥}$ داين ، الداين $= ١٠^{-٥}$ نيوتن ، ١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن، ١ ث جم = ٩٨٠ داين.

الإستاتيكا: هى علم دراسة سكون الأجسام تحت تأثير مجموعة من القوى.

الجسم الجاسئ: هو الجسم الذى يحتفظ بشكله دون تشوه إذا وقع تحت تأثير عوامل خارجية .

القوة: تعرف القوة بأنها تأثير أحد الأجسام على جسم آخر.

خواص القوة: يتحدد تأثير القوة على الجسم بالعوامل الآتية:

١- المقدار. ٢- الاتجاه. ٣- نقطة التأثير.

- إذا كانت $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ قوتان يحصران بينهما زاوية قياسها ى وكانت محصلتها $\overleftarrow{ع}$ وتميل على $\overleftarrow{ق_{١}}$ بزاوية قياسها هـ فإن: $ع = \sqrt{ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢\, ق_{١}\, ق_{٢}\, جتا\, ى}$ ، $ظا\, هـ = \frac{ق_{٢}\, جا\, ى}{ق_{١} + ق_{٢}\, جتا\, ى}$

  أو باستخدام قاعدة الجيب: $\frac{ق_{١}}{جا\, هـ_{١}} = \frac{ق_{٢}}{جا\, هـ_{٢}} = \frac{ع}{جا\, ى}$

- القيمة العظمى لمحصلة القوتين $ق_{١}$ ، $ق_{٢} = ق_{١} + ق_{٢}$ وتعمل فى نفس اتجاهيهما.
- القيمة الصغرى لمحصلة القوتين $ق_{١}$ ، $ق_{٢} = |ق_{١} - ق_{٢}|$ وتعمل فى اتجاه القوة الكبرى.
- إذا كانت $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ مركبتى القوة $\overleftarrow{ع}$ ، يصنعان مع $\overleftarrow{ع}$ زاويتين $هـ_{١}$ ، $هـ_{٢}$ على الترتيب فإن:

$$\frac{ق_{١}}{جا\, هـ_{٢}} = \frac{ق_{٢}}{جا\, هـ_{١}} = \frac{ع}{جا\, (هـ_{١} + هـ_{٢})}$$

- إذا كانت $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ مركبتى القوة $\overleftarrow{ع}$ المتعامدتين والتى تميل فيها خط عمل $\overleftarrow{ع}$ مع خط عمل $\overleftarrow{ق_{١}}$ بزاوية قياسها هـ فإن $ق_{١} = ع\, جتا\, هـ$ ، $ق_{٢} = ع\, جا\, هـ$

- مضلع القوى: إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة تمثيلًا بأطوال أضلاع مضلع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن مقدار محصلة هذه القوى تساوي طول الضلع الذى يقفل هذا المضلع فى الاتجاه الدورى المضاد.
- إذا أثرت عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة (فى نظام إحداثى متعامد) وكان المجموع الجبرى لمركبات هذه القوى فى اتجاهين متعامدين هما س ، ص فإن: $ع = \sqrt{س^{2} + ص^{2}}$ ، $ظا هـ = \frac{ص}{س}$ حيث هـ هى قياس زاوية ميل المحصلة مع س.
- إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية تمثيلًا تامًّا بأطوال مضلع قوى مقفل كانت هذه المجموعة متزنة.
- تكون مجموعة القوى المستوية المتلاقية فى نقطة متزنة إذا كان:
  ١) المجموع الجبرى لمركبات القوي فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ = صفر .
  ٢) والمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ = صفر.
- اتزان جسم تحت تأثير قوتين: هو أن تكون القوتان: متساويتين فى المقدار ، متضادتين فى الاتجاه ، خطا عملها على استقامة واحدة.
- نقل نقطة تأثير القوة: إذا أثرت قوة على جسم جاسئ فإنه يمكن نقل نقطة تأثيرها إلى أى موضع من الجسم على خط العمل دون أن يؤدى ذلك إلى تغيير تأثيرها على الجسم.
- اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى: إذا أمكن تمثيل قوى متلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.
- قاعدة مثلث القوى: إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة، ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل هذه القوى وفى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.
- قاعدة لامى: إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.
- إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية تمثيلًا تامًّا بأطوال مضلع قوى مقفل كانت هذه المجموعة متزنة.

اختبار تراكمى

أسئلة ذات إجابات قصيرة:

(١) اكمل مايأتى:

أ الكمية القياسية يلزم لتعريفها تعريفًا تامًّا معرفة ....

ب الكمية المتجهة يلزم لتعريفها تعريفًا تامًّا معرفة . ... ، ....

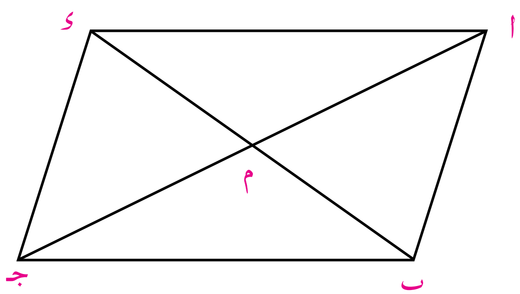
جـ القطعة المستقيمة الموجهة هى قطعة مستقيمة لها .... ، .... ، ....

د تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما ....

هـ الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{م}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ هى ....

و المتجه الذى يعبر عن قوة مقدارها ٢٠ ث كجم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق يكتب على الصورة الإحداثية كالآتى ....

(٢) فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء متوازى أضلاع م نقطة تلاقى قطريه. أكمل:



أ $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{ب جـ}$ = ...

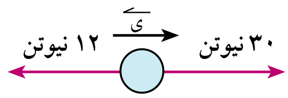
ب $\overrightarrow{أء}$ + $\overrightarrow{ء جـ}$ = ...

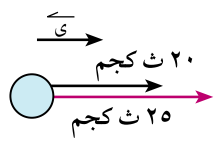
جـ $\overrightarrow{أم}$ + $\overrightarrow{جـ م}$ = ...

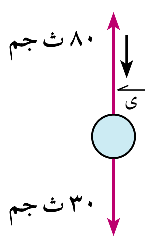
د $\overrightarrow{أب}$ + ٢ $\overrightarrow{ب م}$ = ...

هـ $\overrightarrow{أب}$ - $\overrightarrow{أم}$ = ...

(٣) اكتب بدلالة متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ محصلة القوى الموضحة بكل شكل:







(٤) فى كل ممايأتى القوتان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ تؤثران فى نقطة مادية، وضح مقدار واتجاه محصلة كل قوتين منها.

أ $ق_١$ = ١٥ نيوتن فى اتجاه الشرق ، $ق_٢$ = ٤٠ نيوتن فى اتجاه الغرب.

ب $ق_١$ = ٣٤ ث جم فى اتجاه الشمال الشرقى ، $ق_٢$ = ٣٤ ث جم فى اتجاه الجنوب الغربى.

(ج) $ق_1$ = ٥٠ داين تعمل فى اتجاه غرب الشمال، $ق_2$ = ٥٠ داين تعمل فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق .

(د) $ق_1$ = ٣٠ نيوتن تعمل فى اتجاه ٢٠° شرق الشمال، $ق_2$ = ٣٠ نيوتن تعمل فى اتجاه ٧٠° شمال الشرق .

(٥) $\overleftarrow{ق_1}$ = ٧ $\overleftarrow{س}$ - ٥ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = -٤ $\overleftarrow{س}$ + (ب - ٣) $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت:

(أ) محصلة مجموعة القوى تساوى ٤ $\overleftarrow{س}$ - ٧ $\overleftarrow{ص}$ (ب) مجموعة القوى متزنة

أسئلة ذات إجابات طويلة

(٦) قوتان مقدارهما ٨$\sqrt{٣}$ ، ٨ نيوتن توثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠°. أوجد مقدار محصلتهما وقياس الزاوية التى تصنعها مع القوة الأولى.

(٧) قوتان مقدارهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن. أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(٨) قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° أوجد ق عندما:

(أ) مقدار المحصلة يساوى ق. (ب) اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية.

(ج) المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

(٩) حَلِّل قوة مقدارها ٦٠ إلى قوتين متساويتين فى المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيهما ٦٠°.

(١٠) أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين، لوزن جسم موضوع على مستوى أفقي ومقداره ٨٠ نيوتن إذا عُلِمَ أنَّ إحداهما تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أسفل.

(١١) ثلاث قوى مقاديرها ٢ق ، ٤ق ، ٦ق نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد، أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

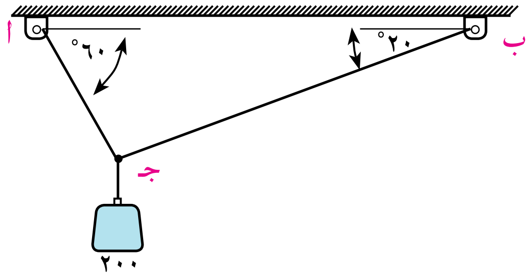
(١٢) أ ب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٦سم ، و $\in$ $\overline{جـ ى}$ بحيث و ى = ٦سم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢٠، ١٣$\sqrt{٣}$ ، ٢ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ ، $\overleftarrow{أ ى}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(١٣) علق ثقل مقداره ٨٠ ث جم فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة، وكذلك الشد فى الخيط.

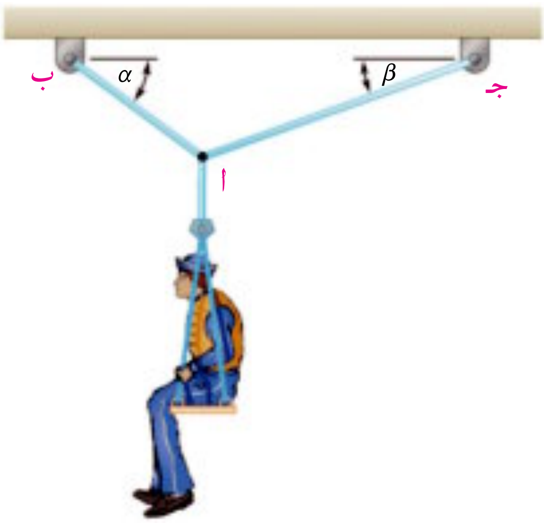
(١٤) وضع ثقل قدره ٢٠ ث كجم على مستو مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ى، حيث جتا ى = $\frac{٤}{٥}$ ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية مقدارها (ق) أوجد ق وكذلك رد فعل المستوى.

(١٥) قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠°، ٣٠°. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى فى وضع الاتزان، وإذا كان مقدار وزن القضيب يساوى ٢٤ نيوتن. عين مقدار رد الفعل لكل من المستويين.

(١٦) الشكل المقابل يبين ثقل مقداره ٢٠٠ نيوتن معلق رأسيًّا من نقطة جـ ومثبت بواسطة حبلين $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{ا جـ}}$ يصنعان مع الأفقى زاويتين قياسيهما ٢٠°، ٦٠°. فإذا كانت المجموعة متزنة، أوجد الشد فى كل من الحبلين لأقرب نيوتن.



(١٧) الربط بالملاحة البحرية: يجرى إنقاذ بحار باستخدام كرسى القبطان وذلك بتعليقه فى بكرة يمر عليها حبلان $\overline{\text{ا ب}}$، $\overline{\text{ا جـ}}$ كما فى الشكل المجاور فإذا كان قياسا زاويتى α ، β مع الأفقى ٢٥°، ١٥° على الترتيب وكان الشد فى الخيط $\overline{\text{ا ب}}$ يساوى ٨٠ نيوتن. فأوجد وزنى البحار والكرسى معًا، وكذلك الشد فى الخيط $\overline{\text{ا جـ}}$ فى وضع الاتزان.



إن لم تستطع الإجابة على هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول التالى:

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧
ارجع إلى	المتجهات ت	المتجهات ت	المتجهات ت	المتجهات ت	المتجهات ت	الدرس (١) ت٢	الدرس (١) ت٢	الدرس (١) ت٢	الدرس (٢) ت٢	الدرس (٢) ت٢	الدرس (٣) ت٢	الدرس (٣) ت٢	الدرس (٤) ت٢	الدرس (٤) ت٢	الدرس (٤) ت٢	الدرس (٤) ت٢	الدرس (٤) ت٢

الوحدة الثانية

الديناميكا
Dynamics

مقدمة الوحدة

مخرجات التعلم

المصطلحات الأساسية

الأدوات والوسائل

دروس الوحدة

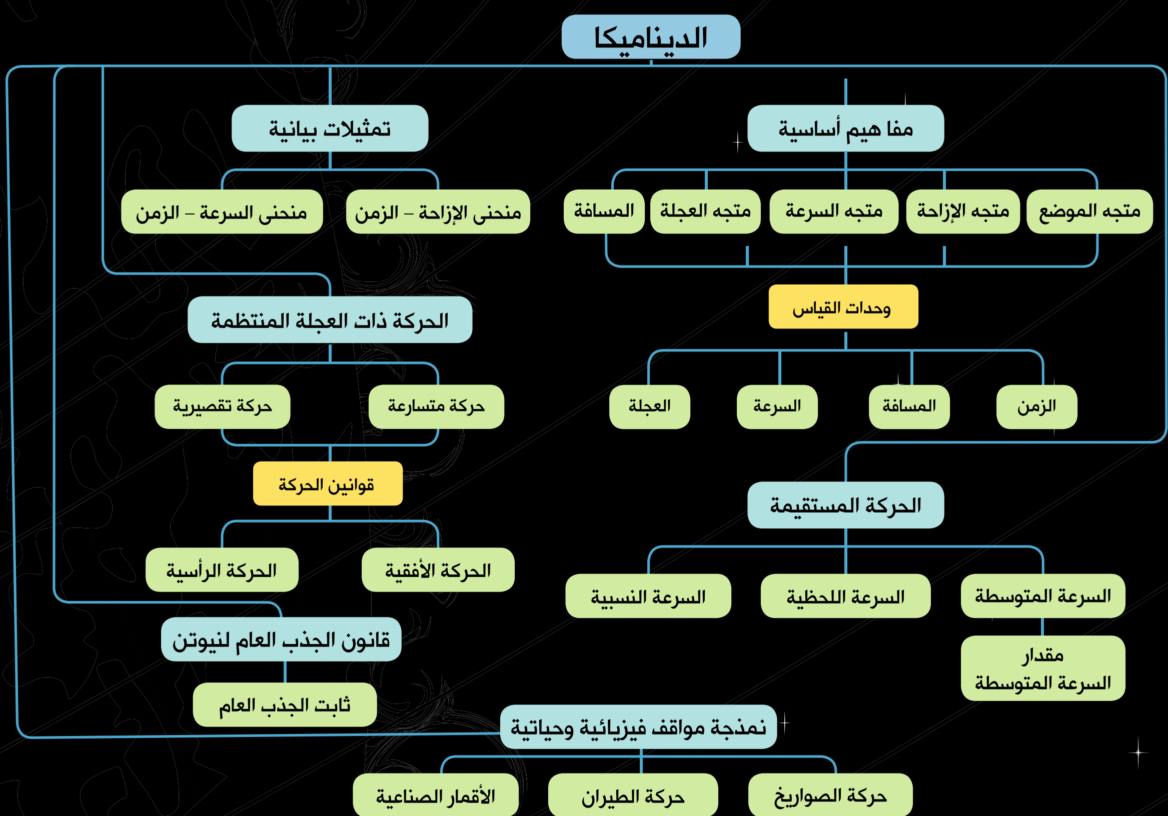
الدرس (٢ – ١):

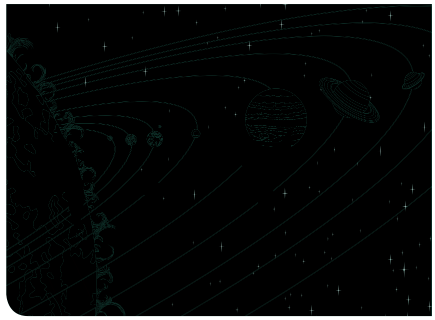
الدرس (٢ – ٢):

الدرس (٢ – ٣):

الدرس (٢ – ٤):

مخطط تنظيمي للوحدة





الحركة المستقيمة
Rectilinear motion

سوف تتعلم
- العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة.
- السرعة المتوسطة.
- السرعة اللحظية.
- السرعة النسبية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- حركة مستقيمة Rectilinear Motion
- نظام مترى IS
- متجه إزاحة Displacement Vector
- متجه موضع Position Vector
- متجه سرعة Velocity Vector
- حركة منتظمة. Uniform motion
- سرعة متوسطة Average Velocity
- سرعة لحظية Instantaneous Velocity
- السرعة النسبية Relative Velocity

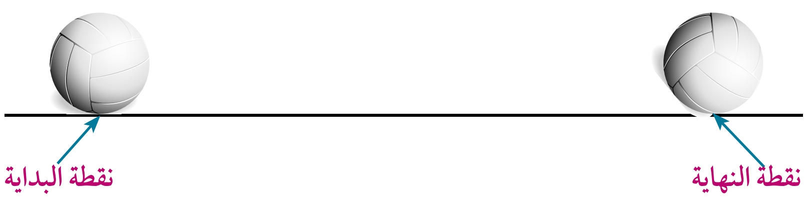
الأدوات والوسائل
- ورق مربعات.
- آلة حاسبة علمية .
- برامج رسومية للحاسوب.

تقديم:
سبق أن تعرفت على بعض أنظمة القياس إلى أن تم اعتماد النظام العشرى الذي ابتكره الفرنسيون عام ١٧٩٠م ، واستمر حتى جاء النظام العالمي الموحد SI وهو مشتق من الكلمة International System Of Units و يتشكل هذا النظام من الكميات الأساسية فى علم الميكانيكا (الكتلة ، الطول ، الزمن)، وكذلك من الوحدات المشتقة التى تتشكل كحاصل ضرب قوى الوحدات الأساسية وفقًا لبعض العلاقات الجبرية (كالسرعة ، العجلة ، القوة).

الحركة Motion

السكون والحركة :
عندما يغير جسم ما موقعه بالنسبة لجسم آخر بمرور الزمن فإنه يقال إن الجسم الأول فى حالة حركة بالنسبة للجسم الثانى، أما إذا كان موقع الجسمين النسبى لايتغير بمرور الزمن فإن كلًّا منهما يكون فى حالة سكون بالنسبة للآخر.
فالسكون أو الحركة مفهومان نسبيان، فالأشجار والمنازل ساكنة ولكنها تبدو فى حالة حركة بالنسبة لقطار يتحرك بسرعة ما.

الحركة وأنواعها Motion and its Types
هناك أنواع عديدة للحركة كالحركة الانتقالية، والدورانية، والاهتزازية، فمثلًا: كرة القدم المقذوفة تنتقل من موضع إلى موضع آخر، وقد تدور حول نفسها فهى إذن تتحرك حركة انتقالية وأخرى دورانية فى الوقت نفسه، بينما نجد أن قطرات الماء المتساقط تتحرك حركة انتقالية وفى الوقت نفسه تكون فى حالة حركة اهتزازية وسوف نقوم بدراسة الحركة الانتقالية بصورة منفردة، ويتم ذلك بافتراض حركة جسم متناهٍ فى الصغر يسمى الجسيم، ويعامل الجسيم كنقطة هندسية من دون أبعاد تماشيًا للتعقيدات النظرية الناتجة عن الحركة الدورانية أو الاهتزازية والتى سنسجلها فى هذه الدراسة .



الحركة الانتقالية *Translational Motion*

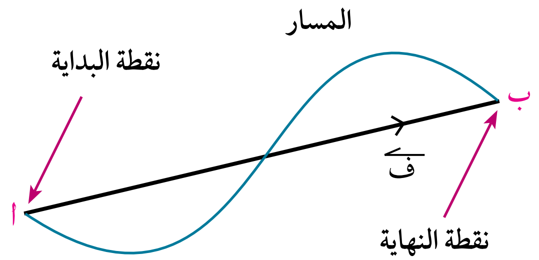
الحركة الانتقالية يتحرك فيها الجسم بين نقطتين، تسمى الأولى نقطة البداية والثانية نقطة النهاية ومن أمثلتها حركة جسم فى خط مستقيم.

المسافة *Distance*

إذا تحرك قطار من مدينة القاهرة إلى مدينة المنصورة، فإنه سوف يقطع مسافة قدرها ١٢٦ كم، وتعتبر المسافة كمية قياسية إذ يجب معرفة مقدارها فقط، فإذا كان مقدار المسافة بين المدينتين ١٢٦ كم فإن الرقم ١٢٦ يمثل القيمة العددية ، (كم) هى وحدة قياس المسافة.

متجه الإزاحة *Displacement vector*

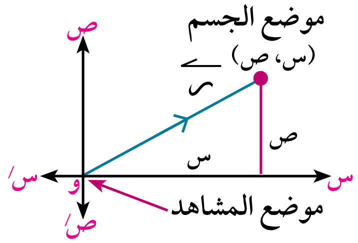
هو المتجه الذى تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ التى نقطة بدايتها (أ) ونقطة نهايتها (ب) ويرمز لمتجه الإزاحة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بالرمز $\overleftarrow{\text{ف}}$ ، ويرمز لمعيار متجه الإزاحة بالرمز $\|\overleftarrow{\text{أ ب}}\|$ وهو لا يساوى بالضرورة طول المسار الذى قطعه الجسيم فى أثناء الحركة.



متجه الموضع *Position vector*

هو المتجه الذى تنطبق نقطة بدايته مع موضع المشاهد (و) ونقطة نهايته مع موضع الجسيم، ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{ر}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ر}} = \text{س}\ \overleftarrow{\text{س}} + \text{ص}\ \overleftarrow{\text{ص}}$

$\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدين .

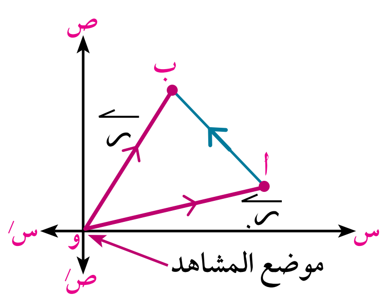


العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة:

Relation between position vector and displacement vector

إذا كانت (و) هى موضع المشاهد، أ$(\text{س}_1، \text{ص}_1)$ ، ب $(\text{س}_2، \text{ص}_2)$ هما موضعا الجسيم عند لحظتين متتاليتين فإن $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ هو متجه الإزاحة للجسيم وليكن $\overleftarrow{\text{ف}}$.

فإذا رمزنا لمتجه الموضع عند اللحظة ن بالرمز $\overleftarrow{\text{ر}}$. ، متجه الموضع عند اللحظة (ن + هـ) بالرمز $\overleftarrow{\text{ر}}$ فإن: $\boxed{\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ر}} - \overleftarrow{\text{ر}}.}$



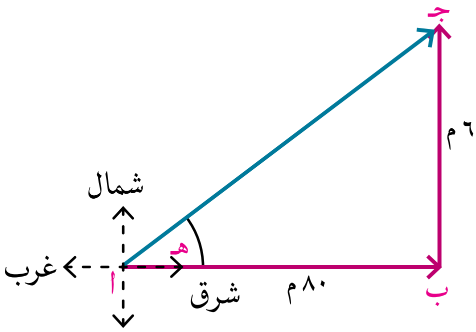
$$\overleftarrow{\text{ف}} = (\text{س}_2\ \overleftarrow{\text{س}} + \text{ص}_2\ \overleftarrow{\text{ص}}) - (\text{س}_1\ \overleftarrow{\text{س}} + \text{ص}_1\ \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= (\text{س}_2 - \text{س}_1)\ \overleftarrow{\text{س}} + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)\ \overleftarrow{\text{ص}} \quad ، \quad \|\overleftarrow{\text{ف}}\| = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ف}} = \|\overleftarrow{\text{ف}}\|\ \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ف}}$ (اتجاه الحركة)

مثال

① تحرك عدّاء ٨٠ مترًا شرقًا، ثم تحرك بعد ذلك ٦٠ مترًا شمالاً . احسب المسافة والإزاحة التى قطعها العداء . ماذا تلاحظ ؟



الحل

المسافة الكلية التى قطعها العداء هو مجموع المسافتين من أ إلى ب ثم من ب إلى جـ.

المسافة = أ ب + ب جـ = ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠ م

الإزاحة ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

من فيثاغورث :

أ جـ = $\sqrt{(٨٠)^٢ + (٦٠)^٢}$ = $\sqrt{١٠٠٠٠}$ = ١٠٠ ، طا هـ = $\frac{٦٠}{٨٠}$ ومنها هـ = ١٢ ″٥٢ ′٣٦°

أى أن مقدار الإزاحة = ١٠٠ م وتعمل فى اتجاه ١٢ ″٥٢ ′٣٦° شمال الشرق.

نلاحظ أن:

- المسافة المقطوعة كمية قياسية (تتحدد بمعلومية مقدارها فقط) بينما الإزاحة كمية متجهة (تتحدد بمعلومية المقدار والاتجاه).
- معيار متجه الإزاحة ≥ المسافة المقطوعة.

حاول أنْ تحل

① تحرك راكب دراجة ٦ كم غربًا، ثم تحرك بعد ذلك ٨ كم بزاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب ، احسب المسافة و الإزاحة التي قطعها راكب الدراجة

② تفكير ناقد: عندما تصعد نملة جدارًا ارتفاعه ٣ أمتار، ثم تعود إلى نفس نقطة البداية، أوجد المسافة المقطوعة والإزاحة المقطوعة.

مثال

② يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه $\overleftarrow{ر}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ بالعلاقة: $\overleftarrow{ر}$ (ن) = (٣ن + ٢) $\overleftarrow{س}$ + (٤ن - ١) $\overleftarrow{ص}$ أوجد معيار متجه الإزاحة حتى اللحظة ن = ٤

الحل

$\overleftarrow{ر}$ (٠) = ٢ $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ر}$ (٤) = (٣ × ٤ + ٢) $\overleftarrow{س}$ + (٤ × ٤ - ١) $\overleftarrow{ص}$ = ١٤ $\overleftarrow{س}$ + ١٥ $\overleftarrow{ص}$

∴ $\overleftarrow{ف}$ = $\overleftarrow{ر}$ (٤) - $\overleftarrow{ر}$ (٠)

= (١٤ - ٢) $\overleftarrow{س}$ + (١٥ + ١) $\overleftarrow{ص}$ = ١٢ $\overleftarrow{س}$ + ١٦ $\overleftarrow{ص}$

، || $\overleftarrow{ف}$ || = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥٦}$ ، ف = ٢٠ وحدة طول

حاول أنْ تحل

(٣) فى المثال السابق : أوجد معيار متجه الإزاحة من ن = ١ إلى ن = ٣.

نشاط

منحنى (المسافة – الزمن):

الجدول التالى يبين العلاقة بين الزمن بالثوانى والمسافة بالأمتار لعدَّاء

الزمن بالثانية	صفر	٢	٤	٦	٨	١٠
المسافة بالمتر	صفر	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠

١ فى ورقة الرسم البيانى حدد الزمن على محور السينات والمسافة على محور الصادات .

٢ مَثِّل بيانيًّا مواقع إحداثيات النقاط المبينة فى الجدول.

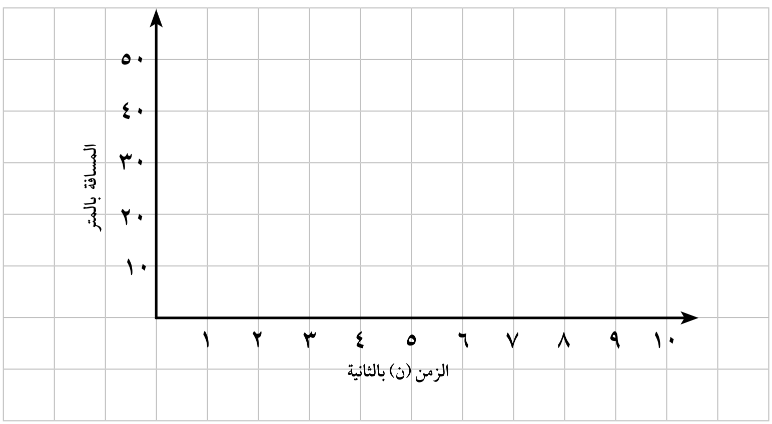
٣ استخدم المسطرة فى رسم أفضل خط مستقيم يمر بأغلب النقاط الموقعة فى الرسم.

٤ باستخدام الخط البياني الذي يبين العلاقة بين المسافة والزمن فى الأزمنة المبينة بالجدول، هل يمكنك إيجاد كل من :

أ المسافة التى قطعها العداء بعد مضى ٣ ثوانٍ؟

ب الزمن الذى يستغرقه العداء فى قطع مسافة ٤٥ مترًا؟

٥ هل يمكنك إيجاد ميل الخط البياني المبين لنوع حركة العداء؟ وضح ذلك.



السرعة *Speed*

إذا تسابق عداءان فى فترة زمنية محددة فإن العداء الذى يقطع مسافة أطول يكون أسرع من العداء الذى يقطع مسافة أقل، ويمكن قياس السرعة بالمسافة المقطوعة خلال فترة زمنية محددة دون تحديد اتجاه حركتها ؛ فالعداد الموجود أمام سائق السيارة يحدد مقدار سرعة السيارة فقط دون تحديد اتجاه مسار هذه السيارة .

تذكر أن

١ كم / س = $\frac{٥}{١٨}$ م / ث

١م / ث = $\frac{١٨}{٥}$ كم / س

٩ حاول أنْ تحل

٤ أ حول ٩٠ كم / س إلى م / ث ب حول ١٥م / ث إلى كم / س

٥ أكمل الجدول الآتي:

١٨ كم / س	٥٤ كم / س	.... كم / س	٩٠ كم / س	... كم / س	١٨٠ كم / س
٥ م / ث	...م / ث	٢٠م / ث	...م / ث	٣٠م / ث	...م / ث

$\times \frac{5}{18}$ $\times \frac{18}{5}$

متجه السرعة *Velocity vector*

متجه سرعة جسيم هو المتجه الذى معياره يساوى السرعة و ينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة.

تعبير شفهى:

١- قارن بين السرعة ، متجه السرعة من حيث :

أ التعريف. ب نوع الكمية (قياسية أو متجهة) .

الحركة المنتظمة: والحركة المتغيرة *Uniform motion and variable motion*

الحركة المنتظمة: هى الحالة التى يكون فيها كل من معيار واتجاه متجه السرعة ثابتًا
وهنا نورد ملاحظتين هامتين على الحركة المنتظمة.

١ - **ثبات اتجاه متجه السرعة** : وهذا يعنى ان الجسم يتحرك فى اتجاه ثابت.

٢ - **ثبات معيار متجه السرعة** : وهذا يعنى ان الجسم يقطع في اتجاه حركته مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية.

الحركة المتغيرة: إذا لم تكن الحركة منتظمة فإننا نسميها متغيرة. والحركة المتغيرة يتغير فيها متجه سرعة الجسم فى المقدار أو الاتجاه أو كليهما من لحظة إلى أخرى.

السرعة المتوسطة *average speed*

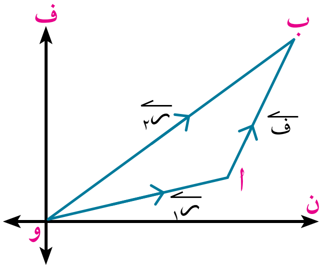
إذا قامت سيارة برحلة من مدينة القاهرة إلى مدينة الغردقة فإن المسافة بين المدينتين طبقًا لمسار السيارة يبلغ ٥١٠ كم، فإذا كانت السيارة تتحرك بسرعات متفاوتة بين المدينتين، وكان الزمن الكلى لتلك الرحلة ٦ ساعات فإنه لحساب السرعة المتوسطة للسيارة خلال هذه الرحلة نجد أن:

$$\text{السرعة المتوسطة } ع_م = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٥١٠}{٦} = ٨٥ \text{ كم / س}$$

وعليه فإن :

السرعة المتوسطة هى المسافة الكلية المقطوعة خلال الرحلة ، مقسومًا على الزمن الكلي الذي استغرقته الرحلة.

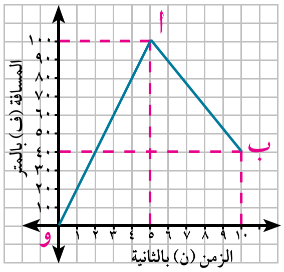
متجه السرعة المتوسطة *Vector of the average velocity*



إذا تحرك جسيم وتواجد عند لحظتين زمنيتين $ن_١$ ، $ن_٢$ عند الموضعين أ ، ب على الترتيب وكان $\overleftarrow{ف}$ هو متجه الإزاحة فى الفترة الزمنية $(ن_٢ - ن_١)$ فإن $\overleftarrow{ع}_م$ يعرف بمتجه السرعة المتوسطة لهذا الجسيم خلال تلك الفترة الزمنية و يكون:

$$\overleftarrow{ع}_م = \frac{\overleftarrow{ر}_٢ - \overleftarrow{ر}_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{\overleftarrow{ف}}{ن_٢ - ن_١}$$

مثال



٣ يبين الشكل المقابل العلاقة بين المسافة والزمن لحركة راكب دراجة ، فى خط مستقيم من نقطة (و) أوجد:

أ متجه السرعة المتوسطة. ب السرعة المتوسطة.

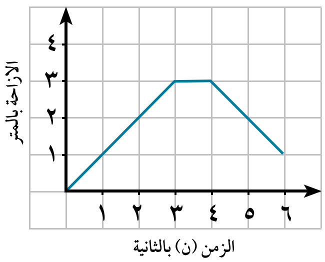
الحل

نوجد متجه السرعة المتوسطة باستخدام نقطتين على الخط البياني.

أ $\overleftarrow{ع}_م = \frac{٤٠ \overleftarrow{ى}}{١٠} = ٤ \overleftarrow{ى}$ ومعيارها ٤ م/ث حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الحركة

ب $ع_م = \frac{١٠٠ + ٦٠}{١٠} = ١٦$ م/ث

٦ حاول أنْ تحل

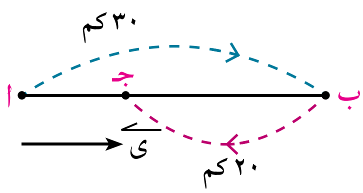


٦ يبين الشكل التالى رسمًا بيانيًّا لمنحنى (الازاحة - الزمن) لفأر يهرب من قط. أعد رسم هذا الشكل إذا هرب الفأر من القط بضعف سرعته.

مثال حساب السرعة المتوسطة ومتجه السرعة المتوسطة

٤ قطع راكب دراجة ٣٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٨ كم / س، ثم عاد على نفس الطريق فقطع ٢٠ كم فى الاتجاه المضاد بسرعة ١٥ كم / س أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها، ثم أوجد سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

الحل



إذا بدأ راكب الدراجة الحركة من الموضع أ إلى الموضع ب فى المرحلة الأولى، ثم عاد من ب إلى جـ فى المرحلة الثانية وبفرض أنَّ $\overleftarrow{ى}$ هو متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$.

زمن المرحلة الأولى = $\frac{ف}{ع_١}$ أى $ن_١ = \frac{٣٠}{١٨} = \frac{٥}{٣}$ ساعة،

زمن المرحلة الثانية $ن_٢ = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{٤}{٣}$ ساعة.

الزمن الكلى للرحلة = $\frac{٥}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$ ساعات

الإزاحة $\overleftarrow{\text{ف}} = ٣٠\,\overleftarrow{\text{ى}} - ٢٠\,\overleftarrow{\text{ى}} = ١٠\,\overleftarrow{\text{ى}}$

$\because\ \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ن}}$ $\qquad \therefore\ \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{١٠\,\overleftarrow{\text{ى}}}{٣} = ٣\frac{١}{٣}\,\overleftarrow{\text{ى}}$

أيْ أنَّ متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه $\overleftarrow{\text{ى}}$ أي في اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ومعياره يساوى $٣\frac{١}{٣}$ كم / س.

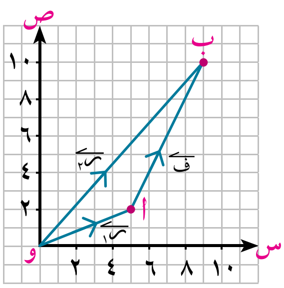
السرعة المتوسطة = $\dfrac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \dfrac{٣٠ + ٢٠}{٣} = \dfrac{٥٠}{٣}$ كم/س

حاول أنْ تحل

⑦ قطع راكب دراجة مسافة ٢٥ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س، ثم قطع مسافة ٧ كم فى نفس الاتجاه بسرعة ٧ كم / س. أوجد متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها، سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

مثال

⑤ تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين ٣، ٧ ثوان عند الموضعين أ (٥ ، ٢) ، ب (٩ ، ١٠) على الترتيب، أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.



الحل

الشكل المقابل يمثل:

متجه الموضع الابتدائى $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ($\overleftarrow{\text{ر}}_١$)،

متجه الموضع النهائى $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ($\overleftarrow{\text{ر}}_٢$)،

متجه الإزاحة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ($\overleftarrow{\text{ف}}$)

حيث: $\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ر}}_٢ - \overleftarrow{\text{ر}}_١$

$\overleftarrow{\text{ف}} = (٩ ، ١٠) - (٥ ، ٢)$

$\overleftarrow{\text{ف}} = (٤ ، ٨)$

$\because\ \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ن}_٢ - \text{ن}_١}$

$\therefore\ \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{١}{(٧ - ٣)}\left(٤\,\overleftarrow{\text{س}} + ٨\,\overleftarrow{\text{ص}}\right)$

$\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$ (الصورة المتجهة للسرعة المتوسطة)

$\|\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}}\| = \sqrt{(١)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٥}$ وحدة سرعة

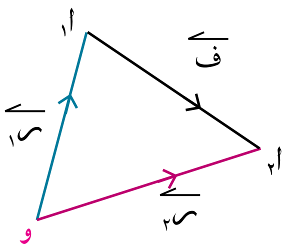
وتصنع زاوية قطبية مع $\overleftarrow{\text{و س}}$ ظلها ٢ أي $٦٣^\circ\ ٢٦'\ ٦''$.

حاول أنْ تحل

⑧ تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين ٣، ٨ ثوان عند الموضعين أ(٧، ٢) ، ب (٤، ٦) على الترتيب أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة.

متجه السرعة اللحظية *Instantaneous Velocity*

فى الشكل المقابل



$$\because \overleftarrow{ع}_م = \frac{\overleftarrow{ف}}{ن_٢ - ن_١} = \frac{\overleftarrow{ر}_٢ - \overleftarrow{ر}_١}{ن_٢ - ن_١}$$

و إذا كانت الفترة الزمنية $(ن_٢ - ن_١)$ صغيرة جدًا تتوسطها اللحظة ن فإن متجه السرعة فى هذه الحالة يعرف بمتجه السرعة اللحظية عند اللحظة ن و يرمز لها بالرمز $\overleftarrow{ع}$

فكر و ناقش

السرعة النسبية *Relative velocity*

ماذا تلاحظ؟

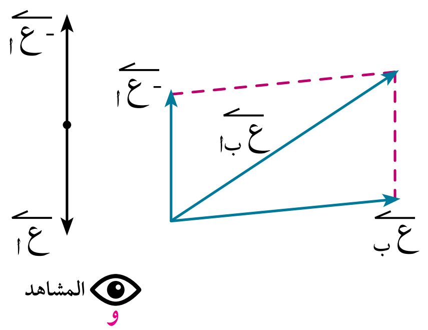
- إذا جلست فى قطار يتحرك وأنت تشاهد من النافذة أعمدة الإنارة والأشجار على جانب الطريق.
- إذا ركبت سيارة تتحرك بسرعة فى اتجاه ما، وأنت تشاهد السيارات الأخرى التى تتحرك فى نفس اتجاه سيارتك.
- إذا كانت السيارات الأخرى تتحرك عكس اتجاه سيارتك.

نلاحظ مما سبق أن الحركة مفهوم نسبى يختلف من مشاهد لآخر فى موضع آخر، وفى جميع الحالات فإن المشاهد يرصد حركات الأجسام الأخرى باعتباره ساكنًا حتى ولو كان غير ذلك، فيرى هذه الأجسام تتحرك بسرعات ليست هى السرعات الفعلية لها، ولكنها سرعات نسبية.

مفهوم السرعة النسبية:

السرعة النسبية لجسيم (ب) بالنسبة لجسيم آخر (أ) هى السرعة التى يبدو أن الجسيم (ب) يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (أ) فى حالة سكون.

متجه السرعة النسبية:



باعتبار أن $\overleftarrow{ع}_أ$ ، $\overleftarrow{ع}_ب$ هما متجها سرعة لجسمين أ ، ب بالنسبة للمشاهد (و) وأن $\overleftarrow{ع}_{بأ}$ هو متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ.

بإضافة $(- \overleftarrow{ع}_أ)$ إلى كل من المتجهين $\overleftarrow{ع}_أ$ ، $\overleftarrow{ع}_ب$ للجسمين أ ، ب حيث يصبح أ ساكنًا و يصبح متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ هى $(\overleftarrow{ع}_ب - \overleftarrow{ع}_أ)$ أىْ أنَّ: $\boxed{\overleftarrow{ع}_{بأ} = \overleftarrow{ع}_ب - \overleftarrow{ع}_أ}$

تفكير ناقد: إذا كان $\overleftarrow{ع}_{بأ}$ هو متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ ، $\overleftarrow{ع}_{أب}$ متجه سرعة أ بالنسبة إلى سرعة ب فاكتب العلاقة بين $\overleftarrow{ع}_{بأ}$ ، $\overleftarrow{ع}_{أب}$

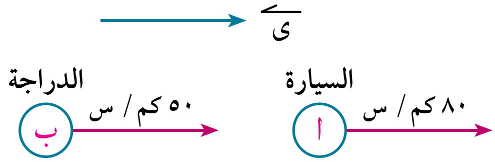
مثال

٦ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/س. فإذا تحركت فى نفس اللحظة على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٥٠ كم / س. أوجد السرعة النسبية للدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما تكون:

أ الدراجة تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة.

ب الدراجة تتحرك عكس اتجاه حركة السيارة.

الحل



نرمز للسيارة بالرمز أ وللدراجة بالرمز ب وبفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة.

أ عندما تتحرك الدراجة فى نفس اتجاه حركة السيارة تكون:

$\overleftarrow{ع}_{ب} = ٥٠ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_{أ} = ٨٠ \overleftarrow{ى}$ ، سرعة الدراجة بالنسبة للسيارة $\overleftarrow{ع}_{بأ} = ؟$

$\because \overleftarrow{ع}_{بأ} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{أ}$ $\qquad$ $\therefore \overleftarrow{ع}_{بأ} = ٥٠ \overleftarrow{ى} - ٨٠ \overleftarrow{ى} = -٣٠ \overleftarrow{ى}$

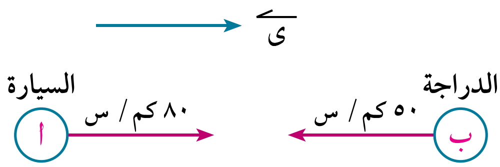
أىْ أنَّ الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة مبتعدة عن السيارة بسرعة مقدارها ٣٠ كم / س فى عكس اتجاه $\overleftarrow{ى}$.

ب عندما تتحرك الدراجة فى عكس اتجاه السيارة:

$\overleftarrow{ع}_{ب} = -٥٠ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_{أ} = ٨٠ \overleftarrow{ى}$ ،

$\because \overleftarrow{ع}_{بأ} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{أ}$

$\therefore \overleftarrow{ع}_{بأ} = -٥٠ \overleftarrow{ى} - ٨٠ \overleftarrow{ى} = -١٣٠ \overleftarrow{ى}$



أىْ أنَّ الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة نحوه بسرعة ١٣٠ كم/ س.

حاول أنْ تحل

٩ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٧٢ كم/ س. فإذا تحركت على الطريق نفسه دراجة بخارية بسرعة ٢٨ كم / س. فأوجد السرعه النسبية للدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما:

أ الدراجة تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة.

ب الدراجة تتحرك فى عكس اتجاه حركة السيارة.

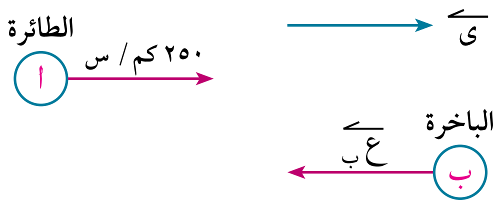
مثال

٧ تتحرك باخرة فى مسار مستقيم نحو ميناء، ولما صارت على مسافة ١٠٠ كم منه مرت فوقها طائرة حراسة فى الاتجاه المضاد بسرعة ٢٥٠ كم / س، ورصدت حركة الباخرة، فبدت لها متحركة بسرعة ٣٠٠ كم / س، احسب الزمن الذى يمضى من لحظة الرصد حتى وصول الباخرة إلى الميناء.

الحل

نرمز للباخرة بالرمز ب وللطائرة بالرمز أ ونفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة له نفس اتجاه حركة الطائرة.

وأن السرعة الفعلية للباخرة $\overleftarrow{ع_ب}$ (فى اتجاه مضاد لحركة الطائرة).



∴ $\overleftarrow{ع_أ} = ٢٥٠ \, \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_{بأ}} = -٣٠٠ \, \overleftarrow{ى}$

∵ $\overleftarrow{ع_{بأ}} = \overleftarrow{ع_ب} - \overleftarrow{ع_أ}$ ∴ $-٣٠٠ \, \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{ع_ب} - ٢٥٠ \, \overleftarrow{ى}$

أىْ أنَّ $\overleftarrow{ع_ب} = -٥٠ \, \overleftarrow{ى}$

أىْ أنَّ السرعة الفعلية للباخرة مقدارها ٥٠ كم / س وتعمل فى الاتجاه المضاد لحركة الطائرة.

∵ $\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ع} \, ن$ ∴ ١٠٠ = ٥٠ ن

أىْ أنَّ ن = ٢ ساعة

٩ حاول أنْ تحل

(١٠) تتحرك سيارة رادار لمراقبة السرعة على الطريق الصحراوى بسرعة ٤٠ كم / س، راقبت هذه السيارة حركة سيارة نقل قادمة فى الاتجاه المضاد، فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١٢٠ كم / س فما هى السرعة الفعلية لسيارة النقل؟

تمــارين (٢ – ١)

أكمل مايأتى:

(١) ٢٠م / ث = ... كم / س

(٢) ٩٠ كم / س = ... م / ث

(٣) تتحرك سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٢ كم / س لمدة ربع ساعة فإن المسافة المقطوعة = ... كم.

(٤) إذا كان $\overleftarrow{ع_أ} = ١٥ \, \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ع_ب} = ٢٢ \, \overleftarrow{س}$ فإن $\overleftarrow{ع_{أب}}$ = ...

(٥) إذا كان $\overleftarrow{ع_{أب}} = ٦٥ \, \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_أ} = ٥٠ \, \overleftarrow{ى}$ فإن $\overleftarrow{ع_ب}$ = ...

(٦) يتحرك راكب دراجة أ على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ويتحرك فى نفس الاتجاه راكب آخر ب بسرعة ١٢ كم / س فإن سرعة ب بالنسبة إلى أ تساوى .... كم / س.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٧) إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٥ كم / س لمدة ٢٠ دقيقة فإن المسافة المقطوعة بـ كم تساوى:

أ ١٥   ب ٢٠   جـ ٢٥   د ٣٠

٨ الزمن بالساعة الذي تستغرقه سيارة تتحرك بسرعة منتظمة ٢٠ متر / ث فى قطع مسافة ١٨٠ كم يساوى:

أ $١\frac{١}{٢}$ ب ٢ - ج $٢\frac{١}{٢}$ د ٣

٩ إذا كان $\overrightarrow{\text{ع}_{\text{اب}}} = ١٥ \, \overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}_{\text{ا}}} = ٣٥ \, \overrightarrow{\text{س}}$ فإن $\overrightarrow{\text{ع}_{\text{ب}}}$ تساوى:

أ $- ٥٠ \, \overrightarrow{\text{س}}$ ب $- ٢٠ \, \overrightarrow{\text{س}}$ ج $٢٠ \, \overrightarrow{\text{س}}$ د $٥٠ \, \overrightarrow{\text{س}}$

١٠ إذا كان متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة و يعطى كدالة فى الزمن ن (ثانية) بالعلاقة:

$\overrightarrow{\text{ر}} = (٢ \text{ن}^{٢} + ٣) \, \overrightarrow{\text{ى}}$ فإن معيار متجه الإزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$ بعد ٢ ثانية حيث معيار $\overrightarrow{\text{ر}}$ بالمتر يساوى:

أ ٤ متر ب ٦ متر ج ٨ متر د ١١ متر

١١ الربط بالفلك: إذا كان الضوء يصل من الشمس إلى الأرض فى ٨,٣ دقيقة، وكان بعد الأرض عن الشمس $١,٤٩٤ \times ١٠^{١١}$ متر فأوجد سرعة الضوء.

١٢ تحركت سيارتان فى وقت واحد من بنها متجهتان إلى القاهرة بسرعة ثابتة لكل منهما، فإذا كانت سرعة الأولى ٧٠ كم/س، وسرعة الثانية ٨٤ كم/س . ما الزمن الذى سينتظره قائد السيارة الثانية حتى يلحق به قائد السيارة الأولى فى نهاية الرحلة التى يبلغ طولها ٤٩ كم؟

١٣ دخل قطار طوله ١٥٠ مترًا نفقًا مستقيمًا طوله ف متر، فاستغرق عبوره بالكامل من النفق فى زمن قدره ١٥ ثانية، أوجد طول النفق إذا كانت سرعة القطار منتظمة وتساوى ٩٠ كم / س.

١٤ قطع راكب دراجة ٣٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ثم عاد فقطع ١٠ كم فى الاتجاه المعاكس بسرعة ١٠ كم / س، أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

١٥ سار رجل على طريق مستقيم فقطع ٨٠٠ متر بسرعة ٩ كم / س ، وقطع مسافة مساوية لها فى نفس الاتجاه بسرعة ٤,٥ كم / س، أوجد السرعة المتوسطة للرجل خلال الرحلة كلها.

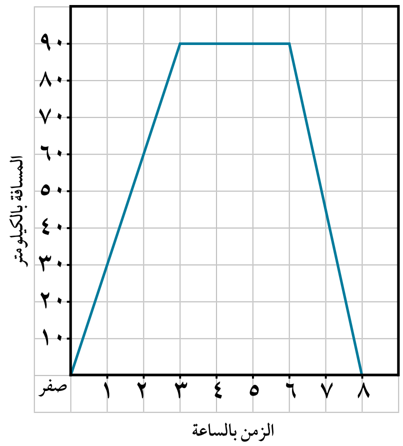
١٦ مدينتان أ ،ب على الطريق الساحلى المسافة بينهما ١٢٠ كم، تحركت سيارة من المدينة أ متجهة إلى المدينة ب بسرعة منتظمة ٨٨ كم / س، وفى نفس اللحظة قامت سيارة أخرى من المدينة ب متجهة إلى المدينة أ بسرعة منتظمة ٧٢ كم / س أوجد متى وأين تتقابل السيارتان؟

١٧ تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة منتظمة ٦٠ كم / س وتتحرك سيارة ب على نفس الطريق بسرعة منتظمة ٩٠ كم / س. أوجد سرعة السيارة أ بالنسبة للسيارة ب إذا كانت:

أ السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين. ب السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد.

١٨ قامت سيارة شرطة متحركة بسرعة منتظمة على طريق أفقى بقياس السرعة النسبية لشاحنة تتحرك أمامها وفى نفس الاتجاه فوجدتها ٦٠ كم / س، ولما زيدت سرعة سيارة الشرطة إلى الضعف، وأعادت القياس فبدت الشاحنة وكأنها ساكنة. أوجد السرعة الفعلية لكل من سيارة الشرطة والشاحنة.

نشاط (١)



١٩ يمثل الشكل المقابل العلاقة بين المسافة بالكيلو متر والزمن بالساعة لمسار دراجة بخارية تتحرك بين مدينتين. أجب عما يلي :

أ أوجد السرعة المتوسطة للدراجة فى أثناء الذهاب؟

ب أوجد السرعة المتوسطة للدراجة فى أثناء العودة؟

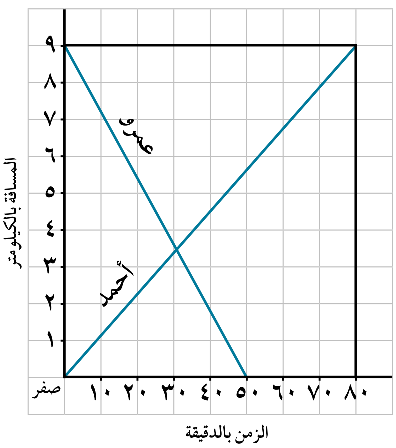
جـ ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل؟

٢٠ تحركت دراجة بخارية بسرعة منتظمة فوجد أنها بعد دقيقة واحدة أصبحت على بعد ٢ كم من نقطة أ، وبعد ٣ دقائق أصبحت على بعد ٥ كم من نفس النقطة. ارسم شكلًا بيانيًّا يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لهذه الدراجة ومن الرسم:

أ أوجد سرعة الدراجة.

ب اكتب العلاقة الرياضية بين الزمن (ن) والمسافة (ف).

نشاط (٢)



٢١ يوضح الشكل المقابل مسار حركة كل من أحمد وعمرو فى قطع المسافة بين قريتين، أحدهما فى القرية الأولى، والآخر فى القرية الثانية.

أ هل بدأ أحمد وعمرو الحركة فى توقيت واحد؟ فسِّر إجابتك.

ب بعد كم دقيقة التقى أحمد وعمرو؟

جـ ما الزمن الذى استغرقه أحمد فى قطع المسافة؟

د أوجد سرعة عمرو.

هـ إذا بدأ عمرو التحرك الساعة ٣٠ق:٩س صباحًا فمتى يصل إلى القرية الأخرى؟

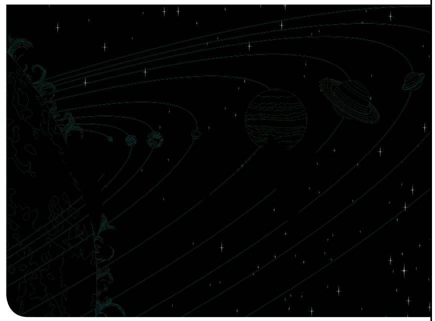
٢٢ إذا كان متجه موضع جسيم $\overleftarrow{ر}$ يتحرك فى خط مستقيم من نقطة و يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة: $\overleftarrow{ر} = (ن^{٢} + ٣ن - ٢)\,\overleftarrow{س}$ حيث $\overleftarrow{س}$ متجه وحدة ثابت. أوجد متجه الإزاحة بعد ٤ ثوان.

٢٣ تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين مقدارهما ٣، ٨ ثوان عند الموضعين أ(٤، ٣) ، ب (١٢ ، ٩) على الترتيب. أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.

٢٤ تفكير إبداعى: يتحرك رجل على كوبرى أ ب ، وعندما قطع $\frac{٣}{٨}$ طول الكوبرى من جهة أ سمع صوت صفير قطار يتحرك خلفه بسرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/ س نحو نقطة أفإذا تحرك الرجل نحو القطار فإن القطار سيصدمه عند نقطة أمباشرة أوجد أقل سرعة منتظمة يتحرك بها الرجل قبل أن يصدمه القطار مباشرة عند نقطة ب.

الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

Rectilinear motion with Uniform accelerated



سوف تتعلم

- التسارع.
- منحنى السرعة – الزمن.
- الحركة منتظمة التغير.
- العلاقة بين السرعة – الزمن.
- العلاقة بين المسافة – الزمن.
- العلاقة بين السرعة – المسافة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- تسارع Acceleration
- حركة منتظمة التغير Uniform variable motion
- عجلة منتظمة Uniform acceleration
- تقصير منتظم Uniform deceleration

الأدوات والوسائل

- ورق مربعات
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

تمهيد:

سبق أن درست الحركة المنتظمة فى خط مستقيم، ومن الملاحظ أن عددًا قليلًا من الأجسام يتحرك بهذه الطريقة لوقت طويل، فمن الملاحظ أن كل سيارة يوجد بها ثلاث أدوات تتحكم فى سرعتها، وهى دواسة الوقود ودواسة الفرامل، ثم عجلة القيادة التى تتحكم فى اتجاه حركتها، كذلك نلاحظ التغير فى سرعة الأجسام فى أثناء سقوطها وفى أثناء قذفها إلى أعلى.

تعلم

تعريف ١

الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم (Rectilinemvariablemotion-nonvariablemotion):

هى الحركة التى يحدث فيها تغير مقدار السرعة بانتظام بمرور الزمن، ويسمى بالتسارع (العجلة) حيث:

العجلة (جـ) = $\dfrac{\text{السرعة النهائية - السرعة الابتدائية}}{\text{الزمن}}$

ووحدات قياسه = م / ث^{٢} أو سم / ث^{٢} أو كم / س^{٢}

كما يلاحظ أن:

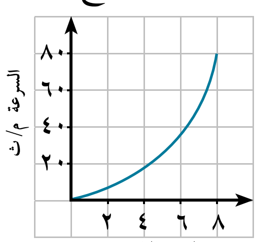
إذا كان التغير فى السرعة عند لحظة زمنية محددة فيسمى التسارع اللحظي.

منحنى (السرعة - الزمن) *Velocity-Time curve*

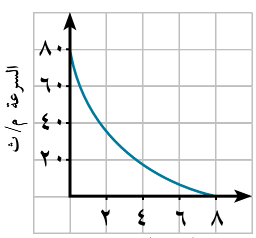
يرتبط مفهوم التسارع بتغير السرعة فإذا ازدادت قيمة السرعة مع الزمن نقول: إن الحركة متسارعة، ويكون التسارع (العجلة) موجبًا (باعتبار السرعة موجبة) كما فى شكل (١).

وإذا تناقص مقدار السرعة مع الزمن فنقول: إن الحركة تقصيرية، ويكون التسارع (العجلة) سالبًا كما فى شكل (٢).

وإذا بقيت السرعة ثابتة مع الزمن نقول: إن الحركة منتظمة.



شكل (١)



شكل (٢)

الحركة منتظمة التغير: *Uniformly accelerated motion*

يقال إن الجسيم يتحرك حركة منتظمة التغير أو بتسارع (عجلة) منتظم إذا كان متجه العجلة ثابتًا مقدارًا واتجاهًا لجميع الأزمنة.

تعبير شفهى: ماذا تعنى كل من العبارات الآتية:

أ مقدار سرعة جسيم يزداد فى أثناء حركته زيادة منتظمة بمعدل ٤م / ث٢.

ب مقدار سرعة جسيم يتناقص فى أثناء حركته تناقص منتظم بمعدل ٢٤ كم / س٢.

مثال

١ إذا تغيرت بانتظام سرعة سيارة تتحرك فى خط مستقيم من ٥٠ كم / س إلى ٦٨ كم / س خلال عشر ثوان، وتحركت سيارة نقل من السكون؛ حتى أصبحت سرعتها ١٨ كم / س خلال هذه المدة. أيهما يتحرك بتسارع أكبر ؟ فسر إجابتك.

الحل

يتضح من بيانات المسألة أن كلًّا من السيارة ، سيارة النقل قد حدث لهما زيادة فى السرعة بمقدار ١٨ كم / س (أى ٥م / ث) خلال فترة زمنية قدرها ١٠ ثوان؛ لذلك يكون التسارع متساويًا لكل منهما .

أىْ أنَّ التسارع الذى تتحرك به كل منهما هو:

$$\because \text{جـ} = \frac{\text{التغير فى السرعة}}{\text{الفترة الزمنية}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢} \text{ م / ث}^٢$$

حاول أنْ تحل

١ إذا تغيرت بانتظام سرعة سيارة (أ) تتحرك فى خط مستقيم من ٢٤ كم / س إلى ٣٦ كم / س خلال ٥ ثوان، وتغيرت بانتظام سرعة سيارة (ب) تتحرك فى نفس الخط المستقيم من ١٢ كم / س إلى ٣٠ كم / س خلال نفس المدة الزمنية. أيهما يتحرك بتسارع أكبر ؟ فسِّر إجابتك.

معادلات الحركة منتظمة التغير في خط مستقيم *Equations of the uniform variable motion*

توجد ثلاث معادلات أساسية تربط بين القياسات الجبرية لمتجهات الازاحة ، والسرعة، والعجلة، والزمن فى حالة الحركة بتسارع منتظم وهى:

أولًا: العلاقة بين السرعة والزمن:

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم بمتجه سرعة ابتدائية $\overleftarrow{\text{ع}_.}$ ومتجه عجلة ثابتة $\overleftarrow{\text{جـ}}$ وأصبح متجه سرعته $\overleftarrow{\text{ع}}$ بعد فترة زمنية (ن) فإن:

$$\overleftarrow{\text{جـ}} = \frac{\overleftarrow{\text{ع}} - \overleftarrow{\text{ع}_.}}{\text{ن}}$$ أىْ أنَّ: $$\boxed{\overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{ع}_.} + \overleftarrow{\text{جـ}}\ \text{ن}}$$

بأخذ القياس الجبري تكون. $$\boxed{\text{ع} = \text{ع}_. + \text{جـ ن}}$$

لاحظ أن:

- العلاقة تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد إحداها بمعلومية الثلاثة الآخرين.
- إذا بدأ الجسم حركته من سكون فإن ع. = ٠ وتكون ع = جـ ن
- إذا كان جـ = ٠ فإن ع = ع. أىْ أنَّ الجسم يتحرك بسرعة منتظمة.

مثال

(٢) بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٩سم / ث وبعجلة منتظمة قدرها ٣سم / ث^{٢} تعمل فى نفس اتجاه السرعة الابتدائية. أوجد:

أ سرعة الجسيم بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

ب الزمن الذى يمضى من بدء الحركة حتى تصبح سرعته ٥٤ سم / ث.

الحل

أ نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الجسيم.

من بيانات المسألة: ع. = ٩سم / ث ، جـ = ٣سم / ث^{٢} ، ن = ٥ ثوان.

∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ع = ٩ + ٣ × ٥ ∴ ع = ٢٤ سم / ث.

ب ∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ٥٤ = ٩ + ٣ ن ∴ ن = ١٥ ثانية.

حاول أنْ تحل

(٢) بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٢٠سم / ث وبعجلة منتظمة ٥سم / ث^{٢} تعمل فى نفس اتجاه متجه السرعة الابتدائية. أوجد:

أ سرعته فى نهاية دقيقة واحدة من بدء الحركة.

ب الزمن الذى يمضى من بدء الحركة حتى تصبح سرعته ١٨ كم / س.

مثال

(٣) يتحرك جسيم فى خط مستقيم فتغيرت سرعته من ٥٤ كم / س الى ٣ م / ث فى زمن قدره نصف دقيقة. أوجد مقدار عجلة الحركة. هل يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظيًّا؟ فسِّر إجابتك.

الحل

لتحويل سرعة الجسم من كم/س إلى م/ث : ٥٤ كم / س = ٥٤ × $\frac{٥}{١٨}$ = ١٥ م / ث

"من بيانات المسألة" ع. = ١٥ م / ث ، ع = ٣م / ث ، ن = ٣٠ ثانية .

∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ٣ = ١٥ + ٣٠ جـ

أىْ أنَّ: ٣٠ جـ = - ١٢ ∴ جـ = - ٠,٤ م / ث^{٢}

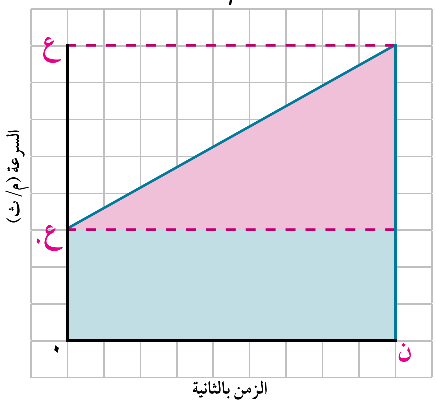
∵ جـ < ٠ يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظيًّا؛ لأنه يتحرك حركة تقصيرية.

حاول أنْ تحل

٣ تتحرك سيارة فى خط مستقيم فتناقصت سرعتها من ٦٣ كم / س إلى ٣٦ كم / س فى زمن قدره نصف دقيقة. أوجد العجلة التى تتحرك بها السيارة والزمن الذى يمضى بعد ذلك؛ حتى تسكن لحظيًّا.

ثانيًا: العلاقة بين المسافة و الزمن

The relation between displacement and time



المساحة تحت منحنى (السرعة - الزمن) تساوى إزاحة الجسم.

فى الشكل المقابل الجسم يتحرك بعجلة منتظمة مبتدئًا بسرعة ابتدائية ع. وبعد زمن ن ثانية أصبحت سرعته النهائية ع المساحة تحت المنحنى يمكن حسابها عن طريق تقسيمها إلى مستطيل ومثلث.

المساحة (ف) = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

= ع. ن + $\frac{1}{2}$ ن (ع - ع.)

ف = ع. ن + $\frac{1}{2}$ ن (ع. + جـ ن - ع.) (وذلك بالتعويض من القانون الأول: ع = ع. + جـ ن)

$\boxed{\text{ف = ع. ن + } \frac{1}{2} \text{ جـ ن}^2}$

حيث ف ، ع ، جـ هى القياسات الجبرية للإزاحة والسرعة والعجلة.

تعبير شفهى:

١- اكتب صيغة قانون (المسافة - الزمن) عندما يبدأ الجسم حركته من سكون.

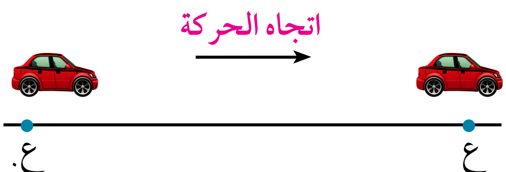
٢- اكتب صيغة القانون السابق عندما جـ = ٠ ، وبم تفسر نوع الحركة فى هذه الحالة؟

مثال

٤ سيارة تتحرك بسرعة ٩٠ كم / س ، ضغط السائق على دواسة الفرامل، بحيث تناقصت السرعة بمعدل ثابت حتى توقفت السيارة بعد مرور ٥ ثوان. احسب:

أ عجلة السيارة خلال تناقص السرعة.

ب المسافة التى قطعتها السيارة؛ حتى توقفت حركتها تمامًا.



لاحظ أن

عندما يقف الجسم فإن ع = ٠

الحل

أ لتحويل السرعة من كم/س إلى متر / ث : ٩٠ كم / س = ٩٠ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٢٥ م / ث

بالتطبيق فى القانون: ع = ع. + جـ ن حيث ع. = ٢٥ م / ث ، ع = ٠ ، ن = ٥ ثوان

∴ ٠ = ٢٥ + ٥ جـ أىْ أنَّ جـ = - ٥ م / ث^2

أىْ أنَّ السيارة تتحرك بتقصير منتظم مقداره ٥م / ث^2.

ب ∵ $ف = ع_. ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢$ بالتعويض عن : ع. = ٢٥م/ث، ن = ٥ث ، جـ = - ٥م/ن^٢

∴ $ف = ٢٥ × ٥ + \frac{١}{٢} (-٥) × ٢٥ = ٦٢,٥$ مترًا.

حاول أنْ تحل

④ قذفت كرة صغيرة بسرعة ٢٠م/ث أفقيًّا، فتحركت فى خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة $\frac{١}{٢}$ م/ث^٢.
عين موضع الكرة، وسرعتها بعد مرور ٢ ثانية من بدء الحركة.

ثالثًا: العلاقة بين السرعة والإزاحة
The relation between the displacement and velocity

نعلم أن: $ع = ع_. + جـ ن$ **(١)** $ف = ع_. ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢$ **(٢)**

بتربيع المعادلة الأولى: $ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ ع_. جـ ن + جـ^٢ ن^٢$

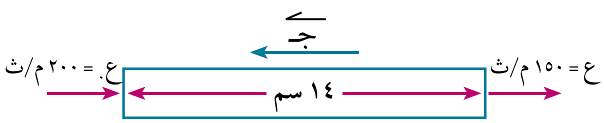
∴ $ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ جـ (ع_. ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢)$ بالتعويض من المعادلة **(٢)** عن قيمة ف

$$\boxed{ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ جـ ف}$$

مثال

⑤ أطلقت رصاصة بسرعة ٢٠٠م/ث فى اتجاه عمودى على حائط رأسى سمكه ١٤سم، فخرجت منه بسرعة ١٥٠م/ث. أوجد مقدار العجلة التقصيرية ، وإذا أطلقت الرصاصة بنفس السرعة على حائط رأسى آخر له نفس المقاومة، فأوجد المسافة التى تغوصها حتى تسكن.

الحل



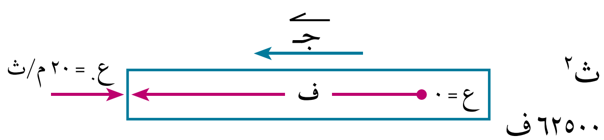
نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الرصاصة.

الحالة الأولى: ع. = ٢٠٠م / ث، ع = ١٥٠ م / ث ، ف = ٠,١٤ م

∵ $ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ جـ ف$ ∴ $(١٥٠)^٢ = (٢٠٠)^٢ + ٢ × جـ × ٠,١٤$

وبالتبسيط: جـ = - ٦٢٥٠٠ م / ث٢

الحالة الثانية:



ع. = ٢٠٠م / ث ، ع = ٠ جـ = - ٦٢٥٠٠ م / ث^٢

∵ $ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ جـ ف$ ∴ $٠ = (٢٠٠)^٢ - ٢ × ٦٢٥٠٠ ف$

∴ ف = ٠,٣٢ متر **أىْ أنَّ** الرصاصة تغوص فى الحائط مسافة ٣٢ سم حتى تسكن.

حاول أنْ تحل

⑤ نقصت سرعة سيارة بانتظام من ٤٥ كم / س إلى ١٨ كم / س بعد أن قطعت مسافة ٦٢٥ مترًا. أوجد المسافة التى تقطعها بعد ذلك حتى تسكن.

⑥ أطلقت رصاصة أفقيًّا على كتلة خشبية بسرعة ١٠٠م / ث فغاصت فيها مسافة ٥٠سم. أوجد العجلة التى تتحرك

بها الرصاصة إذا علم أن العجلة منتظمة ، و إذا تم إطلاقها على كتلة خشبية أخرى مماثلة للأولى سمكها ١٨سم. فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الكتلة الخشبية؟

مثال

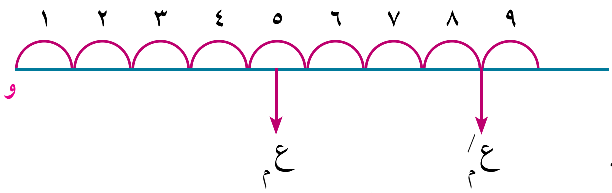
السرعة المتوسطة خلال الثانية النونية: *The average velocity within n^{th} second*

٦ بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ١٠سم/ث وعجلة منتظمة ٤سم/ث^{٢} فى اتجاه سرعته . احسب:

أولاً: المسافة التى يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانية الخامسة فقط.

ثانيًا: المسافة التى يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانيتين الثامنة والتاسعة معًا.

الحل



نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه السرعة

∴ ع. = ١٠ سم/ث ، جـ = ٤سم/ث^{٢}

أولاً: نوجد السرعة المتوسطة ع$_{م}$ خلال الثانية الخامسة = السرعة فى منتصف هذه الفترة الزمنية أى تساوى السرعة بعد ٤ $\frac{١}{٢}$ ثانية.

∵ ع$_{م}$ = ع. + جـ ن ∴ ع$_{م}$ = ١٠ + ٤ × ٤ $\frac{١}{٢}$ = ٢٨سم/ث.

المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة = السرعة المتوسطة × الزمن = ٢٨ × ١ = ٢٨ سم.

ثانيًا: نوجد السرعة المتوسطة ع$'_{م}$ خلال الثانيتين الثامنة والتاسعة = السرعة فى منتصف الفترة الزمنية أى تساوى السرعة بعد مضى ٨ ثوان من بدء الحركة .

∵ ع$'_{م}$ = ع. + جـ ن ∴ ع$'_{م}$ = ١٠ + ٤ × ٨ = ٤٢ سم/ث

المسافة المقطوعة فى الثانيتين الثامنة والتاسعة = السرعة المتوسطة × الزمن = ٤٢ × ٢ = ٨٤ سم

فكر:

حاول حل المثال السابق بطرق أخرى.

حاول أنْ تحل

٧ بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٣٠سم / ث، وعجلة منتظمة ٦سم / ث^{٢} فى نفس اتجاه سرعته. احسب:

أ المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

ب المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة فقط.

٨ تحرك جسيم بسرعة ابتدائية ما فى اتجاه ثابت و بعجلة منتظمة، فإذا قطع فى الثانية الثالثة من حركته مسافة ٢٠مترًا ، ثم قطع فى الثانيتين الخامسة والسادسة معًا مسافة ٦٠ مترًا. احسب العجلة التى تحرك بها الجسيم وسرعته الابتدائية.

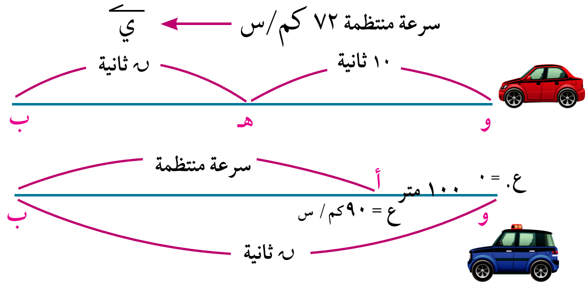
٩ يتحرك مترو الأنفاق فى خط مستقيم بين محطتين أ ، ب المسافة بينهما ٧٠٠ متر، حيث يبدأ من المحطة أ من السكون بعجلة منتظمة ٢م/ث^{٢} لمدة ١٠ ثوان، ثم يسير بعد ذلك بسرعة منتظمة فترة من الزمن، ثم يقطع مسافة ٦٠ مترًا الأخيرة من حركته بتقصير منتظم؛ حتى يقف فى المحطة ب. أوجد الزمن الذى يستغرقه فى قطع المسافة بين المحطتين.

مثال

تطبيقات على قوانين الحركة بعجلة منتظمة

٧) تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ٧٢ كم / س. مرت بسيارة شرطة ساكنة فبدأت سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ١٠ ثوان من مرورها متحركة بعجلة منتظمة مسافة ١٠٠ متر حتى بلغت سرعتها ٩٠ كم / س ، ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى. أوجد الزمن الذى استغرقته عملية المطاردة منذ لحظة تحرك سيارة الشرطة والمسافة التى قطعتها هذه السيارة.

الحل



نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه الحركة، وأن سيارة الشرطة كانت ساكنة عند نقطة و ، ثم قطعت مسافة ١٠٠ متر، حتى وصلت إلى أ حيث أصبحت سرعتها ٩٠ كم / س ثم سارت بها بانتظام حتى لحقت بالسيارة الأولى عند ب.

٧٢ كم/س = ٧٢ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٢٠ متر/ ث ، ٩٠ كم/س = ٩٠ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٢٥ متر/ ث

بالنسبة لسيارة الشرطة فى الفترة من و ⟵ أ

ع. = ٠ ، ع = ٢٥ م / ث ، ف = ١٠٠ متر ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف

٢٥ × ٢٥ = ٢ × جـ × ١٠٠ ∴ جـ = $\frac{٢٥}{٨}$ م / ث^{٢}

ع = ع. + جـ ن ∴ ٢٥ = $\frac{٢٥}{٨}$ ن ∴ ن = ٨ ثوانٍ

∴ المسافة التي تتحركها سيارة الشرطة بسرعة منتظمة = ٢٥ (ن - ٨) متر

، تكون السيارة المطاردة قطعت المسافة و ب في زمن قدره = (ن + ١٠) ثانية

، تكون سيارة الشرطة قطعت نفس المسافة و ب في زمن قدره = ن ثانية

∴ ٢٠ (ن + ١٠) = ١٠٠ + ٢٥ (ن - ٨) أي أن ن = ٦٠ ثانية

المسافة المقطوعة = ٢٠ × ٧٠ = ١٤٠٠ متر

حاول أنْ تحل

١٠) تتحرك سيارة بسرعة ٥٤ كم/س، مرت على سيارة شرطة ساكنة فبدأت سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ٣٠ ثانية من مرورها متحركة بعجلة منتظمة مسافة ٢٠٠ متر؛ حتى بلغت سرعتها ٧٢ كم/س ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى. أوجد الزمن الذي استغرقته عملية المطاردة من لحظة تحرك سيارة الشرطة و المسافة التي قطعتها هذه السيارة.

تمارين (٢ - ٢)

١ أكمل ما يأتى:

أ يتحرك جسيم فى خط مستقيم من السكون بعجلة منتظمة مقدارها ٤م / ث^{٢} فإن سرعته بعد ٦ ثوان من بدء الحركة = ... م / ث.

ب المسافة التى يقطعها جسيم يتحرك فى اتجاه ثابت من السكون بعجلة مقدارها ٥سم / ث^{٢} فى زمن قدره ٤ ثوان = ... سم.

جـ السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية ع. وعجلة منتظمة جـ خلال الثانية السادسة من حركته = ...

د السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية ع. وعجلة منتظمة جـ خلال الثوانى السابعة والثامنة والتاسعة = ...

هـ يتحرك جسيم من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٢٤ مترًا فى الثوانى الأربع الأولى من حركته ، فإن مقدار عجلته = ...

و بدأ جسيم حركته من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٢سم / ث^{٢} فقطع مسافة ٢٥سم ، فإن سرعته فى نهاية تلك المسافة = ... سم / ث.

٢ انطلقت سيارة من السكون بتسارع مقداره ٤م / ث^{٢}. ما المسافة التى تقطعها السيارة عندما تصبح سرعتها ٢٤م / ث؟

٣ تسير سيارة سباق فى الحلبة بسرعة ٤٤م / ث ثم تناقصت سرعتها بمعدل ثابت، حتى أصبحت ٢٢م / ث خلال ١١ ثانية. أوجد المسافة التى قطعتها السيارة خلال هذا الزمن.

٤ يتحرك جسم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فزادت سرعته من ١٥م / ث إلى ٢٥م / ث بعد أن قطع مسافة ١٢٥ مترًا ، أوجد الزمن اللازم لذلك.

٥ يتحرك راكب دراجة بعجلة منتظمة حتى صارت سرعته ٧,٥ م / ث خلال ٤,٥ ثانية. فإذا كانت إزاحة الدراجة خلال فترة التسارع تساوى ١٩ مترًا. أوجد السرعة الابتدائية للدراجة.

٦ يتدرب كريم على ركوب الدراجة، يدفعه والده فيكتسب تسارعًا ثابتًا مقداره $\frac{١}{٢}$م / ث^{٢} لمدة ٦ ثوان، وبعد ذلك يقود كريم الدراجة بمفرده بالسرعة التى اكتسبها لمدة ٦ ثوان أخرى قبل أن يسقط أرضًا. أوجد مقدار المسافة التى يقطعها كريم.

٧ هبط راكب دراجة من قمة تل منحدرًا بعجلة ثابتة مقدارها ٢م / ث^{٢} وعندما وصل إلى قاعدة التل بلغت سرعته ١٨م / ث ثم استخدم الفرامل؛ حتى يحافظ على هذه السرعة لمدة دقيقة واحدة. أوجد المسافة الكلية التى قطعها راكب الدراجة.

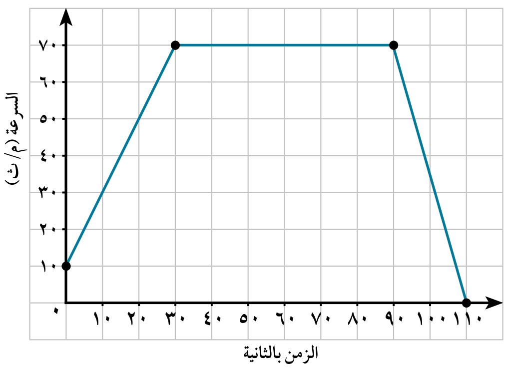
٨ قائد سيارة يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها ٢٤م / ث ، شاهد فجأة طفلًا يمر فى الشارع ، فإذا كان الزمن اللازم لاستجابة الفرامل هو $\frac{١}{٢}$ ثانية ثم تحركت السيارة بتقصير منتظم مقداره ٩,٦م / ث^{٢} حتى وقفت. أوجد المسافة الكلية التى تحركتها السيارة قبل أن تقف مباشرة.

(٩) بدأ جسم حركته من السكون فى خط مستقيم أفقى بعجلة منتظمة مقدارها ٤سم / ث^{٢} لمدة ٣٠ ثانية، ثم تحرك بالسرعة التى اكتسبها لمدة ٤٠ ثانية أخرى فى نفس الاتجاه. أوجد مقدار سرعته المتوسطة.

(١٠) يتحرك جسم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة على مستوى أفقى أملس فقطع ٢٦ مترًا خلال الثانية الرابعة من بدء الحركة ، ٥٦ مترًا خلال الثانية التاسعة، أوجد سرعته الابتدائية ومقدار عجلته.

(١١) س ، ص نقطتان على طريق مستقيم أفقى بدأت سيارة أ الحركة من س نحو ص من السكون وبعجلة منتظمة ١٠م / ث^{٢} وفى نفس اللحظة كانت تتحرك سيارة أخرى ب من ص نحو س بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم / س ، فإذا كانت السرعة النسبية للسيارة أ بالنسبة للسيارة ب لحظة التقائهما تساوى ١٦٢ كم / س. أوجد الزمن الذى تأخذه كل من السيارتين من لحظة تحركهما معًا حتى لحظة التقائهما.

نشاط



(١٢) الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن) لجسم بدأ التحرك بسرعة ابتدائية مقدارها ١٠م / ث وحتى سكن بعد زمن قدره ١١٠ ثانية. أوجد:

أ عجلة التسارع.

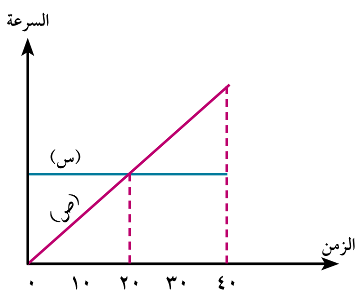
ب مقدار التقصير المنتظم للجسم حتى يسكن.

جـ المسافة الكلية التى تحركها الجسم.

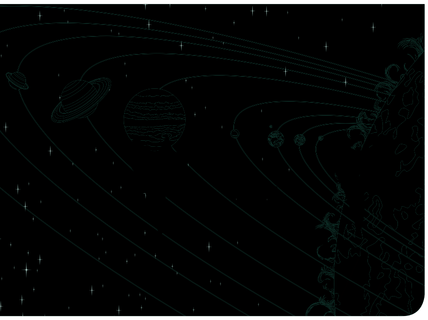
تفكير إبداعى:

(١٣) مصعد ساكن بقاع منجم ، أخذ المصعد فى الارتفاع بعجلة مقدارها ١٢٠سم/ث^{٢} مسافة ٥٤٠سم، ثم بسرعة منتظمة مسافة ٣٦٠ سم، ثم بتقصير منتظم مسافة ٧٢٠سم؛ حتى سكن عند فوهة المنجم. احسب الزمن الذى استغرقه المصعد فى الصعود من قاع المنجم إلى فوهته.

تفكير إبداعى:



( ) الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن) لحركة سيارتين س ، ص أوجد الزمن الذى تتقابل فيه السيارتان (فسر إجابتك).



السقوط الحر
Free Fall

سوف تتعلم
- قوانين الحركة الرأسية.
- دراسة حركة الأجسام الساقطة أو المقذوفة لأسفل.
- دراسة حركة الأجسام المقذوفة لأعلى.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- سقوط حر Free fall
- عجلة الجاذبية الأرضية Acceleration of gravity

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة علمية.

تمهيد
ما الذى يحدث عندما تسقط برتقالة من شجرة؟

➢ تتحرك البرتقالة من سكون ، ثم تكتسب سرعة فى أثناء سقوطها سقوطًا حرًّا نتيجة تأثير جاذبية الأرض عليها فبعد ١ ثانية ستكون سرعتها ٩,٨ م/ث لأسفل، وبعد ثانية أخرى ستصبح سرعتها ١٩,٦ م/ث لأسفل وهكذا...

لاحظ أن: سرعة البرتقالة تتناسب طرديًّا مع الزمن.

إن التسارع الذى تسقط به الأجسام سقوطًا حرًّا (مع إهمال مقاومة الهواء) يساوى ٩,٨ م/ث^{٢} تقريبًا ويرمز له بالرمز (ى) ويختلف باختلاف خط العرض فيقل عند خط الاستواء ويزداد قليلًا كلما اتجهنا نحو القطبين ، ويعتبر التسارع موجبًا أو سالبًا حسب النظام الإحداثي الذي يتم اتخاذه ، فإذا كان الجسيم ساقطًا أو مقذوفًا نحو سطح الأرض فتعتبر (ى) ، موجبة ، أما إذا كان مقذوفًا إلى أعلى فتعتبر (ى) سالبة.

قوانين الحركة الرأسية للأجسام:
تخضع الحركة الرأسية لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة مع استخدام الرمز (ى) الدالة على **التسارع الذى تسقط به الأجسام سقوطًا حرًّا** بدلًا من الرمز (جـ) وبذلك تأخذ القوانين الصورة الآتية:

$$ع = ع_{.} + ى\,ن \quad،\quad ف = ع_{.}\,ن + \tfrac{1}{2}\,ى\,ن^{2} \quad،\quad ع^{2} = ع_{.}^{2} + 2\,ى\,ف$$

حيث ع، ى ، ف هى القياسات الجبرية لمتجهات السرعة والعجلة والازاحة

ولذلك عند تطبيق القوانين بالصورة السابقة يجب مراعاة ع ، ع. ، ى ، ف تبعًا لما يأتى.

أولًا: إذا كان الجسم ساقطًا أو مقذوفًا نحو سطح الأرض

يعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل فتكون كل من ع. ، ع ، ى ، ف موجبة.

مثال

١ أسقط عامل بناء قطعة خرسانية من سقالة (منصة) عالية.

أ ما سرعة قطعة البناء بعد نصف ثانية؟

ب ما المسافة التى تقطعها كتلة البناء خلال هذا الزمن؟

الحل

أ صيغة القانون: ع = ع. + د ن

بالتعويض عن ع. = ٠ ، د = ٩,٨ م/ث^{٢} ، ن = $\frac{١}{٢}$ ثانية.

ع = ٠ + ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٤,٩ م/ث

ب صيغة القانون: ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ د ن^{٢}

بالتعويض عن ع. = ٠ ، د = ٩,٨ م/ث^{٢} ، ن = $\frac{١}{٢}$ ثانية.

ف = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × $\frac{١}{٤}$ = ١$\frac{٩}{٤٠}$ متر.

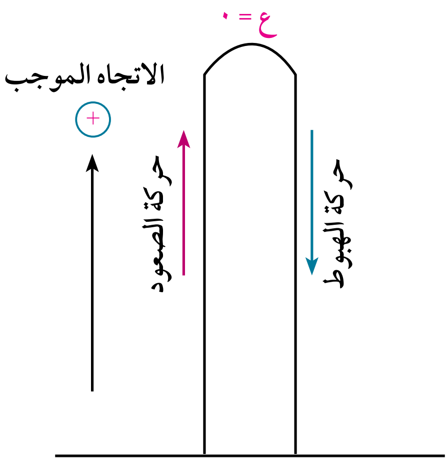
حاول أنْ تحل

١ سقطت تفاحة من شجرة، وبعد ثانية واحدة ارتطمت بالأرض.

أ احسب سرعة التفاحة لحظة ارتطامها بسطح الأرض ، ثم احسب السرعة المتوسطة خلال زمن سقوطها.

ب ما بُعد التفاحة عن سطح الأرض لحظة بداية سقوطها؟

ثانيًا: إذا كان الجسم مقذوفًا إلى أعلى

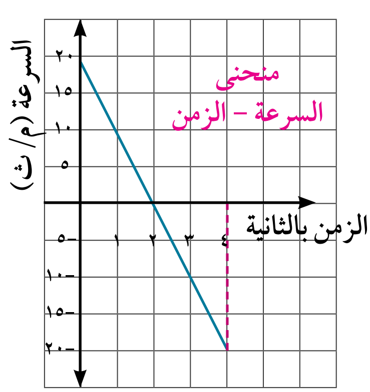


نشاط

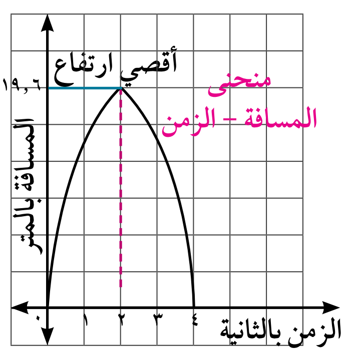
قذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ١٩,٦م/ث^{٢}، باعتبار أن الاتجاه الرأسى لأعلى هو الاتجاه الموجب فتكون السرعة الابتدائية موجبة تبعًا لذلك ، أما التسارع فيكون سالبًا - **لماذا؟**

- استخدم برنامج (geogebra) فى رسم العلاقة بين (السرعة-الزمن) حيث ع = ١٩,٦ - ٩,٨ن عندما ن ∈ [٠ ، ٤]
ماذا تلاحظ؟

- استخدم نفس البرنامج فى رسم العلاقة بين **(المسافة - الزمن)**:
حيث ف = ١٩,٦ ن - ٤,٩ ن^{٢}، **ماذا تلاحظ؟**



شكل (١)



شكل (٢)

نلاحظ من الشكل البيانى أن:

- سرعة الجسم فى أثناء الصعود تكون موجبة، وفى أثناء الهبوط تكون سالبة.

فمثلًا: عندما ن ∈]٠ ، ٢[**نلاحظ أن سرعة** ع > ٠ ، **عندما** ن ∈]٢ ، ٤[**فان** ع < ٠

- سرعة الجسم عند أقصى ارتفاع تساوى صفرًا.
- زمن الصعود للجسم يساوى زمن الهبوط.
- مقدار سرعة الجسم التى يعود بها إلى نقطة القذف تساوى مقدار سرعة القذف بإشارة مخالفة.

لاحظ أن

زمن أقصى ارتفاع = $\frac{\text{ع}_{.}}{\text{ى}}$

أقصى ارتفاع = $\frac{\text{ع}_{.}^{٢}}{٢\,\text{ى}}$

- إزاحة الجسم خلال فترة زمنية ما ليست بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التى قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

تفكير ناقد:

١- إذا قذف جسم رأسيًّا لأعلى بسرعة ابتدائية (ع.) فبلغت سرعته النهائية (ع) فى زمن قدره (ن) **فأوجد.**

أ زمن وصول الجسم إلى أقصى ارتفاع.

ب مسافة أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

مثال

٢ قذف جسيم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ٤٩م/ث. أوجد زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع والمسافة التى وصل إليها.

الحل

باعتبار أن الاتجاه الرأسى لأعلى هو الاتجاه الموجب فإن :

ع. = ٤٩م/ث ، ى = -٩,٨ م/ث^{٢} ، ع = ٠ (عند أقصى ارتفاع)

أ **لإيجاد زمن أقصى ارتفاع:**

∵ ع = ع. + ى ن ∴ ٠ = ٤٩ - ٩,٨ ن. ∴ ن = ٥ثوان.

ب **لإيجاد مسافة أقصى ارتفاع:**

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ ى ف ∴ ٠ = (٤٩)^{٢} - ٢ × ٩,٨ × ف ∴ ف = ١٢٢,٥ مترًا

فكر:

١- هل يمكنك استخدام قوانين أخرى لإيجاد مسافة أقصى ارتفاع؟ **وضِّح ذلك.**

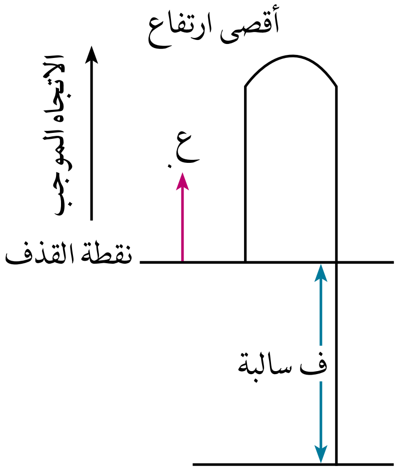
حاول أنْ تحل

٢ قذف جسيم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ٣٩,٢ م/ث. أوجد زمن أقصى ارتفاع والمسافة التى وصل إليها.

مثال

٣ قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ١٦م/ث. أوجد الزمن الذى يأخذه الجسم؛ حتى يصل إلى ٣٣٠ مترًا أسفل نقطة القذف.

الحل



نعتبر الاتجاه الرأسى إلى أعلى هو الاتجاه الموجب

ع. = ١٦م/ث لأنها نفس اتجاه القذف.

ء = -٩,٨ **لأنها عكس اتجاه عملية الجاذبية الأرضية.**

ف = -٣٣٠ **لأنها أسفل نقطة القذف.**

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢}

-٣٣٠ = ١٦ن - $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ن^{٢} **بالتبسيط** ٤٩ن^{٢} - ١٦٠ن - ٣٣٠٠ = ٠

بالتحليل المقدار الثلاثى: (ن - ١٠) (٤٩ن + ٣٣٠) = ٠

ن = ١٠ ، ن = - $\frac{٣٣٠}{٤٩}$ (مرفوض)

فكر:

١- هل توجد لديك حلول أخرى؟ وضِّح ذلك.

حاول أنْ تحل

(٣) قذفت كرة صغيرة رأسيًّا إلى أعلى من نافذة أحد المنازل، وشوهدت الكرة وهى هابطة أمام النافذة بعد ٣ ثوان من قذفها ، ثم وصلت إلى سطح الأرض بعد ٤ثوان من لحظة القذف. أوجد ارتفاع هذه النافذة عن سطح الأرض.

تمـــاريـن (٢ - ٣)

(١) طفل يُسقط كرة من نافذة ترتفع ٣,٦م عن الرصيف. ما سرعتها لحظة ملامستها الرصيف؟

(٢) سقطت كرة رأسيًّا إلى أسفل. ما سرعتها بعد ٦ ثوان من لحظة سقوطها؟

(٣) سقط جسم رأسيًّا لأسفل من ارتفاع ٤٩٠م عن سطح الأرض أوجد:

أ) زمن الوصول إلى سطح الأرض.

ب) سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

(٤) سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٠ أمتار، فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسيًّا إلى أعلى مسافة ٢$\frac{١}{٢}$متر. احسب سرعة الكرة قبل وبعد اصطدامها بالأرض مباشرة.

(٥) يتدرب طالب على ركل كرة القدم رأسيًّا إلى أعلى فى الهواء، ثم تعود الكرة أثر كل ركلة فتصدم بقدمه، فإذا استغرقت الكرة من لحظة ركلها وحتى اصطدامها بقدمه ٠,٣ ثانية. أوجد :

أ) السرعة الابتدائية.

ب) الارتفاع الذى وصلت إليه الكرة بعد أن ركلها الطالب.

٦ من أعلى تل ارتفاعه ٩,٨ أمتار قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ٤,٩ م/ث أوجد:
أ سرعة الجسم عند لحظة وصوله إلى أسفل التل.
ب الزمن الذى استغرقه للوصول إلى أسفل التل.

٧ قُذف حجر فى بئر بسرعة ٤ م/ث رأسيًّا لأسفل فوصل إلى قاع البئر بعد ٢ ثانية. أوجد:
أ عمق البئر.
ب سرعة الحجر عند تصادمه بقاع البئر.

٨ قذف جسيم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ١٤ م/ث من نقطة على ارتفاع ٣٥٠م عن سطح الأرض. أوجد الزمن الذى يأخذه الجسم؛ حتى يصل إلى سطح الأرض.

٩ قذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى من نافذة فوصلت إليها بعد ٤ ثوان من لحظة القذف ووصلت إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوان من لحظة القذف. أوجد
أ سرعة قذف الكرة.
ب أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة من نقطة القذف.
ج ارتفاع النافذة عن سطح الأرض.

١٠ من قمة برج ارتفاعه ٨٠,٥ مترًا قذف جسم رأسيًّا لأعلى بسرعة ٨,٤ م/ث. أوجد :
أ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم من نقطة القذف.
ب الزمن الذى يستغرقه الجسم وهو هابط حتى تصبح سرعته ١١,٢م/ث.
ج زمن وصول الجسم إلى نقطة القذف.
د زمن وصول الجسم إلى سطح الأرض.

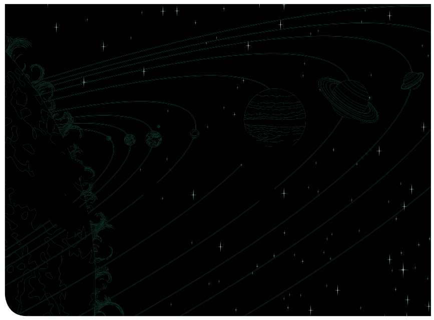
١١ من أعلى تل ارتفاعه ١٤٠م قذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى ، فوجد أنها قطعت فى الثانية الثالثة مسافة ١٠,٥ أمتار. أوجد:
أ السرعة التى قذفت بها الكرة.
ب أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة.
ج الزمن الذى استغرقته الكرة فى الوصول إلى سطح الأرض.

تفكير ابداعى:

١٢ سقط جسم من ارتفاع ٦٠ مترًا من سطح الأرض، وفى نفس اللحظة قذف جسم آخر رأسيًّا لأعلى من سطح الأرض بسرعة ٢٠م / ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية. أوجد هذا الزمن، ثم أوجد المسافة التى قطعها كل من الجسمين خلال هذه الفترة الزمنية، ثم اذكر هل الجسمان لحظة التقابل متحركان فى اتجاهين متضادين أم فى نفس الاتجاه؟

قانون الجذب العام

Universal gravitation law



فكر و ناقش

ماذا يحدث لحركة القمر لو فَقدت الأرض قوة جاذبيتها للقمر؟ بالتأكيد سيسلك مسارًا آخر بدلًا من أن يكون مساره شبه دائرى حول الأرض.

لقد أدرك نيوتن أن القوى المسئولة عن جاذبية الأرض للقمر وجاذبية الشمس للكواكب إنما هى حالة خاصة من الجذب العام بين الأجسام.

وسوف تتعرف الآن على قانون الجذب العام لنيوتن الذى نشره فى بحثه الرياضى مبادئ الفلسفة الطبيعية عام ١٦٨٧م حيث ذكر نيوتن أن:

كل الأجسام فى الكون تتجاذب مع الأجسام الأخرى بتأثير قوة مباشرة تتناسب طرديًّا مع كتلتها وعكسيًّا مع مربع المسافة بين مركزيهما.

فإذا كان لدينا كتلتان $ك_1$ ، $ك_2$ وتفصل بين مركزيهما مسافة ف فإن مقدار قوة الجذب بينهما تعطى بالعلاقة: $\boxed{ق = ث \times \frac{ك_1 ك_2}{ف^2}}$ حيث

$ك_1$ ، $ك_2$ مقاستان بالكيلوجرام ، ف مقاسة بالمتر ، ث هو ثابت الجذب العام.

تعريف ثابت الجذب العام: *gravitational constant*

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين، مقدار كل منهما ١ كيلو جرام، والمسافة بين مركزيهما ١ متر ويساوى تقريبًا $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . متر^٢ / كجم^٢.

تعبير شفهى:

١- اذكر العوامل التى تتوقف عليها قوة التجاذب بين جسمين.

فكر:

١- ماذا يحدث لقوة الجذب المتبادلة بين جسمين إذا ازدادت المسافة بينهما؟

٢- لماذا لا تظهر قوى التجاذب المادى بين الأجرام السماوية بوضوح؟

مثال

(١) كرتان كتلة الأولى ٥,٢ كجم وكتلة الثانية ٠,٢٥ كجم، وضعت الكرتان، بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٥٠سم. احسب قوة التجاذب بينهما ، علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوى $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^٢ / كجم^٢.

سوف تتعلم

- قانون الجذب لنيوتن.
- تعريف ثابت الجذب العام.
- المقارنة بين عجلتى الجاذبية على سطحى كوكبين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جذب عام
  Universal gravitation
- ثابت الجذب العام
  Gravitational constant
- قوة الجذب.
  Attraction force

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
  Scientific calculator

الحل

$ك_١ = ٥,٢$ كجم ، $ك_٢ = ٠,٢٥$ كجم ، $ف = \frac{١}{٢}$ م ، ث = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.م^٢ / كجم^٢

$\because و = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$ $\quad \therefore و = \frac{٥,٢ \times ٠,٢٥}{\frac{١}{٤}} \times ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$

$و = ٣,٤٦٨٤ \times ١٠^{-١٠}$ نيوتن (وهى قوة صغيرة جدًّا).

حاول أنْ تحل

(١) إذا علمت أن كتلة الأرض ٦×١٠^{٢٤} كجم وكتلة القمر ٧×١٠^{٢٢} كجم والمسافة بين مركزيهما ٣×١٠^{٦} متر وثابت الجذب العام $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^٢ / كجم^٢. أوجد قوة جذب الأرض للقمر.

مثال

(٢) قمر صناعى كتلته ك كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦×١٠^{٢٤} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم أوجد ك لأقرب كجم علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوى $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.م^٢ / كجم^٢، قوة جذب الأرض للقمر هى ١٧٣١٠ نيوتن.

الحل

$ك_١ = ك$ ، $ك_٢ = ٦ \times ١٠^{٢٤}$ ، $ف = (٦٣٦٠ + ٤٤٠) \times ١٠٠٠$ م $\qquad$ وبالتعويض فى القانون: $ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

$$١٧٣١٠ = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{ك \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}{(٦٨٠٠ \times ١٠٠٠)^٢}$$

أىْ أنَّ: $ك = \frac{١٧٣١٠ \times (٦٨٠٠ \times ١٠٠٠)^٢}{٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}$ $\qquad$ $ك = ٢٠٠٠,٠٣٥٩٨٢ \simeq ٢٠٠٠$ كجم

(1 7 3 1 0 × (6 8 0 0 × 1 0 0 0)
x^2) ÷ (6 . 6 7 × 1 0 $x^{■}$ - 1 1 × 6 × 1
0 $x^{■}$ 2 4 ►) =

حاول أنْ تحل

(٢) قمر صناعى كتلته ١٥٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٥٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦×١٠^{٢٤} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم.

أوجد قوة جذب الأرض للقمر بالنيوتن علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوى $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^٢ / كجم^٢

مثال **حساب كتلة الأرض**

(٣) احسب كتلة الأرض بوحدة كجم بفرض أن جسمًا كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها. علمًا بأن طول نصف قطر الأرض ٦٣٦٠ كم، ث = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^٢ / كجم^٢

الحل

قوة جذب الأرض للجسم = ك ء (حيث ك = ١ كجم ، ء = ٩,٨ م / ث^٢)

$و = ١ \times ٩,٨ = ٩,٨$ نيوتن.

نصف قطر الأرض = ٦٣٦٠ × ١٠٠٠ متر ، ث = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}

بتطبيق قانون الجذب العام: $ق = ث \times \frac{ك_{١} ك_{٢}}{ف^{٢}}$

$$٩,٨ = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١ \times ك_{للأرض}}{(٦٣٦٠ \times ١٠٠٠)^{٢}}$$

$$\text{كتلة الأرض (ك)} = \frac{٩,٨ \times (٦٣٦٠ \times ١٠٠٠)^{٢}}{٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}} \simeq ٦ \times ١٠^{٢٤} \text{ كجم}$$

أضف إلى معلوماتك

قوة جذب الأرض لجسم كتلته ك كجم = ك ى = ٩,٨ ك

تفكير ناقد: هل تتغير كتلة الأرض فى المثال السابق إذا كانت كتلة الجسم الموضوع فوق سطحها يساوى ١٠٠٠ كجم؟ فسِّر ذلك.

حاول أنْ تحل

٣ احسب نصف قطر الأرض بفرض أن جسمًا كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها علمًا بأن كتلة الأرض تساوى ٦×١٠^{٢٤} كجم وثابت الجذب العام يساوى $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}

مثال

تعيين عجلة الجاذبية الأرضية (ى)

٤ احسب عجلة الجاذبية الأرضية بوحدة م / ث^{٢} لجسم كتلة ١ كجم وضع فوق سطحها. علمًا بأن كتلة الأرض تساوى ٦×١٠^{٢٤} كجم، نصف قطر الأرض يساوى ٦٣٦٠ كم

الحل

∵ قوة جذب الأرض للجسم = ك ى ∴ ق = ١ × ى **أى أنَّ** ق = ى

$$∵ ق = ث \times \frac{ك_{١} ك_{٢}}{ف^{٢}} \qquad ∴ ى = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١ \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}{(٦٣٦٠ \times ١٠٠٠)^{٢}} \qquad ى \simeq ٩,٨٩٣٧٩ \text{ م / ث}^{٢}$$

حاول أنْ تحل

٤ فى المثال السابق احسب عجلة الجاذبية الأرضية بوحدة م/ث^{٢} إذا كانت كتلة الجسم الموضوع على سطحها ١٠٠ كجم - ماذا تلاحظ؟

نشاط

المقارنة بين عجلتى الجاذبية على سطحى كوكبين:

إذا كانت $ى_{١}$ ، $ى_{٢}$ عجلتا الجاذبية لكوكبين كتلتيهما بالكجم ، $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ ، $نق_{١}$ ، $نق_{٢}$ نصفى قطريهما بالمتر على الترتيب.

فيمكن استنتاج العلاقة الآتية:

$$\boxed{\frac{ى_{١}}{ى_{٢}} = \frac{ك_{١}}{ك_{٢}} \times \frac{نق_{٢}^{٢}}{نق_{١}^{٢}}}$$

مثال

٥ إذا كانت كتلة الأرض قدر كتلة القمر ٨١ مرة وقطراهما ١٢٧٥٦ كم ، ٣٤٧٦ كم على الترتيب فإذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية ٩,٨ م / ث^{٢} فكم يكون تسارع الجاذبية على سطح القمر؟

الحل

نفرض أن كتلة القمر ك كجم فتكون كتلة الأرض = ٨١ ك كجم

$\text{نق}_{١}$ = ٦٣٧٨ كم ، $\text{نق}_{٢}$ = ١٧٣٨ كم ، $\text{ى}_{١}$ = ٩,٨ م / $\text{ث}^{٢}$ ، $\text{ى}_{٢}$ = ؟

$\because \dfrac{\text{ى}_{١}}{\text{ى}_{٢}} = \dfrac{\text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٢}} \times \dfrac{\text{نق}_{٢}^{٢}}{\text{نق}_{١}^{٢}}$ $\therefore \dfrac{٩,٨}{\text{ى}_{٢}} = \dfrac{\text{٨٠ ك}}{\text{ك}} \times \left(\dfrac{١٧٣٨}{٦٣٧٨}\right)^{٢}$

وبالتبسيط: $\therefore$ ى للقمر $\simeq$ ١,٦٣ م / $\text{ث}^{٢}$

حاول أنْ تحل

٥ إذا علمت أن كتلة الأرض $٥,٩٧ \times ١٠^{٢٤}$ كجم ونصف قطرها $٦,٣٤ \times ١٠^{٦}$ م وكتلة القمر $٧,٣٦ \times ١٠^{٢٢}$ ونصف قطره $١,٧٤ \times ١٠^{٦}$ م فأوجد النسبة بين الجاذبية على سطح القمر إلى سطح الأرض.

تمـــاريـن الدرس الرابع

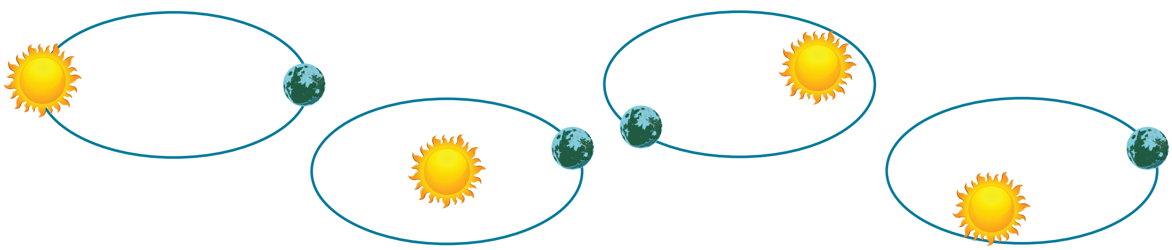
تنبيه: اعتبر ثابت الجذب العام لنيوتن: ث = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.متر^{٢} / كجم^{٢}

١ ماذا يحدث لوزنك كلما ابتعدت أكثر عن سطح الأرض؟

٢ لماذا لا تظهر قوة الجاذبية بين الأجسام التى نشاهدها يوميًّا؟

٣ ماذا يحدث لقوة الجذب العام بين جسمين عند مضاعفة المسافة بين مركزيهما؟

٤ أيٌّ من المدارات الموضحة بالشكل التالى يُعتبر مدارًا ممكنًا لكوكب ما؟



٥ اختيار من متعدد: كوكب لديه قمران متساويا الكتلة، القمر الأول فى مدار دائرى نصف قطره نق، القمر الثانى فى مدار دائرى نصف قطره ٢نق. إن مقدار قوة الجاذبية التى يؤثر بها الكوكب على القمر الثانى هى:

أ أكبر أربع مرات من القوة المؤثرة على القمر الأول.

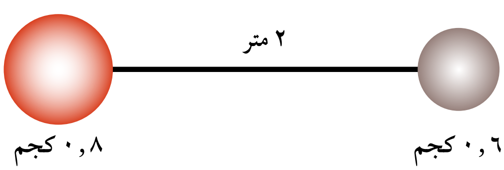
ب أكبر مرتين من القوة المؤثرة على القمر الأول.

جـ تساوى القوة المؤثرة على القمر الأول.

د نصف القوة المؤثرة على القمر الأول.

هـ ربع القوة المؤثرة على القمر الأول.

٦ فى الشكل المقابل:
إذا كان البعد بين مركزى كرتين ٢م وكانت كتلة إحداهما ٠,٨ كجم، وكتلة الأخرى ٠,٦ كجم فما قوة التجاذب بينهما؟



٧ كرتان متماثلتان كتلة كل منهما ٦,٨ كجم والبعد بين مركزيهما ٢١,٨ سم، ما قوة التجاذب بينهما؟

٨ احسب قوة التجاذب بين جسمين كتلتيهما ١٠ كجم ، ١٥ كجم والمسافة بينهما ٢ أمتار.

٩ قمر صناعى كتلته ٢٠٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦×١٠^{٢٤} كجم . أوجد قوة جذب الأرض للقمر علمًا بأن نصف قطر الأرض ٦٣٦٠ كم.

١٠ إذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية (ى) هى ١٠ م / ث^{٢} ونصف قطر الأرض يساوى $٦,٣٦ \times ١٠^{٦}$ متر . احسب كتلة الأرض.

١١ احسب قوة التجاذب المتبادلة بين الشمس والأرض إذا علمت أن الأرض تسير فى مدار شبه دائرى حول الشمس وأن كتلة الأرض تساوى ٦×١٠^{٢٤} كجم، وكتلة الشمس تساوى ٩×١٠^{٢٩} كجم، والمسافة بين مركزيهما تساوى $١,٥ \times ١٠^{١١}$ متر.

١٢ إذا علمت أن كتلة الأرض تساوى $٥,٩٧ \times ١٠^{٢٤}$ كجم ونصف قطرها $٦,٣٤ \times ١٠^{٦}$ متر وكتلة القمر تساوى $٧,٣٦ \times ١٠^{٢٢}$ كجم فأوجد طول نصف قطر القمر إذا كانت الجاذبية على سطح الأرض ستة أمثالها على سطح القمر.

١٣ إذا علمت أن كتلة الأرض $٦,٠٦ \times ١٠^{٢٤}$ كجم ونصف قطرها $٦,٣٦ \times ١٠^{٦}$ متر فأوجد شدة مجال الجاذبية الأرضية .

١٤ كوكب كتلته مساوية ثلاث مرات كتلة الأرض، وقطره يساوى ثلاث مرات قدر قطر الأرض. احسب النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح هذا الكوكب وسطح الأرض.

١٥ أوجد قوة الجذب العام بين كوكبين كتلة الأول ٢×١٠^{٢١} طن وكتلة الثاني $= ٤ \times ١٠^{٢٥}$ طن، والمسافة بين مركزيهما ٢×١٠^{٦} كم.

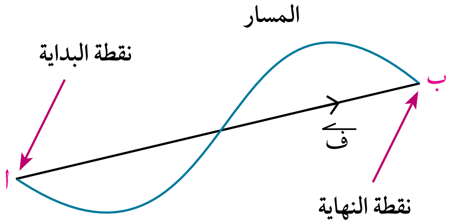
١٦ وضعت قطعة من الحديد على بعد ٥٠سم من أخرى من النيكل كتلتها ٢٥ كجم فكانت قوى التجاذب بينهما ٦×١٠^{-٨} نيوتن ، فكم تكون كتلة الكرة الحديد مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح؟

١٧ الربط بالفضاء: محطة فضائية دولية وزنها على سطح الأرض ٤٢١٩٩٧,٦ نيوتن. أوجد وزنها عندما تكون فى المدار الخارجي على ارتفاع ٣٥٠ كم من سطح الأرض علمًا بأن طول نصف قطر الأرض يساوي $٦,٣٧ \times ١٠^{٣}$ كم و كتلتها $٥,٦ \times ١٠^{٢٤}$ كجم. (إرشاد : القوة بالنيوتن = الكتلة بالكجم × عجلة الجاذبية الأرضية ٩,٨ م/ث^{٢})

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

ملخص الوحدة



متجه الإزاحة

هو المتجه الذى تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أب}}$ التى نقطة بدايتها (أ) ونقطة نهايتها (ب) ويرمز لمتجه الإزاحة $\overleftarrow{\text{أب}}$ بالرمز $\overleftarrow{\text{ف}}$ ، ويرمز لمعيار متجه الإزاحة بالرمز $\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$

متجه الموضع

هو المتجه الذى تنطبق بدايته مع موضع المشاهد (و) ونقطة نهايته مع موضع الجسيم ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{ر}}$

العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزحة:

$$\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ر}} - \overleftarrow{\text{ر}}_{.}$$

متجه السرعة

متجه سرعة جسيم هو المتجه الذى معياره يساوى قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة.

الحركة المنتظمة

هى الحالة التى يكون فيها كل من معيار واتجاه متجه السرعة ثابتًا، أىْ أنَّ: الجسيم يتحرك فى اتجاه ثابت، حيث يقطع مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية.

وتكون العلاقة بين القياسيين الجبريين للمتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ فى الحركة المنتظمة هى: $\boxed{\text{ف} = \text{ع ن}}$

متجه السرعة المتوسطة

إذا تحرك جسيم عند لحظتين زمنيتين ن_1 ، ن_2 عند الموضعين أ ، ب على الترتيب وكان $\overleftarrow{\text{ف}}$ هو متجه الإزاحة فى الفترة الزمنية $(\text{ن}_2 - \text{ن}_1)$ فإن $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}}$ يعرف بمتجه السرعة المتوسطة لهذا الجسيم خلال تلك الفترة الزمنية ويكون:

$$\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \frac{\overleftarrow{\text{ر}}_2 - \overleftarrow{\text{ر}}_1}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1} = \frac{\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$$

السرعة اللحظية:

إذا تحرك جسيم بسرعة متغيرة من خلال منحنى المسافة - الزمن فإن ميل المماس عند نقطة ما على المنحنى عند لحظة زمنية يعرف بالسرعة اللحظية.

السرعة النسبية:

السرعة النسبية لجسيم (ب) بالنسبة لجسيم آخر (أ) هى السرعة التى يبدو أن الجسيم (ب) يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (أ) فى حالة سكون، باعتبار أن $\overleftarrow{ع_{أ}}$ ، $\overleftarrow{ع_{ب}}$ هما متجها سرعة لجسمين أ، ب وأن متجه سرعة ب بالنسبة أ هى $\overleftarrow{ع_{بأ}}$ فإن $\boxed{\overleftarrow{ع_{بأ}} = \overleftarrow{ع_{ب}} - \overleftarrow{ع_{أ}}}$

الحركة منتظمة التغير:

هى الحركة التى يحدث فيها تغير قيمة السرعة بمرور الزمن و يسمى بالتسارع (العجلة) ووحدة قياسه هى م / ث^{٢}.

$$\text{العجلة (جـ)} = \frac{\text{السرعة النهائية - السرعة الابتدائية}}{\text{الزمن}}$$

الحركة منتظمة التغير:

يقال إن الجسيم يتحرك حركة منتظمة التغير أو بتسارع (عجلة) منتظم إذا كان متجه العجلة ثابتًا مقدارًا واتجاهًا لجميع الأزمنة.

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية (ع) وعجلة ثابتة (جـ) وأصبحت سرعته (ع) بعد فترة زمنية (ن) قطع خلالها مسافة (ف) فإن:

- العلاقة بين السرعة والزمن: $ع = ع_{.} + جـ ن$
- العلاقة بين المسافة والزمن: $ف = ع_{.} ن + \frac{١}{٢} جـ ن^{٢}$
- العلاقة بين السرعة والمسافة: $ع^{٢} = ع_{.}^{٢} + ٢ جـ ف$

ويلاحظ أن هذه العلاقات تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد إحداهما بمعلومية الثلاثة الآخرين.

- المساحة تحت منحنى السرعة - الزمن تساوى إزاحة الجسم المتحرك.
- السرعة المتوسطة لجسيم خلال فترة زمنية ما تساوى سرعته اللحظية فى منتصف هذه الفترة.

قوانين الحركة الرأسية للأجسام:

تخضع قوانين الحركة الرأسية لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة مع استخدام الرمز (ء) الدالة على **التسارع الذى يسقط به الأجسام سقوطًا حرًّا** بدلًا من الرمز (جـ) وبذلك تأخذ القوانين الصورة الآتية:

$\text{ع} = \text{ع}_{.} + \text{ء ن}$ ، $\text{ف} = \text{ع}_{.}\,\text{ن} + \frac{1}{2}\,\text{ء ن}^{2}$ ، $\text{ع}^{2} = \text{ع}_{.}^{2} + 2\,\text{ء ف}$

إذا قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى تحت تأثير الجاذبية الأرضية وعاد إلى نقطة القذف فإن:

- سرعة الجسم فى أثناء الصعود تكون موجبة وفى أثناء الهبوط تكون سالبة.
- سرعة الجسم عند أقصى ارتفاع تساوى صفرًا.
- زمن الصعود للجسم يساوى زمن الهبوط.
- زمن أقصى ارتفاع (ن) = $\frac{\text{ع}_{.}}{\text{ء}}$
- أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم (ف) = $\frac{\text{ع}_{.}^{2}}{2\,\text{ء}}$
- مقدار سرعة الجسم التى يعود بها إلى نقطة القذف تساوى مقدار سرعة القذف بإشارة مخالفة.
- إزاحة الجسم خلال فترة زمنية ما ليست بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التى قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

قانون الجذب العام لنيوتن

إذا كان المسافة (ف) بين كتلتين ك_{1}، ك_{2} فإن مقدار قوة الجذب بينهما (ق) تعطى بالعلاقة : $\text{ق} = \text{ث} \times \frac{\text{ك}_{1}\,\text{ك}_{2}}{\text{ف}^{2}}$

حيث ك_{1} ، ك_{2} مقاساتان بالكيلو جرام ، ف بالمتر.

ثابت الجذب العام:

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين مقدار كل منها ١ كجم والمسافة بين مركزيها ١ متر ويساوى تقريبًا $6{,}67 \times 10^{-11}$ نيوتن . متر^{2}/ كجم^{2}

@ معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:

اختبار تراكمي

اختيار بين متعدد

(١) قوتان مقدارايهما ٨ ، ١٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية أوجد:

أ مقدار أكبر محصلة لهما.

ب مقدار أصغر محصلة لهما.

جـ مقدار واتجاه محصلتهما عندما يكون قياس الزاوية بينهما ١٢٠°.

(٢) القوى ١٢ ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ٢$\sqrt{٢}$ ، ٨ ث جم تؤثر فى نقطة مادية نحو الشرق ، الشمال الغربي والجنوبي الغربي والجنوب على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٣) علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميلان على الرأسي بزاوتين قياسيهما هـ°، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان مقدار الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن ، مقدار الشد فى الخيط الثاني ١٢$\sqrt{٣}$ نيوتن . أوجد هـ° و مقدار الوزن و.

(٤) جسم وزنه ٩٠ث كجم موضوع على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°. حفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة ق تؤثر على الجسم إلى أعلى فى اتجاه يميل على المستوى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد مقدار ق ورد فعل المستوى.

(٥) قضيب منتظم $\overline{\text{ا ب}}$ يتصل طرفه ا بمفصل مثبت فى حائط رأسي. اثرت فى الطرف الآخر ب قوة أفقية فاتزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥°. فإذا كان وزن القضيب ٤ث كجم و يؤثر فى منتصفه . أوجد مقدار القوة و رد فعل المفصل على القضيب.

(٦) تتحرك سيارة شرطة (أ) على طريق مستقيم بسرعة ٢٥ كم/س. شاهدت سيارة أخرى (ب) تتحرك على نفس الطريق بسرعة ٧٥ كم/س. أوجد سرعة السيارة (ب) بالنسبة للسيارة (أ) عندما:

أ السيارتان تتحركان فى نفس الاتجاه.

ب السيارة (ب) تتحرك فى اتجاه مضاد للسيارة (أ).

(٧) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٥سم/ث^{٢} ، وفى نفس اتجاه السرعة الابتدائية لهذا الجسيم وقدرها ٤٠سم/ث. أوجد:

أ سرعة الجسم و إزاحته فى نهاية ٢٤ ثانية من بدء الحركة.

ب سرعة الجسم بعد أن قطع مسافة ٥٦ مترًا من البداية.

(٨) تتحرك سيارة فى طريق مستقيم بتقصير منتظم مقداره ١٤ سم/ث^{٢} ، فتوقفت عن الحركة بعد مرور ٢٠ ثانية من لحظة البداية. أوجد:

أ مقدار سرعتها الابتدائية.

ب المسافة التي قطعتها خلال نصف دقيقة.

ج المسافة التي قطعتها حتى سكنت.

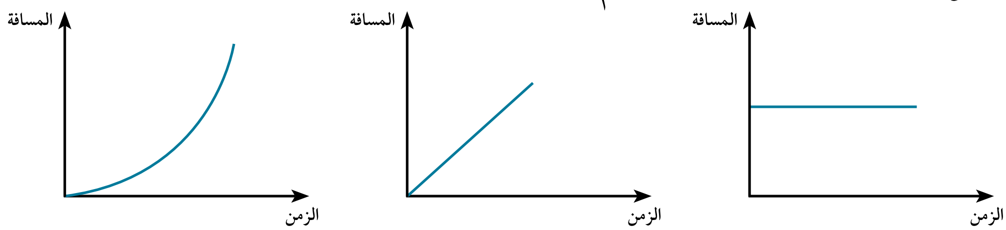
(٩) سقط جسم رأسيًّا إلى أسفل من ارتفاع ما نحو أرض رخوة فغاص فيها مسافة ١٤سم قبل أن يسكن فإذا كان الجسم يتحرك داخل الأرض بتقصير منتظم مقداره ٦٣م/ث^{٢} فما هو الارتفاع الذي سقط منه الجسيم.

(١٠) قذف جسيم من قمة برج رأسيًّا إلى أعلى بسرعة مقدارها ٢٤,٥ م/ث فوصل إلى سطح الأرض بعد ٨ ثوان.
أوجد:

أ ارتفاع البرج. ب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض.

ج المسافة التي يقطعها الجسم خلال هذه المدة.

(١١) أى من الأشكال الآتية تمثل حركة جسم بسرعة منتظمة



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

(١٢) تتساقط قطرات الزيت من إحدى السيارات المتحركة من اليسار إلى اليمين كما بالشكل

بملاحظة قطرات الزيت فإن السيارة تتحرك:

١ - بسرعة منتظمة. ٢ - بعجلة موجبة. ٣ - بعجلة سالبة. ٤ - بعجلة سالبة ثم سرعة منتظمة.

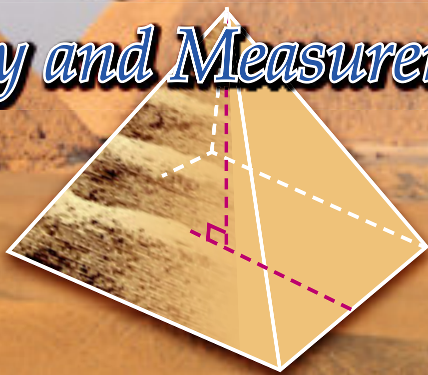
إن لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الأستعانة بالجدول التالي :

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
ارجع إلى	٨٠	١٦	٢٦	٣٤	٣٧	٣٧	٦٠	٦٦	٧٠	٧٦	٧٧	٥٦	٦٦

الوحدة الثالثة

الهندسة و القياس

Geometry and Measurement



مقدمة الوحدة

نشأت الهندسة فى بدايتها مرتبطة بالناحية العملية، فاستخدمها قدماء المصريين فى تحديد مساحات الأراضى وبناء الأهرامات والمعابد فأوجدوا مساحات بعض الأشكال وحجوم بعض المجسمات. وعندما زار طاليس (٦٤٠ - ٥٤٦ ق.م) الإسكندرية راقت له طرق المصريين فى قياس الأرض وأطلق عليها كلمة Geo-metron المأخوذة عن اللغة اليونانية والمكونة من كلمتى Geo وتعنى الأرض، metron وتعنى قياس واهتم بدراسة الهندسة على أنها تعبيرات صريحة مجردة خاضعة للبرهان.

تطورت الهندسة على يد الإغريق (طاليس - فيثاغورث- إقليدس) بظهور سلسلة من النظريات المبنية على بضع مسلمات وتعاريف مرتبة فى نظام منطقى دقيق ضمنه إقليدس فى كتابه الأصول المكون من ١٣ جزءًا، واستمرت الإسكندرية منارة المعرفة إلى أن جاء العرب، وحفظوا ذلك التراث بترجمته إلى اللغة العربية وأضافوا إليه إضافات كثيرة ونقلوه إلى أوربا فى القرن الثانى عشر.

فى القرن السادس عشر بدأ عصر النهضة فى الرياضيات وميلاد علوم جديدة فقدم ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) أسس الهندسة التحليلية وقام بتمثيل المعادلات بأشكال بيانية وهندسية والتعبير عن الأشكال بمعادلات، واستخلص معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} كما توصل أويلر Euler إلى وجود علاقة بين عدد الأوجه وعدد الرؤوس وعدد الأحرف لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة وهى:

عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يُعرف النقطة والمستقيم والمستوى فى الفراغ.
- يتعرف بعض المجسمات (الهرم - الهرم المنتظم - الهرم القائم - المخروط - المخروط القائم) ، وخواص كل منها.
- يستنتج المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل من الهرم القائم - المخروط القائم.
- يستنتج حجم كل من الهرم القائم - المخروط القائم.
- يوجد معادلة الدائرة بدلالة إحداثيات كل من مركزها، وطول نصف قطرها.
- يستنتج الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- يعين إحداثيات كل من مركز الدائرة، وطول نصف قطرها بمعلومية الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- ينمذج مواقف رياضية باستخدام قوانين الهندسة.

المصطلحات الأساسية

- النقطة The point
- المستقيم Straight line
- المستوى plane
- الفراغ Space
- رأس Vertex
- قاعدة Base
- محور Axis
- دائرة Circle
- مركز Center
- نصف قطر Radius
- قطر Diameter
- هرم Pyramid
- مخروط Cone
- وجه جانبى Lateral face
- حرف جانبى Lateral edge
- ارتفاع Height
- ارتفاع جانبى Slant height
- هرم منتظم Regular pyramid
- هرم قائم Right pyramid
- شبكة هرم Net of a pyramid
- مخروط دائرى قائم Right circular cone
- مساحة جانبية Lateral area
- مساحة كلية (سطحية) Surface area

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): المستقيمات والمستوى

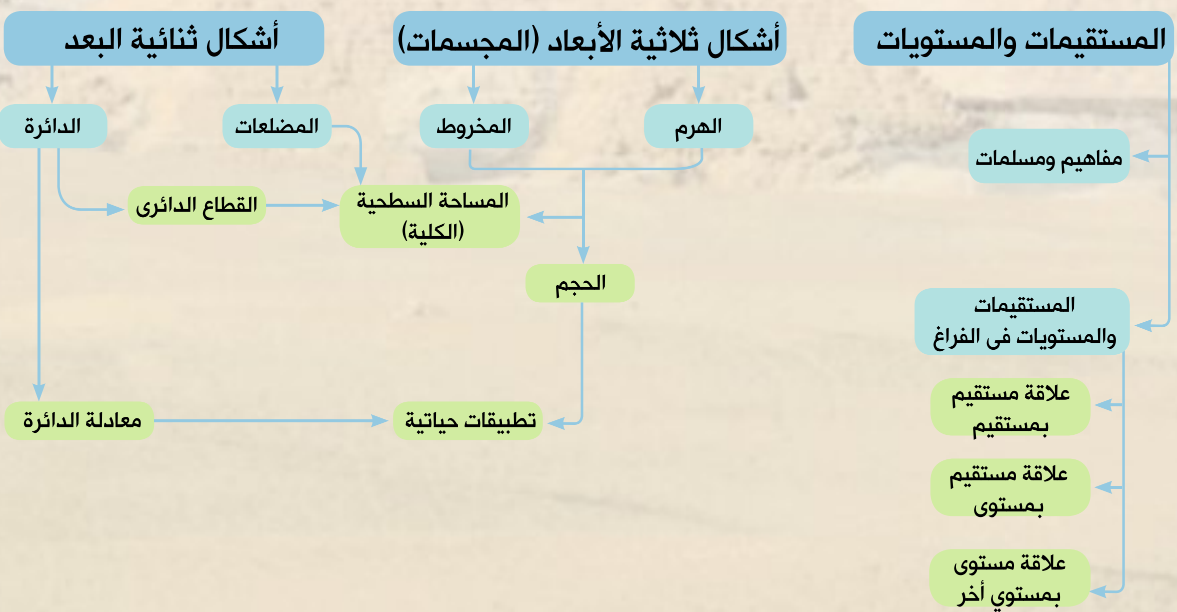
الدرس (٣ - ٢): الهرم والمخروط.

الدرس (٣ - ٣): المساحة الجانبية والمساحة الكلية للهرم والمخروط.

الدرس (٣ - ٤): حجم الهرم والمخروط

الدرس (٣ - ٥): معادلة الدائرة.

مخطط تنظيمى للوحدة



٣ - ١

المستقيمات والمستويات فى الفراغ

The lines and the planes in a space

سوف تتعلم

- مفاهيم ومسلمات هندسية
- العلاقة بين مستقيمين فى الفراغ
- العلاقة بين مستقيم ومستوى فى الفراغ
- الأوضاع المختلفة لمستويين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

النقطة	Point
المستقيم	Straight line
المستوى	Plane
الفراغ	Space

الأدوات والوسائل

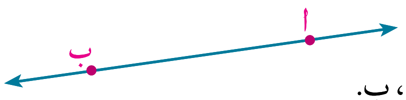
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب
- أدوات هندسية

فكر و ناقش

سبق أن درست بعض المفاهيم الرياضية حول كل من النقطة، والمستقيم، والمستوى فهل يمكنك الإجابة عن الأسئلة الآتية:

- بِمَ تمثل مدينتك على خريطة جمهورية مصر العربية؟
- كم عدد النقاط التى تكفى لرسم خط مستقيم؟
- ماذا يمثل لك كل من: أرضية الفصل الدراسى - سطح المنضدة - سطح الحائط.
- ماذا يمثل لك كل من: سطح الكرة - سطح قبة المسجد - سطح أسطوانة الغاز.

نشاط



ارسم نقطتين مختلفتين على ورق مقواة مثل أ ، ب.
استخدم المسطرة؛ لتصل النقطتين أ، ب ومدهما على نفس الاستقامة.
حاول أن ترسم مستقيمًا آخر يمر بنفس النقطتين أ، ب هل يمكنك ذلك؟
ماذا نستنتج من هذا النشاط؟

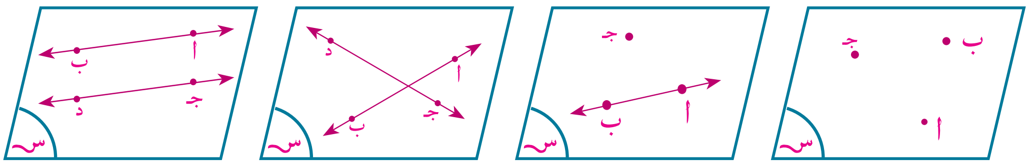
نشاط

المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ على حافة ورقة بيضاء كما بالشكل الجانبى حرك مستوى الورقة؛ لتدور حول $\overleftrightarrow{أب}$ حتى تنطبق الورقة على نقطة أخرى جـ فى الفراغ.

- كم وضعًا تنطبق فيه النقطة جـ على مستوى الورقة خلال دوران الورقة دورة كاملة؟

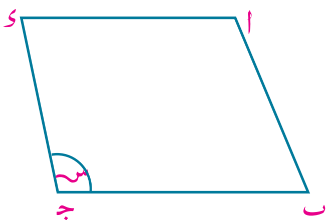
مسلمات هندسية:

- يتحدد الخط المستقيم تحديدًا تامًّا إذا علم عليه نقطتان مختلفتان.
- يتحدد المستوى تحديدًا تامًّا بإحدى الحالات الآتية:



ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة — مستقيم ونقطة لاتنتمى إليه — مستقيمان متقاطعان — مستقيمان متوازيان غير منطبقين

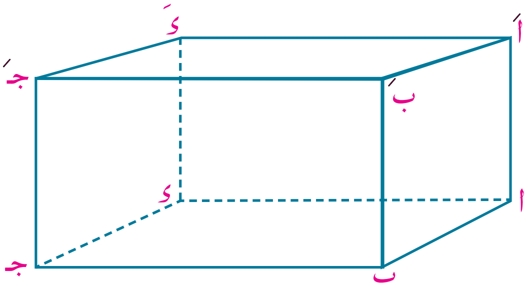
- أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لانهائى من المستويات.



المستوى Plane: هو سطح لاحدود له بحيث إن المستقيم المار بأى نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح. ففى الشكل الجانبي يرمز للمستوى بالرمز س أو ص أو ع أو.. أو يرمز له بثلاثة أحرف على الأقل مثل أ ب جـ ،.... وهو بلا حدود من جميع جهاته و يمثل على شكل مثلث أو مربع أو مستطيل أو متوازى أضلاع أو دائرة أو...

الفراغ (الفضاء) Space: هو مجموعة غير منتهية من النقاط، وهو الذى يحتوى جميع الأشكال والمستويات والمجسمات محل الدراسة.

مثال



١ تأمل الشكل المقابل، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

أ اكتب ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة أ.

ب اكتب المستقيمات التى تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

جـ اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ.

د اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

الحل

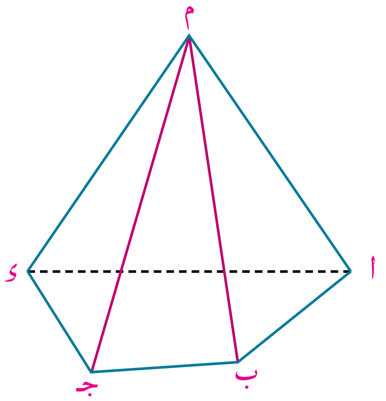
أ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$

ب $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

جـ أ ب بَ ، أ ب جـ ، أ د دَ

د أ ب بَ، أ ب جـ ، أ ب جـَ دَ

حاول أن تحل



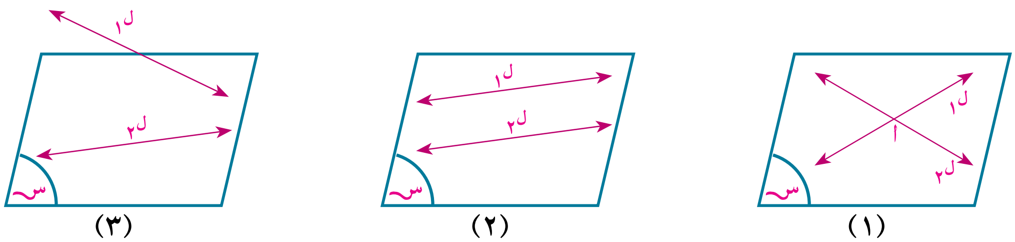
١ تأمل الشكل المقابل ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

أ كم عدد المستقيمات بالشكل؟ اذكر المستقيمات التى تمر بنقطةأ.

ب كم عدد المستويات بالشكل؟ اذكر ثلاثة منها تمر بالنقطةأ.

العلاقة بين مستقيمين فى الفراغ

تأمل الأشكال الآتية ثم أكمل:



١- المستقيمان المتقاطعان: هما مستقيمان يقعان فى نفس .... و يشتركان فى ....

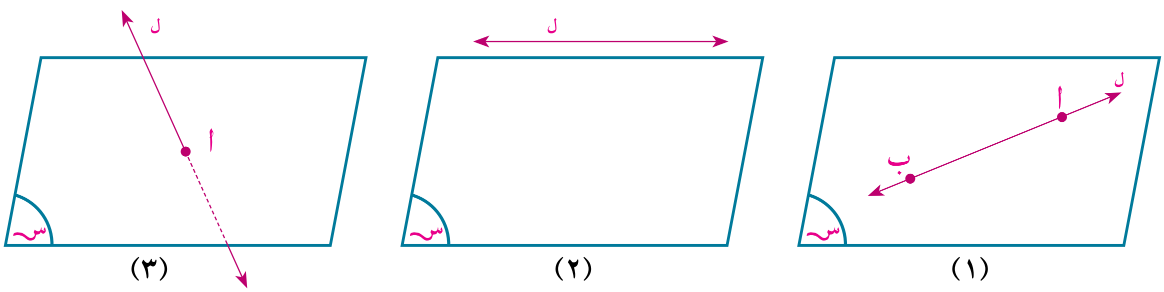
٢- المستقيمان المتوازيان: هما مستقيمان يقعان فى نفس .... ولايشتركان فى ....

٣- المستقيمان المتخالفان: هما مستقيمان لايمكن أن يحتو يهما ....

تفكير ناقد: المستقيمان المتخالفان غير متقاطعين وغير متوازيين. فسر ذلك.

العلاقة بين مستقيم ومستوى فى الفراغ

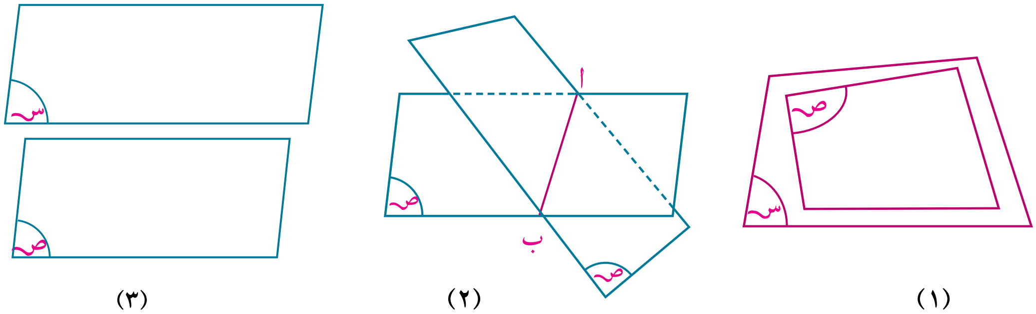
تأمل الأشكال الآتية ثم أكمل:



- المستقيم مواز للمستوى كما فى شكل ....
- المستقيم قاطع للمستوى كما فى شكل ....
- المستقيم محتوى فى المستوى كما فى شكل ....

الأوضاع المختلفة لمستويين

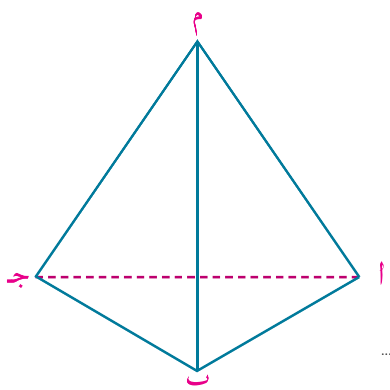
تأمل الأشكال الآتية :



- المستويان سـ ، صـ منطبقان كما فى الشكل(١) و يشتركان فى جميع النقط ، سـ= صـ
- المستويان سـ ، صـ متقاطعان كما فى الشكل(٢) و يشتركان فى خط مستقيم ، سـ ∩ صـ = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$
- المستويان سـ ، صـ متوازيان كما فى الشكل (٣) ولا يشتركان فى أى نقطة سـ ∩ صـ = ϕ

مثال

٢ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل مايأتى:



أ المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب جـ = ...

ب المستوى م ب جـ ∩ المستوى أ ب جـ = ...

جـ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ∩ المستوى أ ب جـ = ...

د $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ...

هـ المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب جـ ∩ المستوى م أ جـ = ...

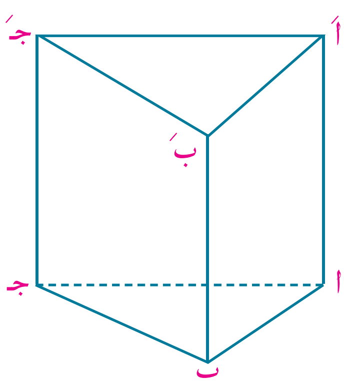
الحل

أ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ب $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ جـ {ب}

د ϕ هـ {م}

حاول أن تحل

٢ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل مايأتى:



أ المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى ب جـ جـَ بَ = ...

ب المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أَ بَ جـَ = ...

جـ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أَ جـَ}}$ = ...

د $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$ ∩ المستوى أ ب جـ = ...

تمـاريـن (٣ – ١)

أكمل مايأتى:

١ إذا كان المستقيم ل // المستوى سـ ، فإن ل ∩ سـ = ...

٢ إذا كان المستقيم ل ⊃ المستوى سـ فإن ل ∩ سـ = ...

٣ إذا كان المستقيم $ل_1$ // المستقيم $ل_2$ فإن $ل_1 \cap ل_2$ = ...

٤ إذا كان سـ ، صـ مستويان حيث سـ ∩ صـ = ϕ فإن سـ............صـ

٥ المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان ليسا .... أو ....

٦ **اذكر عدد المستويات التى تمر بكل من:**

أ نقطة واحدة معلومة.

ب نقطتين مختلفتين .

جـ ثلاث نقط على استقامة واحدة.

د ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

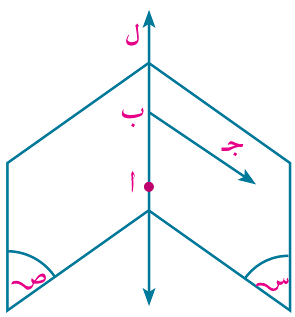
٧ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل باستخدام أحد الرموز (∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄)

أ ل .... سـ

ب ا .... سـ

جـ جـ .... صـ

د $\overleftrightarrow{ب جـ}$ .... صـ



٨ **فى الشكل المقابل:**

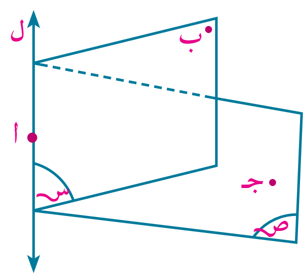
سـ ، صـ مستويان متقاطعان فى المستقيم ل ، ا ∈ ل ، ب ∈ سـ ، ب ∉ صـ ،

جـ ∈ صـ ، جـ ∉ سـ أكمل مايأتى:

أ المستوى سـ ∩ المستوى ا ب جـ = ...

ب المستوى صـ ∩ المستوى ا ب جـ = ...

جـ المستوى سـ ∩ المستوى صـ ∩ المستوى ا ب جـ = ...



٩ **تأمل الشكل المقابل ثم أكمل مايأتى:**

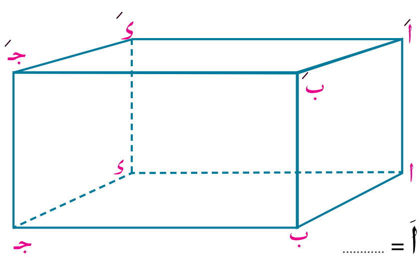
أ المستوى ا ب جـ ء // المستوى ....

ب المستوى ب جـ جـَ بَ // المستوى ....

جـ المستوى ا ب بَ اَ ∩ المستوى ا ب جـ ء = ...

د المستوى ا ب بَ اَ ∩ المستوى ء جـ جـَ ءَ = ...

هـ المستوى ء جـ جـَ ءَ ∩ المستوى ا ب جـ ء ∩ المستوى ا ء ءَ اَ = ...



١٠ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة و علامة (✗) أمام العبارات الخاطئةفيما يلي بفرض أن ل$_١$ ، ل$_٢$ مستقيمان، س،ص مستو يان:

أ إذا كان ل$_١$ ∩ ل$_٢$ = ϕ **فإن** ل$_١$ // ل$_٢$ **أو** ل$_١$ ، ل$_٢$ متخالفان

ب إذا كان ل$_١$ ∩ س = ϕ **فإن** ل$_١$ // س

ج إذا كان ل$_٢$ ∩ س = ل$_٢$ **فإن** ل$_٢$ ⊂ س

د إذا كان ل$_٢$ ⊃ ص **فإن** ل$_٢$ ∩ ص = ϕ

هـ إذا كان س ∩ ص = ϕ **فإن** س // ص

و إذا كان س = ص **فإن** س ، ص منطبقان

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١١ أى أربع نقط ليست فى مستوى واحد تعين لنا:

أ مستو يان ب ثلاث مستويات ج اربع مستويات د لا تعين مستو

١٢ إذا اشترك مستو يان فى نقطتين أ ، ب فإنهما:

أ متطابقان

ب متقاطعان فى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

ج متقاطعان فى مستقيم موازٍ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

د يشتركان فى نقطة ثالثة لا تقع على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

١٣ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ توازي المستوى س إذا كان

أ $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ س = ϕ

ب أ ، ب تقعان فى جهتين مختلفتين من س

ج أ ، ب على بعدين مختلفين من المستوى س

د $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ س = ϕ

١٤ المستقيمان ل$_١$ ، ل$_٢$ متوازيان إذا كان

أ ل$_١$ ∩ ل$_٢$ = ϕ

ب ل$_١$ ∪ ل$_٢$ يقعان من مستوى واحد

ج إذا كان ل$_١$ ∩ ل$_٢$ = ϕ ، ل$_١$ ، ل$_٢$ يجمعهما مستوى واحد.

د إذا كان ل$_١$ ∩ ل$_٢$ = ϕ ، ل$_١$ ، ل$_٢$ لا يجمعهما مستوى واحد.

١٥ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا

أ غير متوازيين.

ب غير منطبقين.

ج لايجمعهما مستوى واحد.

د يقعان فى مستوى واحد.

تفكير ابداعى

١٦ بين بالرسم أنه إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تتوازى أو تتلاقى فى نقطة واحدة:

٣ - ٢

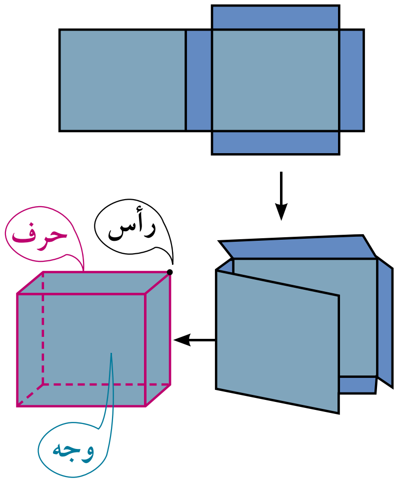
الهرم والمخروط
Pyramid and Cone

سوف تتعلم
- خواص بعض المجسمات الهرم– الهرم المنتظم – الهرم القائم – المخروط – المخروط القائم.
- مفهوم شبكة المجسم واستنتاج خواص المجسم من شبكته – رسم شبكة مجسم.
- نمذجة و حل مشكلات رياضية و حياتية باستخدام خواص الهرم و المخروط القائم.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- هرم Pyramid
- مخروط Cone
- وجه جانبى Lateral face
- حرف جانبى Lateral edge
- ارتفاع Height
- ارتفاع جانبى Slant hieght
- هرم منتظم Regular pyramid
- هرم قائم Right pyramid
- شبكة Net
- مخروط دائرى قائم Right circular cone

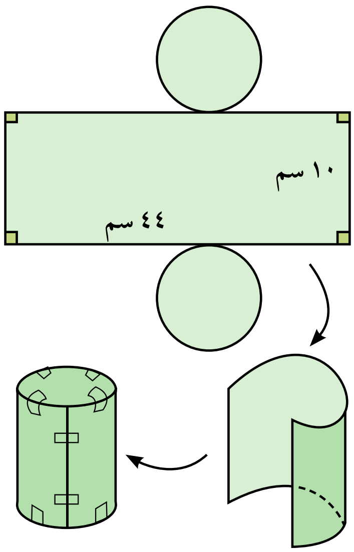
الأدوات والوسائل
- أدوات هندسية
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

فكر و ناقش



تصنع العديد من العبوات بطى ورق الكرتون المسطح إلى أشكال ثلاثية البعد لتعبئة منتجات المصانع قبل تسويقها فتشغل حيزًا من الفراغ ، مثل المكعب ، متوازى المستطيلات ، ...

- كم وجهًا للمكعب؟ وكم رأسًا له؟
- كم حرفًا لمتوازى المستطيلات؟
- هل جميع أوجه المكعب متطابقة؟ فسر إجابتك.

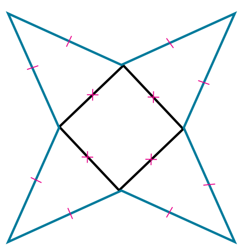


نسمى الشكل الذى يمكن طيه لتكوين مجسم بشبكة المجسم، ومنها نستنتج خواص المجسم.
يبين الشكل المقابل شبكة أسطوانة دائرية قائمة ، لاحظ:

١ - **قاعدتى الأسطوانة** متطابقتين، وكل منهما على شكل دائرة.

٢ - **السطح الجانبى للأسطوانة** قبل طيه هو مستطيل بعداه ٤٤سم ، ١٠سم فيكون ارتفاع الأسطوانة ١٠سم.

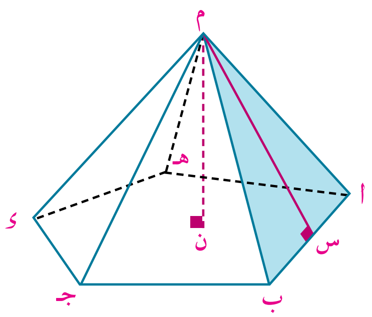
ما طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة؟



فكر:
هل يمكنك معرفة اسم المجسم الذى يمكن تكوينه من طى الشبكة المقابلة؟ استنتج بعض خواصه.
هل يمكن رسم أكثر من شبكة للمجسم الواحد؟ فسر إجابتك.

الهرم *Pyramid*

هو مجسم له قاعدة واحدة، وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ويسمى هرمًا ثلاثيًّا أو رباعيًّا أو خماسيًّا... حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته.



لاحظ: فى الشكل المقابل م أ ب جـ ء هـ هرم خماسى، رأسه م وقاعدته المضلع أ ب جـ ء هـ، **أوجهه الجانبية** Lateral faces سطوح المثلثات م أ ب، م ب جـ، م جـ ء، م ء هـ، م هـ أ، **وأحرفه الجانبية** Lateral edges م أ، م ب، م جـ، م ء، م هـ.

ارتفاع الهرم height (م ن) هو بعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته.

الارتفاع الجانبى Slant height (م س) هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته.

> **تعريف**
> **الهرم المنتظم** *Regular pyramid*
> هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

تذكر أن

المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية الطول وزواياه متساوية القياس مركزه هو مركز الدائرة المرسومة داخله أو خارجه.

خواص الهرم المنتظم

١ - **أحرفه الجانبية** متساوية الطول.

٢ - **أوجهه الجانبية** سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.

٣ - **الارتفاعات الجانبية** متساوية.

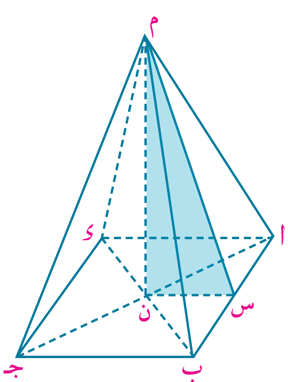
ملاحظة هامة:

المستقيم العمودى على قاعدة الهرم يكون عموديًّا على أى مستقيم فيها.

ففى الشكل المقابل إذا كان م ن عمودى على مستوى القاعدة فإن:

م ن ⊥ أ جـ ، م ن ⊥ ب ء ، م ن ⊥ ن س ، م ن ⊥ ب جـ ، ....

ويكون المثلث م س ن قائم الزاوية فى ن.



مثال

(١) م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته يساوى ١٠سم، وارتفاعه ١٢سم، أوجد ارتفاعه الجانبى.

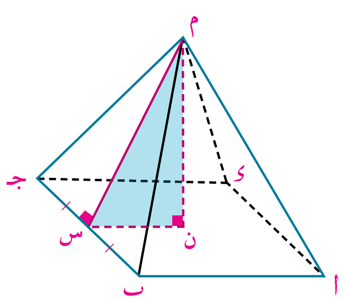
الحل

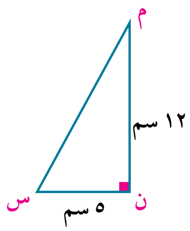
∵ الهرم رباعى منتظم ∴ م ن ⊥ المستوى أ ب جـ ء

حيث ن نقطة تقاطع قطرى المربع أ ب جـ ء، م ن = ١٢سم

بفرض س منتصف ب جـ ∴ م س ⊥ ب جـ (لماذا؟)

ويكون م س ارتفاع جانبى للهرم المنتظم.





في $\triangle$ ء ب جـ : ن منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ ن س = $\frac{1}{2}$ ء جـ = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥سم

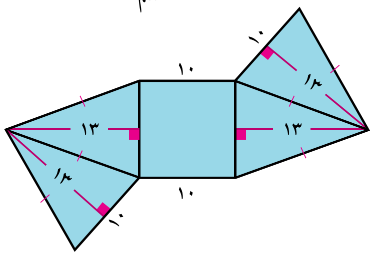
$\because$ $\overline{\text{م ن}}$ $\perp$ المستوى أب جـ ء

$\therefore$ $\triangle$ م ن س قائم الزاوية في ن

ويكون: (م س)^{٢} = (م ن)^{٢} + (ن س)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢} = ١٦٩

$\therefore$ الارتفاع الجانبي للهرم = ١٣سم

ويوضح الشكل المقابل إحدى شبكات الهرم م أ ب جـ ء.



حاول أن تحل

(١) م أ ب جـ ء هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٢٠سم، وارتفاعه الجانبي ٢٥سم. أوجد طول ضلع قاعدة الهرم.

الهرم القائم *Right pyramid*

يكون الهرم قائمًا إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسي.

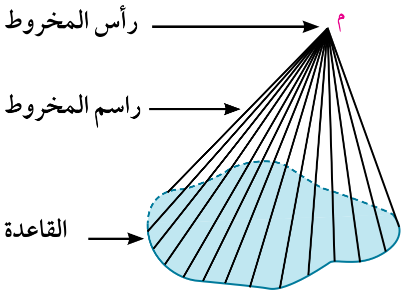
فكر:

١ - هل الهرم المنتظم هو هرم قائم؟ فسر إجابتك.

٢ - هل الارتفاعات الجانبية للهرم القائم متساوية؟

ملاحظة هامة: يسمى الهرم الثلاثي المنتظم، **هرمًا ثلاثيًّا منتظم الوجوه**؛ إذا كانت جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع، ويكون أي منها قاعدة له.

المخروط *Cone*

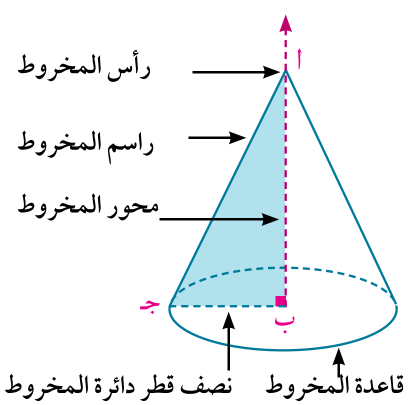


هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ، ويتكون سطحه الجانبي من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته، والتي يعرف كل منها براسم المخروط.

المخروط الدائري القائم *Right circular cone*

هو الجسم الذي ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة كمحور.

خواص المخروط الدائري القائم.



يوضح الشكل المقابل مخروطًا دائريًّا قائمًا، ناشئ من دوران المثلث القائم الزاوية في ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ كمحور فنجد:

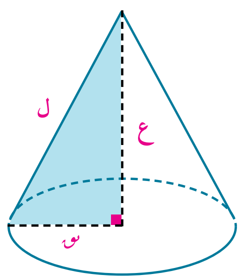
١- $\overline{\text{أ جـ}}$ راسم المخروط ، أ رأس المخروط ، النقطة جـ ترسم أثناء الدوران دائرة مركزها نقطة ب وطول نصف قطرها يساوي طول $\overline{\text{ب جـ}}$ وسطح الدائرة هو قاعدة المخروط.

٢- $\overleftrightarrow{أب}$ محور المخروط عمودى على مستوى القاعدة ، ارتفاع المخروط يساوى طول $\overline{أب}$.

مثال

(٢) مخروط دائرى قائم، طول راسمه ١٧سم، وارتفاعه ١٥سم، أوجد طول نصف قطر دائرته.

الحل



باعتبار طول الراسم = ل ، ارتفاع المخروط = ع ،

طول نصف قطر دائرة المخروط = نق

$\therefore$ نق^٢ = ل^٢ - ع^٢

$\therefore$ نق^٢ = $(١٧)^٢$ - $(١٥)^٢$ = ٦٤

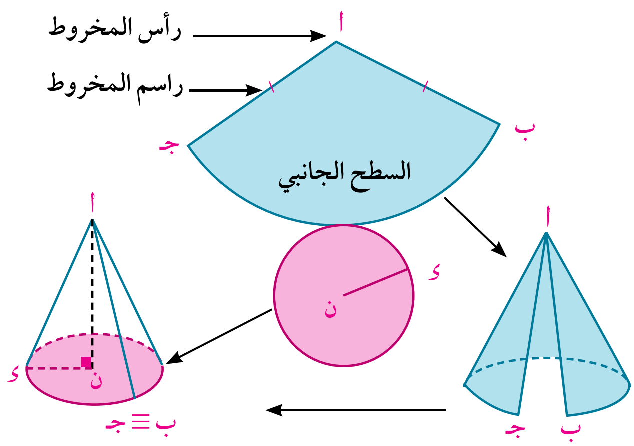
$\therefore$ نق = ٨ سم

حاول أن تحل

(٢) أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦سم.

فكر: أ ب جـ مثلث ، أب = أجـ ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$. إذا دار المثلث أ ب جـ نصف دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{أء}$ كمحور. هل ينشأ مخروط دائرى قائم؟ فسر إجابتك.

شبكة المخروط القائم:



يمكن طى شبكة المخروط القائم؛ لتكوين عبوات مخروطية الشكل كما فى الشكل المقابل حيث:

١ - أ ب = أ جـ = ل (طول راسم المخروط).

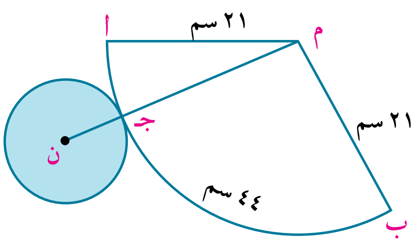
٢ - القطاع الدائرى أ ب جـ يمثل السطح الجانبى للمخروط ، طول $\overset{\frown}{ب جـ}$ = ٢ π نق

(نق طول نصف قطر قاعدة المخروط).

٣ - ارتفاع المخروط = طول $\overline{أن}$.

مثال

(٣) يوضح الشكل المقابل شبكة مخروط قائم، مستعينًا بالبيانات المعطاة، أوجد ارتفاعه. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



الحل

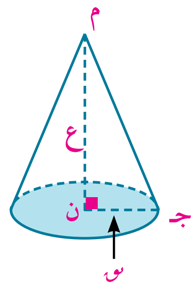
من شبكة المخروط نلاحظ أن:

طول راسم المخروط = طول $\overline{أم}$ = ٢١سم

محيط قاعدة المخروط = طول $\overset{\frown}{أب}$ = ٤٤سم.

طول نصف قطر قاعدة المخروط = طول $\overline{جـ ن}$ = نق.

عند طى شبكة المخروط نحصل على الشكل المقابل فيكون:



ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{م ن}}$ = ع

∵ ٢ π نق = ٤٤ ∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤ أى أن نق = ٧ سم

∵ ع^{٢} = ل^{٢} - نق^{٢}

∴ ع^{٢} = (٢١)^{٢} - (٧)^{٢} = ١٤ × ٢٨ أى أن ع = ١٤ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ارتفاع المخروط الدائرى القائم = ١٤ $\sqrt{٢}$ سم.

حاول أن تحل

(٣) فى الشبكة السابقة للمخروط القائم، إذا كان م أ = ٤١سم ، طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = ١٨ π سم أوجد ارتفاع المخروط.

تفكير ناقد: هل العبارة التالية صحيحة: "ارتفاع المخروط القائم > طول راسمه"؟ فسر إجابتك.

تمـــارين (٣ - ٢)

(١) فى الهرم الخماسى المنتظم:

(أ) ما عدد أوجهه الجانبية. (ب) ما عدد الأوجه.

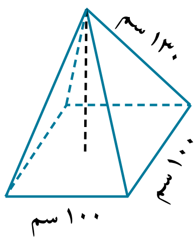
(جـ) ما عدد أحرف الجانبية. (د) ما عدد أحرفه.

(هـ) للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى؟ هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعه. **"عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢"**

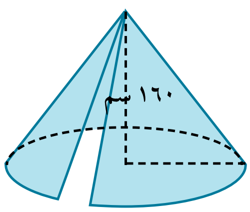
(٢) فى الهرم المنتظم ، رتب الأطوال التالية من الأصغر إلى الأكبر

(أ) طول الحرف الجانبى. (ب) ارتفاع الهرم.

(جـ) الارتفاع الجانبى.

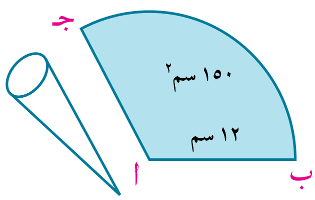


(٣) **هندسة مدنية:** يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعينًا بالبيانات المعطاة أوجد كلًّا من ارتفاع الوجه الجانبى وارتفاع الخزان .



(٤) **الربط بالجوالة:** خيمة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعها ١٦٠سم ومحيط قاعدتها ٧٥٣,٦سم احسب طول راسم مخروط الخيمة.

(٥) **الربط بالسياحة:** هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا، وارتفاعه الجانبى ١٨٦ مترًا، أوجد ارتفاع الهرم.



(٦) **الربط بالصناعة:** تغلف الألبان المثلجة فى مخروط دائرى قائم بطى قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢سم ومساحته ١٥٠سم^{٢} بحيث يتلامس نصفا قطرى دائرته $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$. أوجد ارتفاع المخروط. [تذكر: مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ طول قوسه × طول نصف قطر دائرته].

٣ - ٣

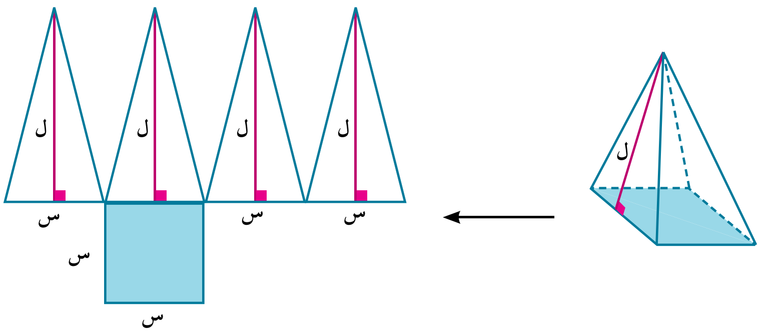
المساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط

Surface area of pyramids and cones

سبق أن تعلمت خواص الهرم والمخروط الدائرى القائم، وقمت باستنتاج بعضها من خلال شبكة كل منهما. هل يمكنك حساب المساحة الجانبية والمساحة الكلية (السطحية) لكل من الهرم المنتظم والمخروط الدائرى القائم من شبكتيهما؟ فسر إجابتك.

المساحة الكلية للهرم المنتظم

يوضح الشكل التالى هرمًا رباعيًّا منتظمًا، و إحدى شبكاته.



لاحظ أن: الأوجه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة الارتفاعات الجانبية متساوية وكل منها = ل

قاعدة الهرم مضلع منتظم طول ضلعه = س ويكون:

المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات أوجهه الجانبية

$= \frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل

$= \frac{1}{2}$ (س + س + س + س) ل

$= \frac{1}{2}$ محيط قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبى.

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته.

تعلم

المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبى.

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته.

سوف تتعلم

- إيجاد المساحة الجانبية والمساحة الكلية (السطحية) لكل من الهرم المنتظم والمخروط القائم.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية تتضمن المساحة السطحية لكل من الهرم والمخروط القائم.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

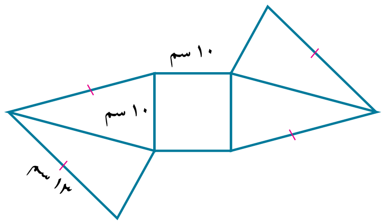
- المساحة الجانبية
Lateral surface area (L.S.A)
- المساحة الكلية (السطحية)
Total surface area (T.S.A)

الأدوات والوسائل

- آله حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

مثال

① باستخدام الشبكة التى أمامك. صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.

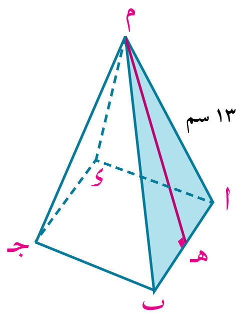


الحل

الشبكة لهرم رباعى منتظم.

قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١٠سم ، طول حرفه الجانبى = ١٣سم.

∵ الوجه الجانبى م أ ب مثلث متساوى الساقين ، $\overline{\text{م هـ}}$ ارتفاع جانبى.



∴ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ أى أن أ هـ = ٥سم

فى △ م هـ أ القائم الزاوية فى هـ **نجد أن** (م هـ)^2 = (أم)^2 - (أهـ)^2

(م هـ)^2 = (١٣)^2 - (٥)^2 = ١٤٤

∴ م هـ = ١٢سم

∵ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

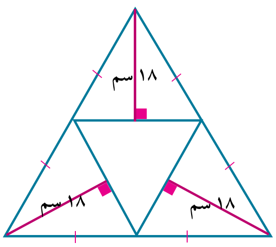
∴ المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ × (١٠ × ٤) × ١٢ = ٢٤٠ سم^2

∵ مساحة قاعدة الهرم = (١٠)^2 = ١٠٠سم^2

∴ المساحة الكلية للهرم = ٢٤٠ + ١٠٠ = ٣٤٠سم^2

حاول أن تحل

① باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.



المساحة الكلية للمخروط القائم

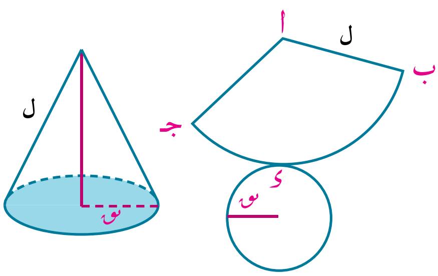
من شبكة المخروط القائم فى الشكل المقابل

مساحة القطاع أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

= $\frac{1}{2}$ ل × محيط قاعدة المخروط

= $\frac{1}{2}$ ل × ٢ π نق = π ل نق

= المساحة الجانبية للمخروط القائم



المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته

تعلم

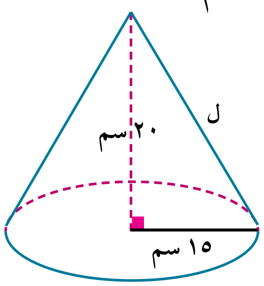
المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^2 = π نق (ل + نق)

حيث ل طول راسمه ، نق طول نصف قطر دائرته.

مثال

(٢) أوجد المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم ، وارتفاعه ٢٠سم.



الحل

لإيجاد طول راسم المخروط ل

∵ ل^{٢} = (٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢} = ٦٢٥

∴ ل = ٢٥سم

∵ المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق ، نق = ١٥سم

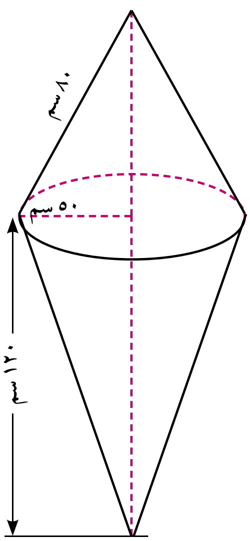
∴ المساحة الجانبية للمخروط القائم = ٢٥ × ١٥ π = ٣٧٥ π سم^{٢}

حاول أن تحل

(٢) أوجد المساحة الكلية لمخروط قائم طول راسمه ١٧سم وارتفاعه ١٥سم.

مثال

(٣) ملاحة بحرية: يوضح الشكل المقابل علامة إرشادية (شمندورة) لتحديد المجرى الملاحى، وهى على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة.
أوجد تكاليف طلائه بمادة مقاومة لعوامل التعرية، علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيه.



الحل

مساحة سطح العلامة الإرشادية = المساحة الجانبية للمخروط الأول + المساحة الجانبية للمخروط الثانى.

المخروط الأول: ل = ٨٠سم ، نق = ٥٠سم

∴ المساحة الجانبية = ٥٠ × ٨٠π

= ٤٠٠٠π سم^{٢}

المخروط الثانى: ع = ١٢٠سم، نق = ٥٠ سم ∴ ل$_{٢}$ = $\sqrt{(١٢٠)^{٢}+(٥٠)^{٢}}$ = ١٣٠سم

∴ المساحة الجانبية = ٥٠ × ١٣٠π

= ٦٥٠٠ π سم^{٢}

مساحة سطح العلامة الإرشادية = (٤٠٠٠ + ٦٥٠٠)π = ١٠٥٠٠ π سم^{٢}

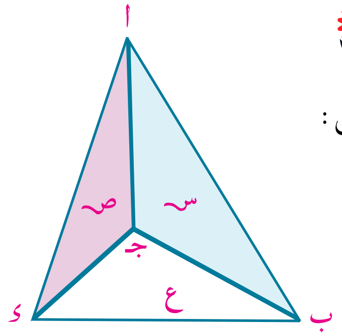
$\simeq$ ٣,٢٩٩ متر مربع

تكاليف الطلاء = ٣,٢٩٩ × ٣٠٠ = ٩٨٩,٧ جنيهًا

حاول أن تحل

(٣) غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم،
احسب مساحته لأقرب سنتيمتر مربع.

تمـاريـن (٣ – ٣)



١) الشكل المقابل يمثل هرم ثلاثى ، س ، ص، ع ثلاث مستويات أكمل مايأتى :

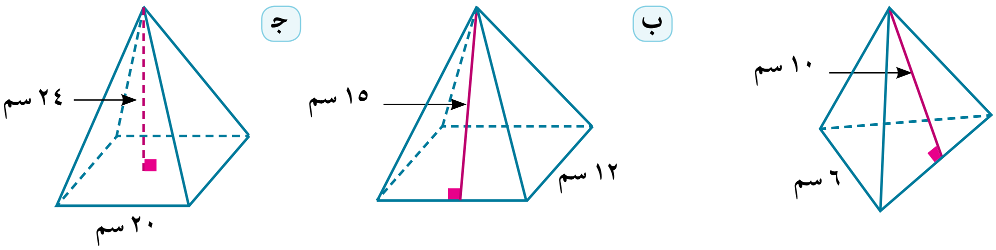
أ) س ∩ ص = ... ب) س ∩ ع = ...

جـ) ص ∩ ع = ... د) $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ س = ...

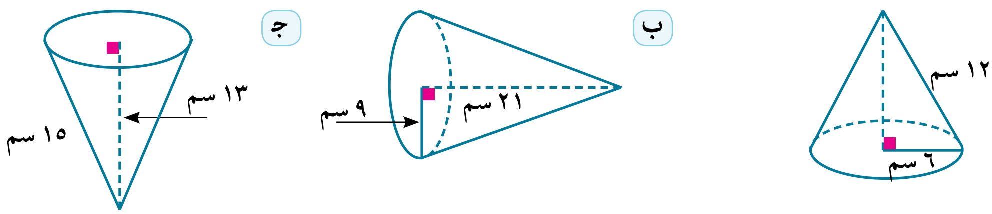
هـ) $\overleftrightarrow{بجـ}$ .... س ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ .... ع

و) س ∩ ص ∩ ع = ...

٢) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة.

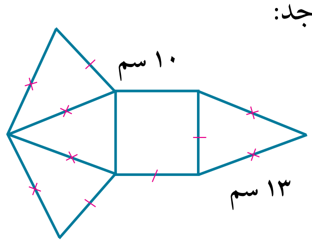


٣) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة.



٤) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه الجانبى ١٠ $\sqrt{3}$ سم. أوجد:

أ) مساحته الجانبية ب) مساحته الكلية



٥) الربط بالصناعة: تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى بطى شبكة المجسم المقابلة.

أ) أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوة.

ب) احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهًا.

٦) طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا. أوجد ارتفاع المخروط.

(مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق^2 هـ ء ، نق طول نصف قطر دائرة القطاع ، هـ ء قياس زاويته المركزية بالراديان).

٧) أوجد طول نصف قطر دائرة مخروط قائم، إذا كان طول راسمه ١٥سم، ومساحته الكلية ١٥٤π سم^2.

٣ - ٤

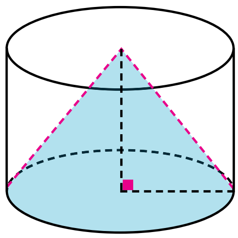
حجم الهرم والمخروط القائم

Volumes of pyramids and cones

فكر و ناقش

سبق أن تعلمت كيفية حساب حجم المنشور القائم وحجم الأسطوانة الدائرية القائمة.

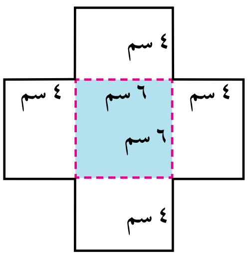
هل تستطيع تقدير حجم الهرم بدلالة حجم المنشور القائم الذى له نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه؟



هل تستطيع تقدير حجم المخروط القائم بدلالة حجم أسطوانة لها نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه؟

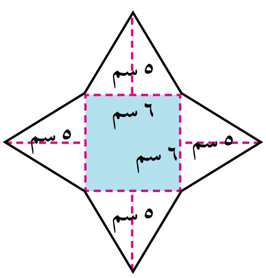
نشاط

المقارنة بين حجمى هرم ومنشور لهما نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع.



١- ارسم على ورق مقوى شبكتى الهرم والمنشور الموضحتين فى الرسم أمامك.

٢- اقطع واطو كل شبكة؛ لتصنع نموذجين أحدهما السطح الجانبى لهرم رباعى، والثانى منشور قائم مفتوح من أعلى.



٣- املأ الهرم بحبات الأرز أو الرمل، وأفرغه فى المنشور، كرر ذلك حتى يمتلئ المنشور تمامًا.

لاحظ أن المحتويات (حبات الأرز أو الرمل) التى تلزمك لملئ المنشور سوف تملأ تمامًا ثلاثة أهرامات.

أى أن حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حجم المنشور الذى له نفس مساحة قاعدة الهرم (ق) ونفس ارتفاع الهرم (ع).

سوف تتعلم

- إيجاد حجم الهرم المنتظم.
- إيجاد حجم المخروط القائم
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية تتضمن حجم كل من الهرم المنتظم والمخروط القائم.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

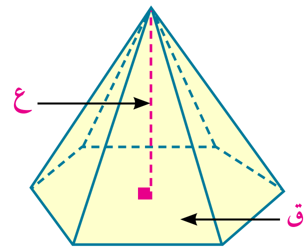
- رأس Vertex
- قاعدة Base
- وجه Face
- محور Axis
- نصف قطر Radius
- حجم Volume

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

حجم الهرم Volume of a Pyramid

تعلم



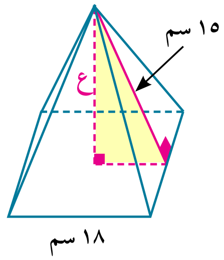
حجم الهرم يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه.

أى أن: حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ ق × ع

حيث (ق) مساحة القاعدة ، (ع) ارتفاع الهرم.

مثال

١ احسب حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨سم، وارتفاعه الجانبى ١٥سم.



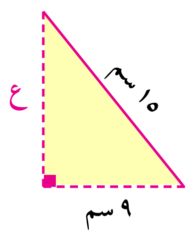
الحل

أولاً: حساب مساحة قاعدة الهرم (ق)

∵ الهرم رباعى منتظم ∴ قاعدته مربعة الشكل

مساحة قاعدة الهرم (ق) = ١٨ × ١٨ = ٣٢٤ سم^{٢}

ثانيًا: حساب ارتفاع الهرم (ع)



∵ ع^{٢} + (٩)^{٢} = (١٥)^{٢} فيثاغورث

∴ ع^{٢} = (١٥)^{٢} - (٩)^{٢} = ١٤٤ ، ع = ١٢ سم

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ ق × ع

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ٣٢٤ × ١٢ = ١٢٩٦سم^{٢}

تذكر أن

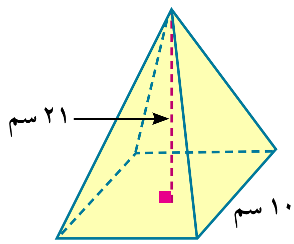
مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ن، وطول ضلعه س تساوى

$\frac{ن}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

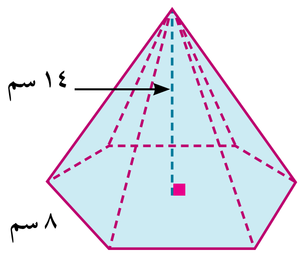
حاول أن تحل

١ أوجد حجم الهرم المنتظم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة.

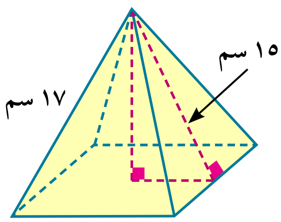
أ



ب

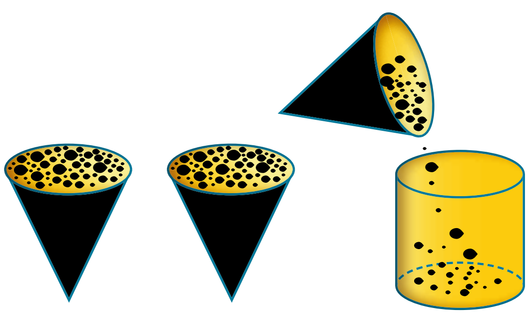


ج



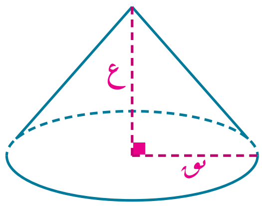
فكر: عند المقارنة بين حجمى مخروط دائرى قائم وأسطوانة قائمة لهما نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع نجد أن:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة.



حجم المخروط *Volume of a cone*

تعلم



حجم المخروط يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه

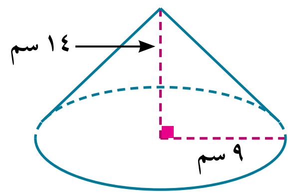
أى أن: **حجم المخروط** = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع

حيث (نق) طول نصف قطر دائرة المخروط ، (ع) ارتفاع المخروط

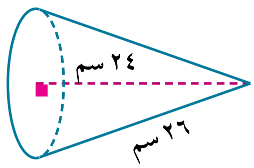
حاول أن تحل

(٢) أوجد حجم المخروط القائم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة.

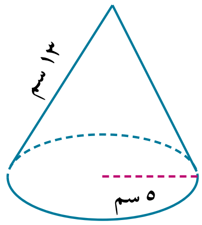
أ



ب



جـ



مثال

(٢) الربط بالفيزياء: سبيكة من الذهب الخالص على هيئة مخروط قائم ارتفاعه ٤,٢سم، وطول نصف قطر دائرته ١,٥سم. أوجد كثافة الذهب إذا كان كتلة السبيكة ١٩١جم.

الحل

$\because$ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع ، نق = ١,٥سم ، ع = ٤,٢سم

$\therefore$ حجم الذهب فى السبيكة = $\frac{\pi}{٣}$ (١,٥)^{٢} (٤,٢) = ٩,٨٩٦ سم^{٣}

$\because$ الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$ $\therefore$ كثافة الذهب = $\frac{١٩١}{٩,٨٩٦} \simeq$ ١٩,٣ جم/سم^{٣}

حاول أن تحل

(٣) قطعة من الشيكولاتة على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧ πسم^{٣} ومحيط قاعدته ٦ πسم أوجد ارتفاعه.

مثال

(٣) الربط بالصناعة: هرم خماسى منتظم من النحاس، طول ضلع قاعدته ١٠سم، وارتفاعه ٤٢سم، صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم، طول نصف قطر قاعدته ١٥سم. فإذا علم أن ١٠٪ من النحاس فُقِدَ أثناء عمليتى الصهر والتحويل، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد.

الحل

$\because$ مساحة الخماسى المنتظم = $\frac{٥}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{٥}$ حيث س طول ضلعه

$\therefore$ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{٥}{٤}$ × ١٠ × ١٠ ظتا ٣٦° = $\frac{١٢٥}{\text{ظا } ٣٦°} \simeq$ ١٧٢سم^{٢}

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١٧٢}{٣}$ × ٤٢ = ٢٤٠٨سم^{٣}

∴ حجم النحاس فى المخروط = $\frac{٩٠}{١٠٠}$ × ٢٤٠٨ = ٢١٦٧,٢سم^{٣}

$\frac{\pi}{٣}$ (١٥)^{٢} ع = ٢١٦٧,٢ حيث ع ارتفاع المخروط القائم

∴ ع = $\frac{٢١٦٧,٢ \times ٣}{٢٢٥\pi}$ ≃ ٩,٢سم

حاول أن تحل

(٤) مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠سم صُهر وحُوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١سم، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل.

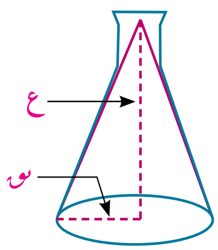
ملاحظة هامة: تقدر سعة حاوية بحجم السائل الذى تحتويه، ولحساب سعتها تستخدم نفس قوانين حساب الحجوم، ووحدة قياس السعة هى اللتر.

١ لتر = ١٠٠٠ ملليلتر = ١٠٠٠سم^{٣} = ديسم^{٣}

تذكر أن

السعة هى حجم الفراغ الداخلى لأى جسم أجوف

مثال



(٤) الربط بالكيمياء: دورق مخروطى الشكل سعته ١٥٤ مل. ارتفاعه ١٢سم أوجد طول نصف قطر قاعدته ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$).

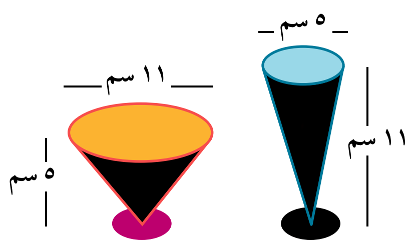
الحل

سعة الدورق = حجم المخروط القائم = ١٥٤سم^{٣}

$\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢} × ١٢ = ١٥٤ ∴ نق^{٢} = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ نق = ٣,٥سم

حاول أن تحل



(٥) أ ، ب كأسان للشراب. أيهما سعته أكبر؟ أوجد الفرق بين سعتيهما.

تمارين (٣ - ٤)

١) أوجد حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه ٣٦سم.

٢) احسب لأقرب رقم عشرى واحد، حجم هرم خماسى منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠سم وارتفاعه ١٠سم.

٣) هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩سم، وحجمه ٣٠٠سم^3. أوجد طول ضلع قاعدته.

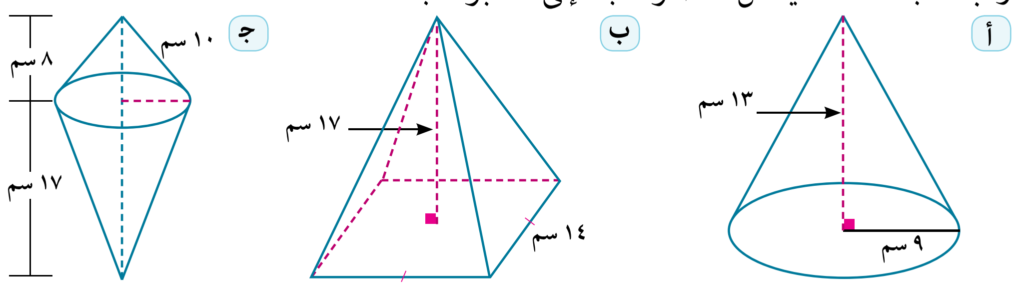
٤) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠سم^2، وارتفاعه الجانبى ٢٠سم أوجد حجمه.

٥) أيهما أكبر حجمًا؟ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وارتفاعه ٢٠سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠سم ومحيط قاعدته ٤٨سم.

٦) أوجد حجم مخروط دائرى قائم، محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم.

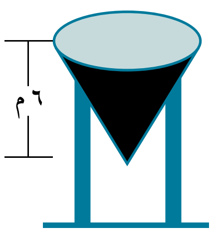
٧) أوجد حجم مخروط دائرى قائم، مساحته الجانبية ٢٢٠سم وطول راسمه ١٤سم.

٨) رتب المجسمات التالية من الأصغر حجمًا إلى الأكبر حجمًا.



٩) الربط بالسياحة: صنع نموذج للهرم الأكبر من سبيكة معدنية كثافتها ٣,٢جم/سم^3. إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١,٥سم وارتفاعه ٧سم ، فاحسب كتلته لأقرب رقم عشرى واحد.

١٠) الربط بالفيزياء: إناء أسطوانى الشكل به ماء، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم، ارتفاعه ١٢سم وطول نصف قطر قاعدته ٢سم غمرًا كاملاً ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١سم. أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

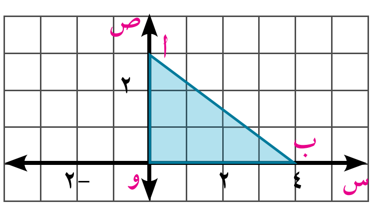


١١) هندسة مدنية: صهريج مياه على شكل مخروط قائم، حجمه ٣٢ π م^3 وارتفاعه ٦م. أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.

١٢) يوضح الشكل المقابل مستوى إحداثى متعامد، احسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عند دوران المثلث أ ب و ، دورة كاملة حول:

أ) محور السينات .

ب) محور الصادات.



١٣) تفكير إبداعي: مخروط دائرى، قائم حجمه ١٠٠سم^3. أوجد حجمه عندما:

أ) يتضاعف ارتفاعه.   ب) يتضاعف طول نصف قطره.

ج) يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره. ماذا تستنتج؟ فسر إجابتك.

٣ - ٥

معادلة الدائرة
Equation of a circle

سوف تتعلم
- كتابة معادلة الدائرة بدلالة إحداثيى مركزها وطول نصف قطرها.
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- تعين إحداثيى مركز دائرة وطول نصف قطرها. من الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن معادلة الدائرة.

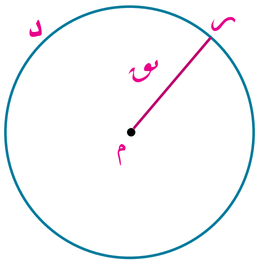
المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- دائرة Circle
- مركز Center
- نصف قطر Radius
- قطر Diameter
- مستوى إحداثى Cartesian plane
- معادله Equation
- صورة عامة General Form

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة علمية
- ورق مربعات

تمهيد

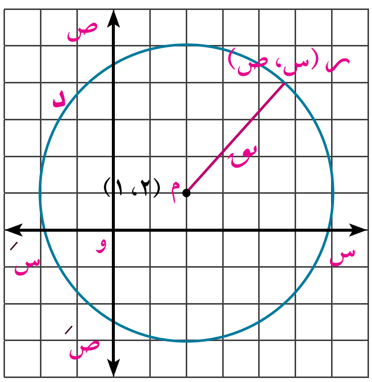
علمت أن الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.

تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة و يرمز لها عادة بالرمز م ، كما يسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة و يرمز له بالرمز نق كما يرمز للدائرة عادة بالرمز **د**.



معادلة الدائرة:

معادلة الدائرة هى علاقة بين الإحداثى السينى والإحداثى الصادى لأى نقطة تنتمى للدائرة، وكل زوج مرتب (س ، ص) يحقق هذه العلاقة (المعادلة) يمثل نقطة تنتمى إلى هذه الدائرة.



فى مستوى إحداثى متعامد

إذا كانت النقطة ر (س ، ص) تنتمى لدائرة **د** طول نصف قطرها يساوى ٤ وحدات ومركزها النقطة م (٢ ، ١) فإن:

م ر = نق = ٤

وبتطبيق قانون البعد بين نقطتين تكون:

$(س - ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = (٤)^٢$

$\therefore (س - ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

هى معادلة الدائرة **د**

تذكر أن

البعد بين النقطتين

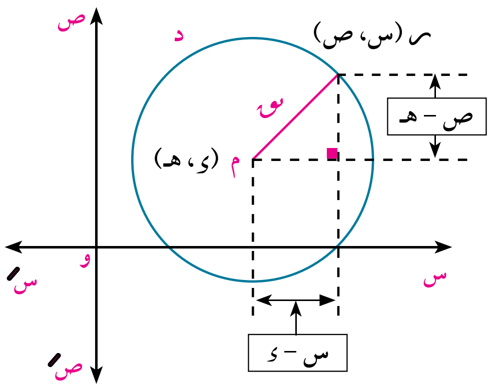
$(س_١ ، ص_١)$، $(س_٢ ، ص_٢)$

$= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

تعلم

معادلة الدائرة
The equation of a circle

(بدلالة إحداثيي مركزها وطول نصف قطرها)



في مستوى إحداثي متعامد:

إذا كانت النقطة ر (س ، ص) تنتمي إلى دائرة **د** مركزها النقطة (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات، فإن معادلة الدائرة **د** هي:

$$(س - ى)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$$

مثال

① اكتب معادلة الدائرة **د** مركزها النقطة م (٥ ، ٢)، وطول نصف قطرها يساوى ٦ وحدات.

الحل

بفرض أن النقطة ر (س ، ص) ∈ الدائرة **د**

∵ مركز الدائرة م(٥ ، ٢) ، طول نصف قطر الدائرة = ٦ وحدات

∴ ى = ٥ ، هـ = ٢ ، نق = ٦

وتكون معادلة الدائرة هي $(س - ٥)^2 + (ص - ٢)^2 = (٦)^2$ أي: $(س - ٥)^2 + (ص - ٢)^2 = ٣٦$

حاول أن تحل

① اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها:

أ) م (٤ ، -٣) ، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

ب) م (٧ ، -١) ، وطول قطرها يساوى ٨ وحدات.

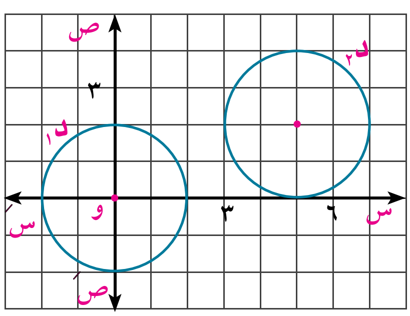
جـ) م (٢ ، ٠) ، وطول قطرها يساوى $\sqrt{٢٨}$ من الوحدات.

د) م (٠ ، -٥) ، وتمر بالنقطة أ(-٢ ، -٩)

هـ) نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات.

مثال

② يبين الشكل المقابل الدائرتين $د_1$ ، $د_2$ أثبت أن الدائرتين متطابقتان ثم أوجد معادلة كل منهما.



الحل

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما.

الدائرة $د_1$: مركزها (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها $نق_1$ = ٢ وحدة.

الدائرة $د_2$: مركزها (٥ ، ٢) وطول نصف قطرها $نق_2$ = ٢ وحدة

∵ $نق_1$ = $نق_2$ = ٢ ∴ الدائرتان متطابقتان

وتكون: معادلة $د_{١}$ $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ ،   معادلة $د_{٢}$ $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

لاحظ: الدائرة $د_{٢}$ هى صورة الدائرة $د_{١}$ بالانتقال (٥ ، ٢)

تفكير ناقد: إذا كانت الدائرة $د_{٣}$ هى صورة الدائرة $د_{١}$ بالانتقال (-٤ ، ٣)

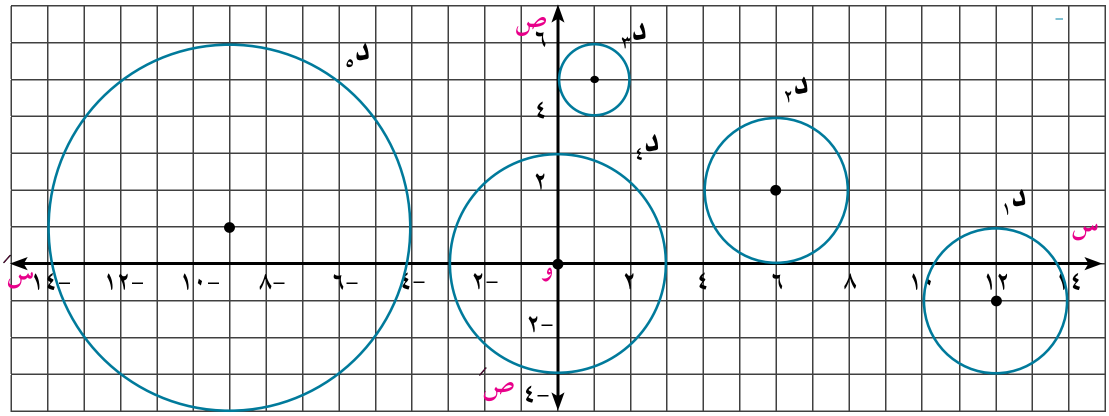
فاكتب معادلة الدائرة $د_{٣}$.

تذكر أن

صورة النقطة (ى ، هـ) بالانتقال (م، ن) هى (ى+م ، هـ + ن)

حاول أن تحل

(٢) أ اكتب معادلة كل دائرة فى الشكل التالى



ب أى الدوائر السابقة متطابقة؟ فسر إجابتك.

فكر: أين تقع النقطة $(س_{١}، ص_{١})$ بالنسبة للدائرة د: $(س - ى)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$ إذا كان:

أ $(س_{١} - ى)^{٢} + (ص_{١} - هـ)^{٢} < نق^{٢}$ ب $(س_{١} - ى)^{٢} + (ص_{١} - هـ)^{٢} > نق^{٢}$

مثال

(٣) بين أن النقطة (٤ ، -١) هى إحدى نقط الدائرة **د** التى معادلتها: $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٣٧$

الحل

بالتعويض بإحداثيي النقطة (٤ ، -١) فى الطرف الأيمن لمعادلة الدائرة.

$\therefore$ $(٤ - ٣)^{٢} + (-١ - ٥)^{٢} = ١ + ٣٦ = ٣٧ =$ الطرف الأيسر

$\therefore$ النقطة (٤ ، -١) تنتمى إلى الدائرة **د**

لاحظ أن: للنقطة $(س_{١}، ص_{١})$ فى مستوى الدائرة

إذا كان $(س_{١} - ٣)^{٢} + (ص_{١} - ٥)^{٢} > ٣٧$ فإن النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ تقع خارج الدائرة **د**.

و إذا كان $(س_{١} - ٣)^{٢} + (ص_{١} - ٥)^{٢} < ٣٧$ فإن النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ تقع داخل الدائرة **د**.

حاول أن تحل

(٣) بين أى النقط التالية تنتمى إلى الدائرة د التى معادلتها: $(س - ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥$، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة **د** حيث:

أ(٩ ، ٣)   ،   ب(٧ ، ٥)   ،   جـ(٣ ، ٣)   ،   ى(٢ ، -٣)

تذكر أن

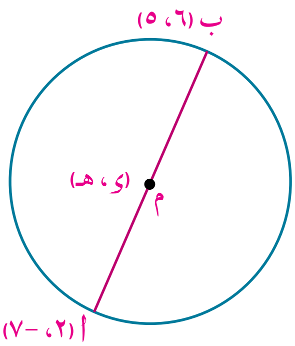
إحداثي منتصف المسافة بين النقطتين $(س_١، ص_١)$ ، $(س_٢، ص_٢)$ = $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

مثال

٤ اكتب معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(٢ ، -٧) ، ب(٦ ، ٥)

الحل

بفرض أن النقطة م(ى ، هـ) مركز للدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ ، فتكون النقطة م منتصف $\overline{أب}$



∴ احداثيا م: ى = $\frac{٢+٦}{٢}$ = ٤ ، هـ = $\frac{-٧+٥}{٢}$ = -١

، $نق^٢ = (أم)^٢ = (٤ - ٢)^٢ + [-١ - (-٧)]^٢$

$= (٢)^٢ + (٦)^٢ = ٤٠$

وتكون معادلة الدائرة هى: $(س - ٤)^٢ + [ص - (-١)]^٢ = ٤٠$

أى $(س - ٤)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٤٠$

فكر هل تحقق النقطة (٦ ، ٥) معادلة الدائرة؟ لماذا؟

هل تنتمى النقطة (٦ ، -٧) للدائرة السابقة فسر إجابتك.

حاول أن تحل

٤ اكتب معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (-٢ ، ٧)، وتمر بالنقطة أ (٢ ، ١٠)

ب مركزها النقطة م (٥ ، ٤)، وتمس المستقيم س = ٢

جـ مركزها م يقع فى الربع الأول من المستوى الإحداثى، وطول نصف قطرها يساوى ٣ وحدات، والمستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها.

مثال

٥ أوجد إحداثيى المركز، وطول نصف قطر كل من الدائرتين:

أ $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٧$ ب $(س + ١)^٢ + ص^٢ = ١٦$

الحل

نعلم أن معادلة الدائرة بدلالة إحداثيى المركز (ى ، هـ) وطول نصف قطرها نق هى:

$(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

بمقارنة كل مقدار جبرى فى المعادلة بنظيره فى المعادلات المعطاة نجد:

أ س - ى = س - ٢ ∴ ى = ٢

ص - هـ = ص + ٣ ∴ هـ = -٣

$نق^٢ = ١٧$ ∴ $نق = \sqrt{١٧}$

فيكون مركز الدائرة النقطة (٢ ، -٣) وطول نصف قطرها يساوى $\sqrt{١٧}$ وحدة.

ب $س - ى = س + ١$ $\therefore$ ى = -١

ص - هـ = ص $\therefore$ هـ = ٠

نق^٢ = ١٦ $\therefore$ نق = ٤

$\therefore$ مركز الدائرة النقطة (-١ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٤ وحدات.

حاول أن تحل

٥ أى من الدوائر المعطاة يمثل دائرة مركزها (٣ ، -٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات.

أ (س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٩ ب (س + ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٩

جـ (س - ٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٩ د (س + ٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٩

٦ أوجد إحداثى المركز وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:-

أ (س - ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٥ ب س^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٩

جـ (س + ١)^٢ + (ص + ٧)^٢ = $\frac{٣}{٤}$ د (س + ١)^٢ = ١٣ - ص^٢

تعلم

الصورة العامة لمعادلة الدائرة *General form of the equation of a circle*

علمت أن معادلة الدائرة التى مركزها (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات:

هى: (س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢ بفك الأقواس

$\therefore$ س^٢ + ص^٢ - ٢ ى س - ٢هـ ص + ى^٢ + هـ^٢ - نق^٢ = صفر (١)

$\because$ ى ، هـ ، نق ثوابت $\therefore$ المقدار ى^٢ + هـ^٢ - نق^٢ = جـ حيث (جـ مقدار ثابت)

بوضع ل = -ى ، ك = -هـ ، جـ = ى^٢ + هـ^٢ - نق^٢

تصبح المعادلة (١) على الصورة $\boxed{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٢\text{ل س} + ٢\text{ك ص} + \text{جـ} = ٠}$

وتسمى بالصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (-ل ، -ك) وطول نصف قطرها يساوى نق حيث

نق = $\sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ - \text{جـ}}$ ، ل^٢ + ك^٢ - جـ $>$ ٠

مثال

٦ أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٦ ، -٣) وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

الحل

$\because$ مركز الدائرة (-ل ، -ك) فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة

، مركز الدائرة (٦ ، -٣) معطى

$\therefore$ ل = -٦ ، ك = ٣

$\because$ نق = ٥ ، جـ = ل^٢ + ك^٢ - نق^٢

$\therefore$ جـ = (-٦)^٢ + (٣)^٢ - (٥)^٢ = ٢٠

وتكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى: س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س + ٦ص + ٢٠ = صفر.

يمكن التحقق من صحة الحل باستخدام معادلة الدائرة: (س - ٦)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥ ثم تبسيطها ومقارنة النتائج

حاول أن تحل

٧ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (-٢ ، ٥)، وطول نصف قطرها يساوى $\sqrt{٥٧}$ وحدة.

ب مركزها النقطة ن (٥ ، -٣)، وتمر بالنقطة ب (٢ ، ١).

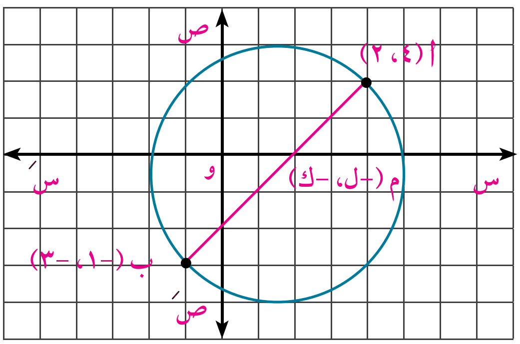
مثال

٧ اكتب الصورة العامة لمعادلة دائرة إذا كانت النقطتان أ(٤ ، ٢) ، ب(-١ ، -٣) طرفى قطر فيه.

الحل

بفرض ان النقطة م (-ل ، -ك) مركز للدائرة التى قطرها $\overline{\text{أ ب}}$

∴ م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ويكون إحداثيا النقطة م هما ($\frac{٤-١}{٢}$ ، $\frac{٢-٣}{٢}$)



∴ -ل = $\frac{٣}{٢}$ أى ل = $\frac{-٣}{٢}$

- ك = $\frac{-١}{٢}$ أى ك = $\frac{١}{٢}$

بالتعويض عن ل ، ك فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ص + جـ = ٠ (١)

∵ الدائرة تمر بالنقطة أ(٤ ، ٢) فهى تحقق معادلتها

∴ (٤)^{٢} + (٢)^{٢} - ٣(٤) + ٢ + جـ = ٠ أى جـ = -١٠

بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى: س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ص - ١٠ = صفر

حاول أن تحل

٨ إذا كانت النقط أ(٣ ، -٢) ، ب (٣ ، ٨) ، جـ (-١ ، ٠) تنتمى إلى دائرة واحدة. فأثبت أن $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها، ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها.

ملاحظة هامة

من الصورة العامة لمعادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠ نستنتج أن

أولًا: المعادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص

ثانيًا: معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = الوحدة

ثالثًا: خالية من الحد الذى يحتوى س ص أى معامل س ص = ٠

ولكى تمثل معادلة الدرجة الثانية فى س ، ص دائرة حقيقية يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة وأن يكون ل^{٢} + ك^{٢} - جـ $>$ ٠

تعلم

تعيين إحداثيي مركز دائرة وطول نصف قطرها

لتعيين إحداثيي مركز دائرة وطول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها:

١- تحقق أولًا من وضع المعادلة فى الصورة العامة **حيث** معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة

٢- احداثيا المركز (-ل ، -ك) **أى** $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢} ، \frac{-\text{معامل ص}}{٢}\right)$

٣- طول نصف قطر الدائرة يساوى نق **حيث** نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ}$ ، $ل^٢ + ك^٢ - جـ > ٠$

مثال

(٨) أى المعادلات الآتية تمثل دائرة؟ و إذا كانت معادلة دائرة فأوجد مركزها وطول نصف قطرها.

أ $٣س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س - ٨ص - ١٠ = ٠$ ب $س^٢ + ص^٢ + ٤س + ٢٥ = ٠$

جـ $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ١٢س + ٨ص - ٣٠ = ٠$ د $٤س^٢ + ٤ص^٢ = ٤٩$

هـ $س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص + ٣ = $ صفر

الحل

أ معامل $س^٢ \neq$ معامل $ص^٢$ ∴ المعادلة لا تمثل دائرة

ب معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ، ك = $\frac{٠}{٢}$ = ٠ ، جـ = ٢٥

∴ $ل^٢ + ك^٢ - جـ = (٢)^٢ + (٠)^٢ - ٢٥ < ٠$ ∴ المعادلة لا تمثل دائرة حقيقية

جـ بقسمة طرفى المعادلة على ٢ ∴ $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص - ١٥ = ٠$

∴ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = -٣ ، ك = ٢ ، جـ = -١٥

∴ $ل^٢ + ك^٢ - جـ = (-٣)^٢ + (٢)^٢ - (-١٥) = ٢٨ > ٠$

∴ المعادلة لدائرة مركزها (٣ ، -٢) ، نق = $\sqrt{٢٨} = ٢\sqrt{٧}$ وحدة

د بقسمة طرفى المعادلة على ٤ ∴ $س^٢ + ص^٢ = \frac{٤٩}{٤}$

∴ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = ٠ ، ك = ٠ ، جـ = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ $ل^٢ + ك^٢ - جـ = \frac{٤٩}{٤} > ٠$ ∴ المعادلة لدائرة مركزها نقطة الأصل ، نق = $\sqrt{\frac{٤٩}{٤}} = \frac{٧}{٢}$ وحدة

هـ المعادلة تحتوى على س ص ∴ المعادلة لا تمثل دائرة

٩ حاول أن تحل

(٩) أى المعادلات الآتية تمثل دائرة؟ و إذا كانت معادلة دائرة، أوجد مركزها وطول نصف قطرها.

أ $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص + ١٧ = ٠$ ب $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٢ص = ٠$

جـ $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٤س + ٣٩ = ٠$ د $س^٢ + ص^٢ - ٢س ص - ٦ = ٠$

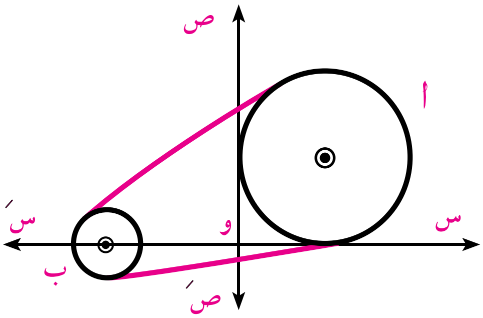
تفكير ناقد: هل الدائرتان د$_١$: س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٨ص + ١٦ = ٠

د$_٢$: س^٢ + ص^٢ + ١٤س + ١٠ ص - ٢٦ = ٠ متماستان من الخارج؟ فسر إجابتك.

مثال

نمذجة مواقف رياضية وحياتية

٩ الربط بالصناعة: يوضح الشكل المقابل بكرة أ في آلة تمس محوري الإحداثيات، تدور بواسطة سير، يمر على بكرة صغيرة ب معادلة دائرتها: س^٢ + ص^٢ + ١٤س + ٤٥ = ٠ أوجد:



أ معادلة دائرة البكرة أ إذا كان طول نصف قطرها يساوي ٥ وحدات.

ب البعد بين مركزي البكرتين إذا كان كل وحدة من المستوى الإحداثي تمثل ٦سم.

الحل

أ ∵ البكرة أ تمس محوري الإحداثيات ، وطول نصف قطرها يساوي ٥ وحدات.

∴ مركز دائرتها النقطة م(٥ ، ٥) أي ل = -٥ ، ك = -٥

∵ جـ = ل^٢ + ك^٢ - نق^٢ ∴ جـ = (-٥)^٢ + (-٥)^٢ - (٥)^٢ = ٢٥

وتكون معادلتها: س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ١٠ص + ٢٥ = صفر

ب ∵ معادلة دائرة البكرة ب: س^٢ + ص^٢ + ١٤س + ٤٥ = ٠

∴ ل = ٧ ك = ٠ جـ = ٤٥ نق = $\sqrt{٤٩ - ٤٥}$ = ٢

ويكون مركزها النقطة ن (-٧ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوي ٢ وحدة

∴ البعد بين مركزي البكرتين = م ن = $\sqrt{(٥ + ٧)^٢ + (٥)^٢}$ = ١٣ وحدة

∵ كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل ٦سم

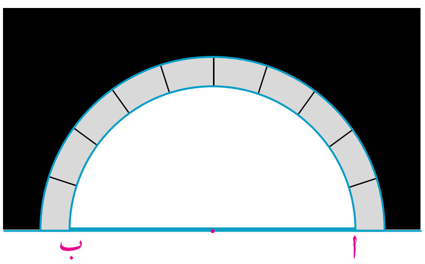
∴ البعد بين البكرتين = ١٣ × ٦ = ٧٨سم

حاول أن تحل

١٠ الربط بالطرق: يوضح الشكل المقابل مقطعًا رأسيًّا في أحد الأنفاق الدائرية لمرور السيارات معادلة دائرته:

س^٢ + ص^٢ - ٤س - ٦ص - ١٢ = ٠ ، $\overline{أب}$ قطر فيها.

أوجد أقصى ارتفاع للنفق إذا كانت وحدة الأطوال في المستوى الإحداثي تمثل ٧٠سم.



مثال

١٠ الربط بالهندسة: أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة سطح شكل خماسي منتظم تمر برؤوسه الدائرة:

س^٢ + ص^٢ + ٦س - ١٢ص + ٥ = ٠ علمًا بأن كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل ٥سم.

الحل

بفرض أن م مركز الدائرة المارة برؤوس الخماسى المنتظم أ ب جـ ء هـ فيكون:

أ ب = ب جـ = جـ ء = ء هـ = أ هـ (وهى أوتار فى الدائرة م)

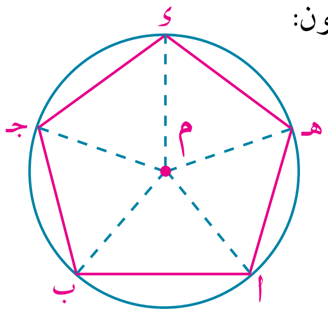
$\therefore$ ق($\measuredangle$ أ م ب) = ق($\measuredangle$ ب م جـ) = ... = $\frac{٣٦٠^\circ}{٥}$ = ٧٢°

ويلاحظ تقسيم الشكل أ ب جـ ء هـ إلى ٥ مثلثات متطابقة

أى أن مساحة الخماسى المنتظم = ٥ × مساحة $\triangle$ م أ ب

= ٥ × $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب جا ٧٢°

= $\frac{٥}{٢}$ نق^٢ جا ٧٢°



(١)

من معادلة الدائرة: ل = ٣ ك = -٦ جـ = ٥

$\because$ نق^٢ = ل^٢ + ك^٢ - جـ $\therefore$ نق^٢ = ٩ + ٣٦ - ٥ = ٤٠ وبالتعويض فى (١)

$\therefore$ مساحة الخماسى المنتظم = $\frac{٥}{٢}$ (٤٠) جا ٧٢° = ٩٥,١٠٥٦ وحد مربعة

$\because$ كل وحدة طول فى المستوى الإحداثى تمثل ٥سم

$\therefore$ الوحدة المربعة فى المستوى الإحداثى تمثل مساحة قدرها (٥)^٢ = ٢٥سم^٢

وتكون مساحة الخماسى المنتظم = ٩٥,١٠٥٦ × ٢٥ $\simeq$ ٢٣٧٨ سم^٢

تذكر أن

مساحة اي مضلع منتظم = $\frac{ن}{٢}$ نق^٢ جا $\frac{٣٦٠}{ن}$

حيث نق نصف قطر الدائرة المار برؤوسه، ن عدد أضلاع المضلع.

تمارين (٣ – ٥)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ النقطة (٢ ، ٠) تقع على

أ محور السينات ب محور الصادات جـ المستقيم ص = ٢س د الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٩

٢ إذا كانت أ(٣ ، -٧) ، ب(-٣ ، ٥) فإن إحداثيى النقطة التى تنصف $\overline{\text{أ ب}}$ هما

أ (٠ ، ١) ب (١ ، ٠) جـ (٠ ، -١) د (-١ ، ٠)

٣ المسافة بين النقطتين (٢ ، ٤)، (١٠ ، -٢) تساوى

أ ٩ ب ١٠ جـ ٣$\sqrt{١٠}$ د ٦

٤ الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٢٥ مركزها (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة

أ (١ ، ٤) ب (٥ ، ٠) جـ (٢٥ ، ٠) د (٥ ، ١)

٥ معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٥) وطول نصف قطرها يساوى ٧ وحدات هى:-

أ (س - ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩ ب (س + ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٤٩

جـ (س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩ د (س - ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٤٩

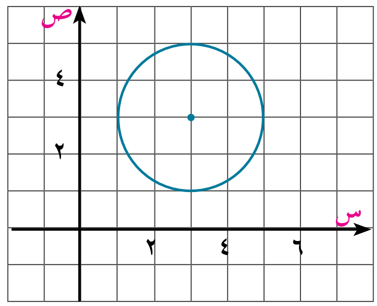
٦ محيط الدائرة التى معادلتها س^٢ + ص^٢ = ٨

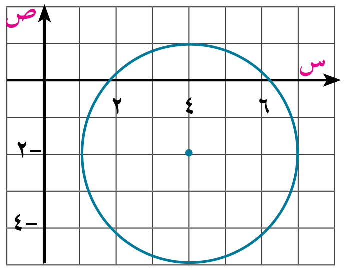
أ ٨ π ب ٦٤ π جـ ٢$\sqrt{٢}$ π د ٤$\sqrt{٢}$ π

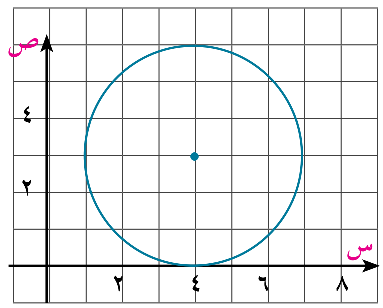
٧ اكتب معادلة الدائرة التى مركزها م وطول نصف قطرها نق إذا كان:

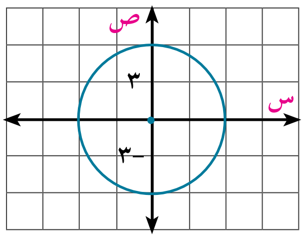
أ م (٢، ٣)، نق = ٥
ب م(٠ ، ٠)، نق = ٤
ج م (٣، ٠) ، نق = ٦
د م(٤ ، -٥)، نق = $\sqrt{٧}$
ه م (٠، -١)، نق = $٢\sqrt{٣}$
و م(-٤ ، -٣)، نق = $\frac{٣}{٢}$

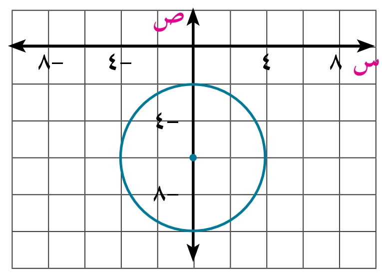
٨ اكتب معادلة الدائرة التى يمثلها الرسم المعطى

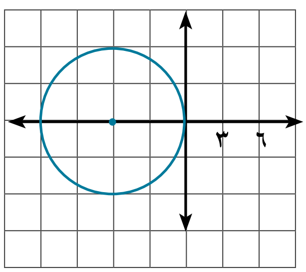
أ


ب


ج


د


ه


و


٩ أوجد معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (٧ ، -٥)، وتمر بالنقطة أ(٣ ، ٢).
ب $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ(٦ ، -٤) ، ب(٠ ، ٢).
ج مركزها النقطة (٥ ، -٣)، وتمس محور السينات.

١٠ أوجد إحداثيى المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

أ $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٧$
ب $(س + ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٤٩$
ج $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٦$
د $س^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٢٤$

(١١) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة فى الحالات الآتية:

أ مركزها م(٣ ، ١)، وطول قطرها يساوى ٨.

ب مركزها م (٠ ، ٠)، وتمر بالنقطة أ (-١ ، ٣)

جـ مركزها م (-٥ ، ٠)، وتمر بالنقطة ب (٣ ، ٤)

د $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ(٣ ، -٧) ، ب(٥ ، ١)

(١٢) أوجد إحداثيى المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية

أ س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠

ب س^٢ + ص^٢ + ٢س = ٨

جـ س^٢ + ص^٢ - ٦س + ١٠ص = ٠

د س^٢ + ص^٢ - ٨س = ١٢

(١٣) بين أى دائرتين مما يلى متطابقتان

أ س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص - ٣ = ٠ ، س^٢ + ص^٢ + ٦س - ١١ = ٠

ب س^٢ + ص^٢ - ١٤س + ٣٧ = ٠ ، س^٢ + ص^٢ + ١٠س + ١٣ = ٠

(١٤) بين أى المعادلات الآتية تمثل دائرة ، ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها:

أ س^٢ +ص^٢ + ٨س - ١٦ص - ١ = ٠

ب س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س - ٥ص = ٠

جـ $\frac{١}{٤}$س^٢ + $\frac{١}{٤}$ص^٢ + س - ٨ = ٠

د س^٢ + ص^٢ + ٢س ص - ١٢ = ٠

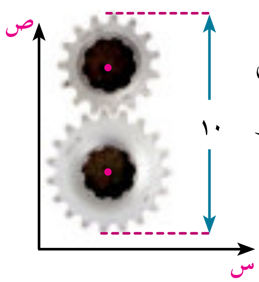
هـ س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص + ٧ = ٠

و ٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٣ص - ٨ = ٠

(١٥) الملاحة البحرية: يقع رادار عند الموقع أ(٧ ، -٩) و يغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحدد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى. هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، -٣٠)؟ فسر إجابتك.

(١٦) التصميم المعمارى: صمم مهندس معمارى مبنى قاعدته على شكل ثمانى منتظم، تمر رؤوسه بالدائرة س^٢ + ص^٢ - ٤س + ١٢ص - ٦٠ = ٠ احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة.

(١٧) الصناعة: يبين الشكل المقابل ترسين فى آلة مركزيهما يقعا على مستقيم يوازى محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات. أوجد معادلة الترس الأصغر علمًا بأن معادلة الترس الأكبر هى: س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٨ص + ٣٢ = ٠



(١٨) تفكير ابداعى: أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين أ(١ ، ٣) ، ب(٢ ، -٤) ويقع مركزها على محور السينات.

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

ملخص الوحدة

مفاهيم ومسلمات

المستقيم: أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستقيم وحيد.

المستوى هو سطح لا حدود له، بحيث إن المستقيم المار بأى نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح.

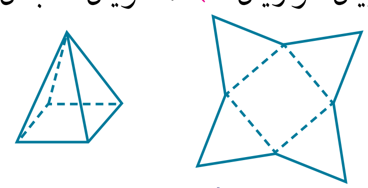
الفراغ هو مجموعة غير منتهية من النقاط، ويحتوى جميع الأشكال والمستويات والمجسمات، ويحتوى الفراغ على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.

العلاقة بين مستقيمين مختلفين فى الفراغ ١) متقاطعان: إذا تقاطعا فى نقطة واحدة. ٢) متوازيان : إذا وقعا فى مستوى واحد ولم يتقاطعا. ٣) متخالفان: لا يجمعهما مستوى واحد (غير متقاطعين وغير متوازيين).

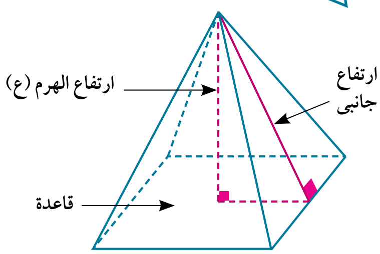
العلاقة بين مستقيم ومستوى فى الفراغ: ١) المستقيم يقطع المستوى فى نقطة. ٢) المستقيم يقع بتمامه فى المستوى. ٣) المستقيم لايشترك مع المستوى فى أى نقطة وفى هذه الحالة يكون المستوى والمستقيم متوازيان.

العلاقة بين مستويين مختلفين فى الفراغ: ١) يتقاطعان فى خط مستقيم. ٢) المستويان متوازيان. ٣) المستويان منطبقان

شبكة الجسم هى شكل ذو بعدين يمكن طيه؛ ليكون شكلًا ثلاثي الأبعاد.



الهرم هو مجسم له قاعدة واحدة وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة. ويسمى الهرم حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته فيكون هرمًا ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًّا.. وهكذا.



الهرم المنتظم هرم قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها فنجد:

- أحرفه الجانبية متساوية فى الطول.
- أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.
- الارتفاعات الجانبية متساوية

الهرم القائم يكون الهرم قائمًا إذا وفقط إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسي.

المخروط الدائري القائم هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعى القائمة دورة كاملة.

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبى.

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته.

المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق حيث ل طول راسمه ، نق طول نصف قطر قاعدته.

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^2 = π نق (ل + نق).

حجم الهرم يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته × ارتفاعه.

حجم المخروط يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته × ارتفاعه.

الدائرة: هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.

معادلة الدائرة : معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (ى، هـ) وطول نصف قطرها يساوى نق هى: (س - ى)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}

الصورة العامة لمعادلة الدائرة: الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها النقطة (-ل ، -ك) وطول نصف قطرها يساوى نق

هى: س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = صفر

حيث نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ ، ل^{٢} + ك^{٢} - جـ > ٠.

لتعيين إحداثى مركز دائرة وطول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها

- تحقق أولاً من وضع المعادلة فى الصورة العامة حيث: معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = الوحدة
- إحداثيا المركز (-ل ، - ك) أى $\left(\frac{\text{- معامل س}}{٢} ، \frac{\text{- معامل ص}}{٢}\right)$
- طول نصف قطر الدائرة يتعين من العلاقة نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ ، حيث ل^{٢} + ك^{٢} - جـ > ٠

معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:

اختبار تراكمي

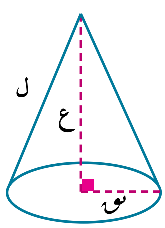
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا:

أ) مستقيم ونقطة لاتنتمى إليه. ب) مستقيمين متوازيين وغير منطبقين.

جـ) مستقيمين متقاطعين. د) مستقيمين متخالفين.

٢) المساحة الكلية (السطحية) للمخروط القائم تساوى:



أ) π نق ل ب) $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢} ع

جـ) π نق (نق + ل) د) $\frac{\pi}{٣}$ نق (نق ع + ٣ل)

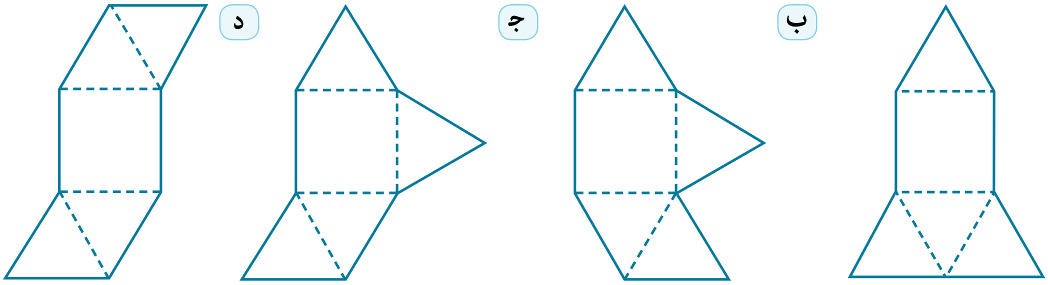
٣) هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦سم، وارتفاعه ١٠سم فإن حجمه يساوي.....سم٢

أ) ٨١٠ ب) ١٨٠ جـ) ٣٦٠ د) ٢٧٠

٤) الدائرة (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} + ٢ص = ٠ مركزها النقطة:

أ) (٢ ، ٢) ب) (-٢ ، -١) جـ) (٢ ، -١) د) (-٤ ، ٢)

٥ أى الشبكات التالية لاتصنع هرمًا رباعيًّا منتظمًا عند طيها.



أسئلة ذات إجابات قصيرة

٦ كم مستقيمًا يمكن رسمه فى كل حالة من الحالات الآتية:

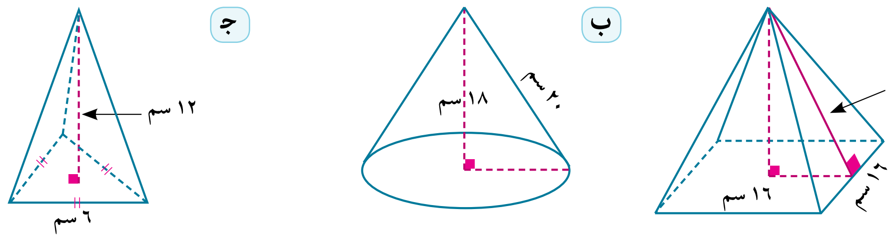
أ نقطتان مختلفتان. ب ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

جـ مستويان متقاطعان. د أربع نقاط فى الفراغ، لاتقع أى ثلاث منها على استقامة واحدة .

٧ اذكر عدد المستويات التى يمكن أن تمر بكل ممايأتى:

أ نقطة معلومة. ب نقطتين معلومتين. جـ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

٨ أوجد حجم كل مجسم ممايأتى لأقرب سنتيمتر مكعب.



٩ أوجد معادلة دائرة مركزها النقطة (٢، -٧) وتمر بالنقطة (١، ٣).

١٠ أى الدائرتين الآتيتين متطابقتان؟ فسر إجابتك.

أ س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٢ص - ٥ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٦س - ٤ = ٠

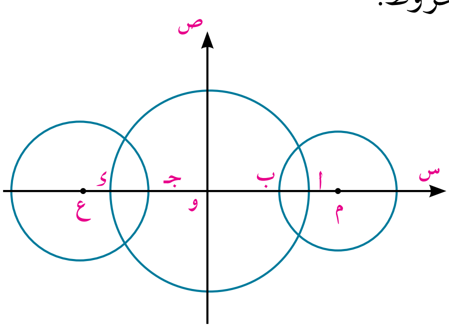
ب س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٨ص = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ١٢ص + = ٠

أسئلة ذات إجابات طويلة:

١١ احسب لأقرب رقم عشرى واحد حجم هرم خماسى منتظم، طول ضلع مضلع قاعدته ١٦سم، وارتفاعه ١٢سم.

١٢ قطاع دائرى م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره؛ ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط.

١٣ **فى الشكل المقابل:** النقط م ، و ، ع تقع على محور السينات لمستوى إحداثى متعامد، ن نقطة الأصل. إذا كان م، و، ع مراكز ثلاث دوائر أطوال أنصاف أقطارها هى ٥، ٩، ٦ من الوحدات على الترتيب، جـ ى = ٢ م أ = ٤ وحدات. أوجد الصورة العامة لمعادلة كل من الدوائر الثلاث.



الوحدة الرابعة

الاحتمال
Probability

مقدمة الوحدة

مخرجات التعلم

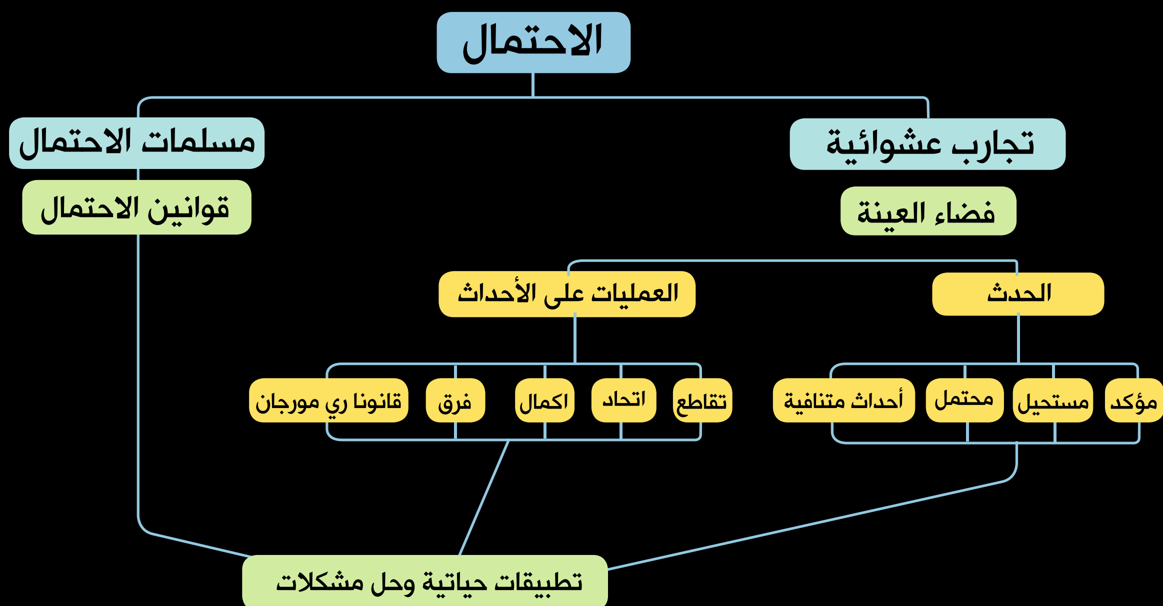
المصطلحات الأساسية

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١):

الأدوات والوسائل

مخطط تنظيمي للوحدة



٤ - ١

حساب الاحتمال
Calculating Probability

سوف تتعلم

- مفهوم التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- مفهوم الحدث - الحدث البسيط - الحدث المؤكد - الحدث المستحيل .
- العمليات على الأحداث: الاتحاد - التقاطع - الفرق - الإكمال.
- الأحداث المتنافية .
- قانونا دي مورجان.
- مفهوم الاحتمال
- حساب الاحتمال
- مسلمات الاحتمال وتطبيقات حياتية على الاحتمال

المصطلحات الأساسيّة

- تجربة عشوائية random experiment
- فضاء العينة sample space
- حدث event
- حدث بسيط simple event
- حدث مؤكد certain event
- حدث مستحيل impossible event
- أحداث متنافية mutually exclusive events
- الاحتمال probability
- مسلمات الاحتمال probability axioms

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة.

مقدمة :

سبق أن درست المفاهيم الأساسية للاحتمال بصورة مبسطة، وفى هذا الدرس سوف تستكمل دراسة هذه المفاهيم والعمليات على الأحداث فى حساب إحتمال وقوع حدث ما من خلال أمثلة وتطبيقات حياتية متنوعة.

مصطلحات ومفاهيم أساسية *Basic terms and concepts*

تعلم

التجربة العشوائية: Random Experiment

هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.

مثال

① بيِّن أيًّا من التجارب التالية تجربة عشوائية ؟

أ إلقاء حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

ب سحبت كرة ملونة من كيس به مجموعة من الكرات الملونة(دون أن نعرف ألوانها) وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

جـ إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة ما يظهر على الوجه العلوى.

د سحب كرة من كيس به أربع كرات متماثلة فى الحجم والوزن، الأولى بيضاء، الثانية سوداء، الثالثة حمراء، الرابعة خضراء، وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

الحل

التجارب (أ) ، (جـ)، (د) هى تجارب عشوائية؛ لأنه يمكن معرفة جميع نواتج كل منها قبل إجرائها ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يقع عند إجراء التجربة.

بينما تجربة (ب) هى تجربة غير عشوائية؛ لأنه لايمكن تحديد ناتج التجربة قبل إجرائها.

حاول أن تحل

① بيِّن أيًّا من التجارب الآتية هى تجربة عشوائية :

أ إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات.

ب سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.

جـ سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذى يظهر على البطاقة المسحوبة.

تعلم

تعريف

فضاء العينة (فضاء النواتج) : *Sample space (outcomes space)*

➤ فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة، ويرمز له بالرمز (ف)

ملاحظة:

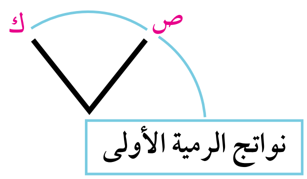
➤ يرمز لعدد عناصر فضاء العينة ف بالرمز ن (ف) .

➤ يكون فضاء العينة منتهيًا إذا كان عدد عناصره محدودًا، أو غير منتهٍ إذا كان عدد عناصره غير محدود ، وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهي.

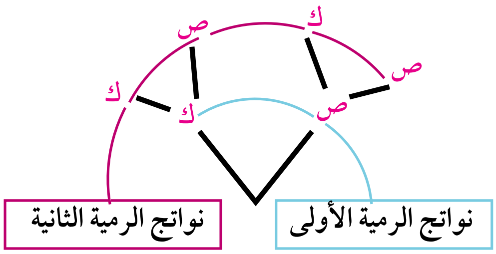
فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية الشهيرة :

أولاً: إلقاء قطعة نقود : *Tossing a coin*

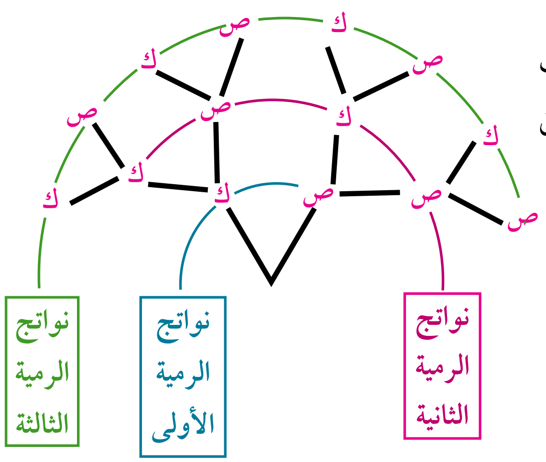
١- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر هو: ف = { ص، ك}
حيث ص ترمز للصورة ، ك ترمز للكتابة
ويكون : ن(ف) = ٢



٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات هو:
ف = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}
ويكون : ن (ف) = ٢ × ٢ = ٤ = ٢^{٢}



٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات (يمكن الحصول عليه من الشجرة البيانية المقابلة هو:
ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ك ، ك ، ك) ،
(ص ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ،
(ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ،
(ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص)}
ويكون : ن(ف) = ٢ × ٢ × ٢ = ٨ = ٢^{٣}



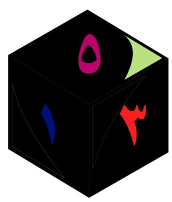
لاحظ من الأمثلة السابقة

١- عند رمى قطعة نقود م من المرات المتتالية يكون ن (ف) = ٢^{م} ٢- (ص، ك) ≠ (ك، ص) لماذا؟

٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعتى نقود متمايزتين (مختلفتين فى الشكل أو الحجم) معًا هو نفس فضاء العينة عند إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين، ويكون كل ناتج من نواتج التجربة على الشكل الزوج المرتب:
(وجه القطعة الأولى ، وجه القطعة الثانية).

ثانيًا : إلقاء حجر نرد :

Tossing a die



١- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى هو :

ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }   ويكون : ن (ف) = ٦

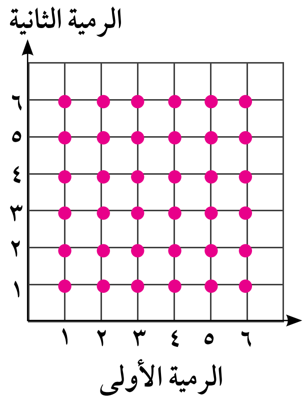
٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر فى كل مرة على الوجه العلوى هو مجموعة الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول هو ناتج الرمية الأولى، ومسقطها الثانى هو ناتج الرمية الثانية أى أن:

ف = { (س، ص) : س∈ { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، ص∈ { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}}   والأشكال التالية توضح ذلك .

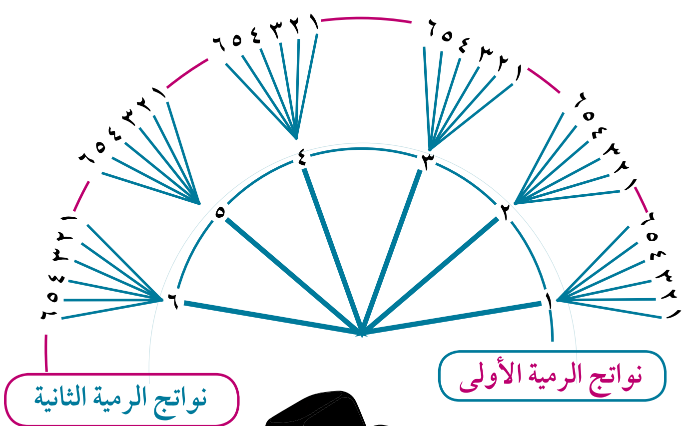
أ صورة جدولية :

الرمية الأولى / الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١، ١)	(١، ٢)	(١، ٣)	(١، ٤)	(١، ٥)	(١، ٦)
٢	(٢، ١)	(٢، ٢)	(٢، ٣)	(٢، ٤)	(٢، ٥)	(٢، ٦)
٣	(٣، ١)	(٣، ٢)	(٣، ٣)	(٣، ٤)	(٣، ٥)	(٣، ٦)
٤	(٤، ١)	(٤، ٢)	(٤، ٣)	(٤، ٤)	(٤، ٥)	(٤، ٦)
٥	(٥، ١)	(٥، ٢)	(٥، ٣)	(٥، ٤)	(٥، ٥)	(٥، ٦)
٦	(٦، ١)	(٦، ٢)	(٦، ٣)	(٦، ٤)	(٦، ٥)	(٦، ٦)

ب صورة هندسية :



جـ الشجرة البيانية



لاحظ أن:

١- ن (ف) = ٦ × ٦ = ٣٦ = $٦^٢$

٢- ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} × { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }

٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين فى آن واحد (معًا)، هو نفس فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد واحد مرتين متتاليتين.

مثال

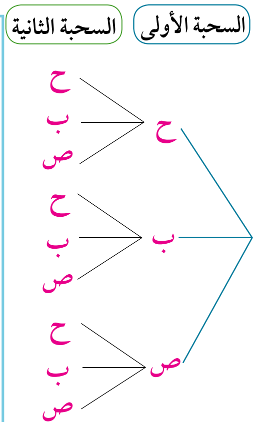
٢ كيس به ثلاث كرات متماثلة الأولى حمراء، والثانية بيضاء، والثالثة صفراء . اكتب فضاء العينة إذا سحبت كرتان الواحدة بعد الآخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية (مع الإحلال) وملاحظة تتابع الألوان.

الحل

نرمز إلى الكرة الحمراء بالرمز (ح) والكرة البيضاء بالرمز (ب) والكرة الصفراء بالرمز (ص):

أولاً: عندما تعاد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحبة الثانية تصبح كل كرة من الكرات الثلاث لها فرصة الظهور فى السحبة الثانية، ويصبح من الممكن أن تسحب نفس الكرة مرة ثانية، ويوضح الشكل المقابل الشجرة البيانية لفضاء العينة حيث ن (ف) = ٣^٢ = ٩

ف={(ح،ح)،(ح،ب)،(ح،ص)،(ب،ح)،(ب،ب)،(ب،ص)،
(ص،ح)،(ص،ب)، (ص،ص)}



ف
(ح،ح)
(ح، ب)
(ح، ص)
(ب ، ح)
(ب ، ب)
(ب، ص)
(ص ، ح)
(ص ، ب)
(ص، ص)

أضف إلى معلوماتك

إذا سحبت الكرة دون إحلال، فهذا يعنى عدم إعادة الكرة إلى الكيس بعد سحبها، وبذلك لن يكون هناك فرص لظهورها فى السحبة الثانية.

حاول أن تحل

٢ صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سُحِبَت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال وملاحظة رقم الكرة . اكتب فضاء العينة و بين عدد عناصره.

تعلم

تعريف

الحدث *The event*

➢ الحدث هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة .

تعريف

الحدث البسيط (الحدث الأولى) *The simple event*

➢ هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى عنصرًا واحدًا فقط.

تعريف

الحدث المؤكد : *The certain event*

هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ف

وهو حدث مؤكد الوقوع في كل مرة تجرى فيها التجربة

الحدث المستحيل *The impossible event*

هو الحدث الخالى من أى عنصر و يرمز له بالرمز ϕ

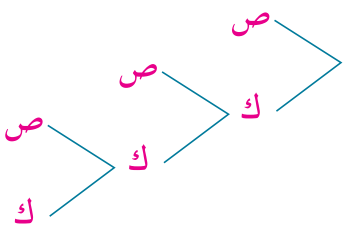
وهو حدث مستحيل أن يقع في أى مرة تجرى فيها التجربة

مثال

(٣) عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات .
اكتب فضاء النواتج ف، ثم عين الأحداث الآتية:
أ "حدث ظهور صورة على الأكثر"
ب "حدث ظهور صورة على الأقل"
ج "حدث ظهور كتابتين على الأقل"
د "حدث ظهور صورتين على الأقل"

الحل

من الرسم نجد أن



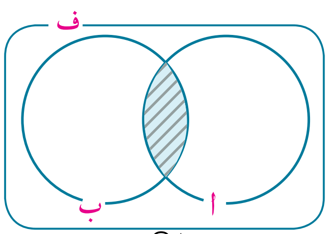
ف = {ص ، (ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)،(ك ، ك ، ك)}
أ = {ص،(ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)،(ك ، ك ، ك)} = ف
ب = {ص،(ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)}
ج = {(ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}
د = { } = ϕ الحدث المستحيل

حاول أن تحل

(٣) عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين.
اكتب فضاء النواتج ثم عين الأحداث الآتية:
أ "حدث ظهور صورة على الأقل"
ب "حدث ظهور كتابتين على الأكثر"
ج "حدث ظهور كتابة على الأكثر"

العمليات على الأحداث *Operation of the events*

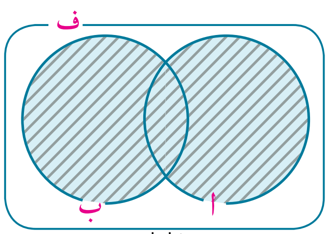
تعلم



أ ∩ ب

أولاً: التقاطع *Intersection*

تقاطع الحدثين أ ، ب هو الحدث أ ∩ ب الذى يحوى عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى أ، ب معًا و يعنى وقوع أ و ب (وقوع الحدثين معًا)

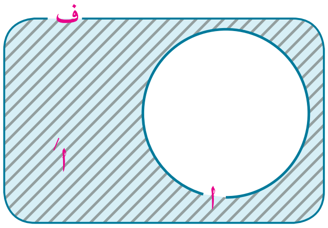


أ ∪ ب

ثانيًا : الاتحاد: *Union*

اتحاد الحدثين أ، ب هو الحدث أ ∪ ب الذى يحوى عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى أ أو ب أو كليهما معًا ويعنى وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)

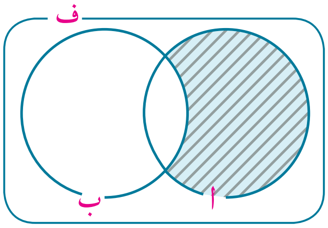
ثالثًا : الإكمال *Completion*



الحدث أَ يسمى الحدث المكمل للحدث أ ، لذلك أَ يحوى كل عناصر فضاء العينة التى لاتنتمى إلى الحدث أ ، ويعنى **عدم وقوع الحدث أ** .

لاحظ : أ ∪ أَ = ف ، أ ∩ أَ = ϕ

رابعًا: الفرق *Difference*



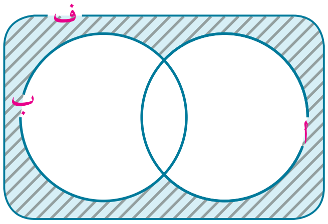
الحدث أ - ب يحوى كل عناصر الفضاء التى تنتمى إلى أ، ولا تنتمى إلى ب وهى أيضًا نفس عناصر أ ∩ بَ

ويعنى **وقوع أ وعدم وقوع ب (وقوع أ فقط)**

أ - ب = أ ∩ بَ = أ - (أ ∩ ب)

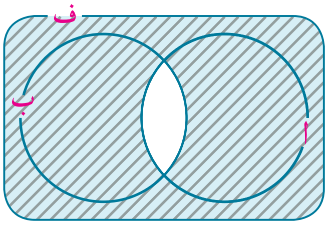
خامسًا: قانونا دى مورجان

إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإن :



(أولًا) أَ ∩ بَ = (أ ∪ ب)َ

وتعنى حدث (عدم وقوع أى من الحدثين) أو (عدم وقوع أ وعدم وقوع ب)



(ثانيًا) أَ ∪ بَ = (أ ∩ ب)َ

و تعني حدث "عدم وقوع الحدثين معًا" أو حدث "وقوع أحد الحدثين على الأكثر".

تعلم

الأحداث المتنافية *Mutually exclusive events*

يقال لحدثين أ ، ب أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفى (يمنع) وقوع الآخر.

فمثلاً: **١**- إذا كان أ" حدث النجاح فى امتحان ما" ، ب" حدث الرسوب فى نفس الامتحان" فإن وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

٢- فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن

ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

إذا كان أ حدث ظهور عدد فردى أى : أ = { ١، ٣، ٥}

ب حدث ظهور عدد زوجى أى : ب = { ٣، ٤، ٦}

فإن أ ∩ ب = ϕ أى وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر .

تعريف

- يقال: إن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ϕ
- يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذًا وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

لاحظ :

١- إذا كان أ ∩ ب = ϕ فإن أ ، ب حدثان متنافيان.

و إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاثة أحداث من ف وكان : أ ∩ ب = ϕ ، ب ∩ ج = ϕ ، ج ∩ أ = ϕ

فإن: أ ، ب، ج أحداث متنافية والعكس صحيح.

٢- الأحداث البسيطة (الأولية) فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية.

٣- أى حدث أ ومكمله أ َ هما حدثان متنافيان.

مثال

④ فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها.

أولاً: مثل فضاء العينة بيانيًّا واكتب كلًّا من الحدثين الآتيين.

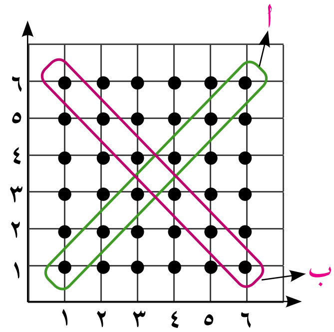
الحدث أ " ظهور نفس العدد على الوجهين" الحدث ب " ظهور عددين مجموعهما ٧".

ثانيًا : هل الحدثان أ ، ب متنافيان ؟ فسر إجابتك .

الحل

أولاً : عناصر فضاء العينة لهذه التجربة هى أزواج مرتبة عددها = ٦^{٢} = ٣٦

الشكل المقابل يمثل فضاء العينة؛ حيث كل عنصر من عناصر فضاء العينة يمثل بنقطة كما فى الشكل .



أ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤) ، (٥، ٥) ، (٦، ٦) }

ب = { (٦، ١) ، (٥، ٢)، (٤، ٣) ، (٣، ٤) ، (٢، ٥) ، (١، ٦) }

ثانيًا: ∵ أ ∩ ب = ϕ ∴ أ ، ب حدثان متنافيان

حاول أن تحل

④ فى المثال السابق اكتب كلًّا من الحدثين الآتيين :

ج حدث " ظهور عددين مجموعهما يساوى ٥" د حدث " ظهور عددين أحدهما ضعف الآخر"

هل الحدثان ج، د متنافيان ؟ فسر إجابتك.

الاحتمال *Propability*

تعلم

حساب الاحتمال :

إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما، جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات، فإن احتمال وقوع أى حدث أ ⊂ ف يرمز له بالرمز ل (أ) حيث :

$$ل\,(أ) = \frac{ن\,(أ)}{ن\,(ف)} = \frac{\text{عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

مثال

⑤ سحبت كرة عشوائيًّا من صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء، كرتان لونهما أحمر ، الباقى باللون الأخضر ، احسب احتمال الأحداث الآتية:

أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء.

ج حدث أن تكون الكرة ليست خضراء.

الحل

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء = ل (أ) = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد جميع الكرات}} = \frac{٢}{١٠} = ٠{,}٢$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء + عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$

$= \frac{٢+٣}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = ٠{,}٥$

احتمال أن تكون الكرة ليست خضراء = ل(ج)

= احتمال أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء = $\frac{٢+٥}{١٠} = ٠{,}٧$

فكر: هل يمكن الحصول على ل (ج) بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

⑤ فى المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

د حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء.

هـ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو خضراء .

تعلم

مسلمات الاحتمال

Axioms of probability

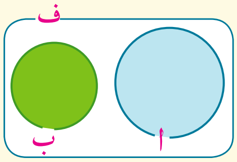
١- لكل حدث أ ⊂ ف يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث أ يرمز له بالرمز ل(أ)

حيث : ٠ ⩽ ل (أ) ⩽ ١

٢- ل (ف) = ١

٣- إذا كان أ ⊂ ف، ب ⊂ ف

وكان أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب)



من المسلمات السابقة نلاحظ :

المسلمة الأولى تعنى احتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى ينتمى للفترة [٠، ١]

المسلمة الثانية تعني أن احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

يمكن تعميم **المسلمة الثالثة** إلى أي عدد محدود من الأحداث المتنافية

ل($أ_١ \cup أ_٢ \cup أ_٣ \cup ... \cup أ_ن$) = ل($أ_١$) + ل($أ_٢$)+ل($أ_٣$) + ... + ل($أ_ن$)

حيث $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$ ، ... ،$أ_ن$ أحداث متنافية

نتائج هامة

(١) ل (ϕ) = ٠

(٢) ل (أَ) = ١ - ل(أ)

(٣) ل (أ-ب) = ل(أ) - ل (أ $\cap$ ب)

(٤) ل(أ $\cup$ب) = ل(أ) + ل (ب) - ل (أ $\cap$ ب)

أضف إلى معلوماتك

إذا كان أ $\supset$ ب

فإن ل(أ) $\geqslant$ ل(ب)

مثال

٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث :

ل(أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{١}{٤}$ احسب :

أ ل (أ $\cup$ ب) **ب** ل(أَ) **ج** ل (أ - ب) **د** ل (أَ $\cap$ بَ)

الحل

أ ل (أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل (ب) - ل (أ$\cap$ب) = $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{٣}{٤}$ - $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٧}{٨}$

ب ل (أَ) = ١ - ل (أ) = ١ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$

ج ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{٣}{٨}$ - $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٨}$

د ل (أَ $\cap$ بَ) = ل (أ $\cup$ ب)َ = ١ - ل (أ $\cup$ ب) = ١ - $\frac{٧}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

حاول أن تحل

٦ فى المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

أ ل (بَ) **ب** ل(ب - أ) **ج** ل (أ $\cup$بَ)

مثال

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء تجربة عشوائية ف وكان ل(أ) =$\frac{٥}{٨}$ ، ل (ب) =$\frac{١}{٢}$ ، ل (أ -ب) =$\frac{٣}{٨}$ فأوجد :

أ ل (أ $\cap$ ب) **ب** ل(أ $\cup$ ب) **ج** ل (أَ $\cap$ بَ) **د** ل (أَ $\cup$ ب)

الحل

أ ل (أ $\cap$ ب) = ل (أ) - ل (أ -ب) = $\frac{٥}{٨}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٢}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$

ب ل(أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ $\cap$ب) = $\frac{٥}{٨}$ + $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٧}{٨}$

ج ل (أَ $\cap$ بَ) = ل (أ$\cup$ ب)َ = ١ - ل(أ $\cup$ ب) = ١ - $\frac{٧}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

د ل (أَ $\cup$ ب) = ل (أ$\cap$ بَ)َ =١ - ل (أ$\cap$ بَ) = ١ - ل (أ - ب)

= ١ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$

فكر : هل يمكنك إيجاد ل (أَ ∪ ب) بطريقة أخرى ؟ وضح ذلك

حاول أن تحل

٧ في المثال السابق أوجد :

أ ل (أَ) ب ل (أ ∪ بَ) جـ ل (ب ∩ أَ)

مثال

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف، وكان ل (أَ) = $\frac{١}{٣}$ ل (أ) ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$

، ل (أَ ∪ بَ) = $\frac{٥}{٨}$ فأوجد :

أ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.

جـ احتمال وقوع الحدث ب فقط. د احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

الحل

∵ ل (أَ ∪ بَ) = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ب)َ = ١ - ل (أ ∩ب) = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$

∵ ل (أَ) = $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ∴ ١ - ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ∴ $\frac{٤}{٣}$ ل(أ) = ١ ∴ ل(أ) = $\frac{٣}{٤}$

أ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٧}{٨}$

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر= ل (أ ∩ ب)َ = ل (أَ ∪ بَ) = $\frac{٥}{٨}$

جـ احتمال وقوع الحدث ب فقط= ل (ب - أ) = ل(ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

د احتمال وقوع أحد الحدثين فقط = ل (أ ∪ ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٨}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

فكر: هل يمكنك إيجاد احتمال وقوع أحد الحدثين فقط بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب)َ = ٠,١

فاحسب احتمال الأحداث الآتية :

أ حدث "وقوع أحد الحدثين على الأقل" ب حدث" وقوع أ فقط"

جـ حدث " وقوع أحد الحدثين فقط" د حدث " وقوع أحد الحدثين على الأكثر"

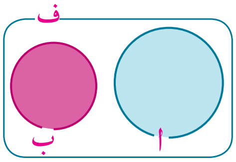
مثال

٩ أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث :

ل (ب) = ٣ ل (أ) ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧٢ أوجد ل (أ) ، ل (ب)

أولًا: إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين .

ثانيًا: إذا كان أ ⊃ ب



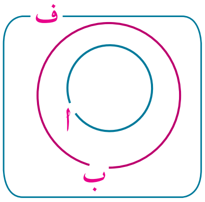
الحل

بفرض أن ل (أ) = س ∴ ل (ب) = ٣ س

أولًا: ∵ أ ، ب حدثان متنافيان.

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) فيكون : ٠,٧٢ = ٣ س + س

∴ س = ٠,١٨ ، ل (أ) = ٠,١٨ ، ل (ب) = ٠,٥٤



ثانيًا: ∵ أ ⊂ ب ∴ أ ∪ ب = ب

ل (أ ∪ ب) = ل (ب) = ٣س = ٠,٧٢

∴ ل (أ) = ٠,٢٤ ، ل (ب) = ٠,٧٢

؟ حاول أن تحل

(٩) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث :

ل(ب) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل (أ)

أ) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين. ب) إذا كان ب ⊂ أ

تفكير ناقد:

بيِّن كيف يمكن حساب ل (أ) إذا كان أ ⊂ ف ، ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، إذا كان: $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (أَ)}} = \frac{٣}{٧}$

؟ حاول أن تحل

(١٠) إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث ف = { أ ، ب ، ج} ، وكان $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (أَ)}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{ل (ب)}}{\text{ل (بَ)}} = \frac{٥}{٢}$ ،

أوجد ل(ج)

مثال

(١٠) **الربط بالبيئة المدرسية:** إذا كان احتمال نجاح طالب فى امتحان الفيزياء يساوى ٠,٨٥ ، واحتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات ٠,٩ واحتمال نجاحه فى الامتحانين معًا ٠,٨ أوجد احتمال :

أ) نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل. ب) نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط.

ج) عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا.

الحل

ليكن أ حدث نجاح الطالب فى امتحان الفيزياء ، ب حدث نجاح الطالب فى الرياضيات

فيكون : ل (أ) = ٠,٨٥ ، ل (ب) = ٠,٩ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٨

أ) احتمال نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = ٠,٨٥ + ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,٩٥

ب) احتمال نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط يعنى احتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات وعدم نجاحه فى امتحان الفيزياء أى ل (ب - أ)

∴ ل (ب- أ) = ل (ب) - ل (ب ∩ أ) = ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,١

ج حدث عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا = (أ ∩ ب)´ وهو حدث مكمل للحدث (أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب)´ = ١ - ل (أ ∩ ب) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

تطبيقات حياتية:

حاول أن تحل

(١١) للحصول على وظيفة فى إحدى الشركات يتقدم الشخص لاختبارين ، أحدهما نظرى، والآخر عملى، إذا كان احتمال النجاح فى الاختبار النظرى ٠,٧٥ واحتمال نجاحه فى الاختبار العملى ٠,٦ واحتمال النجاح فى الاختبارين معًا ٠,٥ فإذا تقدم شخص ما للحصول على هذه الوظيفة لأول مرة أوجد احتمال :

أ نجاحه فى الاختبار النظرى فقط. ب نجاحه فى أحد الاختبارين على الأقل .

تفكير ناقد:

الربط بالرياضة: صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفى معه بأن احتمال فوز فريقه فى مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه فى مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه فى المباراتين معًا ٠,٥ هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟ فسر إجابتك.

مثال

(١١) ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، احسب احتمال:

أولاً: أ حدث أن يكون "مجموع العددين الظاهرين أقل من أو يساوى ٤"

ثانيًا: ب حدث أن يكون " أحد العددين ضعف الآخر"

ثالثًا: ج حدث أن يكون "الفرق المطلق للعددين يساوى ٢"

رابعًا: د حدث أن يكون " مجموع العددين أكبر من ١٢ "

الحل

ن(ف) = ٣٦

أولاً: أ = {(١،١)، (١ ، ٢) ، (١، ٣)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٣، ١) } ∴ ن (أ) = ٦، ∴ل (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ثانيًا: ب = { (١، ٢)، (٢، ١)، (٢، ٤)، (٤، ٢)، (٣، ٦) ، (٦، ٣)} ∴ ن (ب) = ٦ ∴ل (ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ثالثًا: ج = {(١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٤)، (٤، ٢)، (٣، ٥)، (٥، ٣) ، (٤، ٦) ، (٦، ٤)} ∴ ل(ج) = $\frac{٨}{٣٦}$ = $\frac{٢}{٩}$

رابعًا: حيث إنه لايمكن أن يظهر عددان مجموعهما أكبر من ١٢، ∴ د = ϕ ، ل (د) = صفر

حاول أن تحل

(١٢) فى المثال السابق احسب احتمال الأحداث الآتية :

أولاً: أ حدث " العددان الظاهران متساويان "

ثانيًا: ب حدث " العدد فى الرمية الأولى فردي وفى الرمية الثانية زوجي"

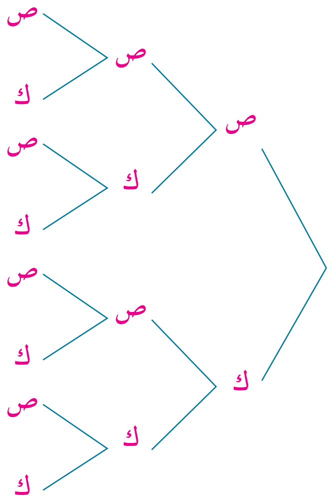
مثال

١٢ ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، ولوحظ تتابع الصور والكتابات احسب احتمالات الأحداث الآتية :

أولاً: أ حدث ظهور صورة واحدة فقط.

ثانيًا: ب حدث ظهور صورتين على الأقل.

ثالثًا: ج حدث ظهور صورتين بالضبط.



الحل

ف = { (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك) ،
(ك، ص، ص)، (ك، ص، ك) ، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}،
ن (ف) = ٨

أولاً: ∵ أ حدث ظهور صورة واحدة فقط .
∴ أ = { (ص، ك، ك) ، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)} ،
∵ ن(أ) = ٣ ∴ ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$

ثانيًا : ∵ ب حدث ظهور صورتين على الأقل، أى إما صورتان أو ثلاث صور
∴ ب = { (ص، ص، ك) ، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ص، ص)}
∵ ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

ثالثًا: ∵ ج حدث ظهور صورتين بالضبط
∴ ج = { (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)} ∵ ن (ج) = ٣ ∴ ل (ج) = $\frac{٣}{٨}$

حاول أن تحل

١٣ فى المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

أولاً : أ حدث ظهورنفس الوجه في الرميات الثلاث **ثانيًا :** ب حدث ظهور صورة على الأكثر.

ثالثًا: ج حدث ظهور عدد فردى من الصور **رابعًا:** د حدث ظهور كتابة على الأقل.

خامسًا: هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوى نفس العدد من الكتابات.

مثال

١٣ الارتباط بالمجتمع: فى أحد المؤتمرات حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة كل منهم يتحدث بلغة واحدة فقط، وبياناتهم موضحة بالجدول التالى :

	يتحدث العربية	يتحدث الإنجليزية	يتحدث الفرنسية	المجموع
رجل	٥٠	٤٥	٢٥	١٢٠
امرأة	٤٥	٣٠	٥	٨٠
المجموع	٩٥	٧٥	٣٠	٢٠٠

إذا اختير أحد الحاضرين عشوائيًّا فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص المختار:

أ امرأة تتحدث العربية. ب رجل يتحدث الإنجليزية.

ج يتحدث العربية أو الفرنسية. د يتحدث العربية والإنجليزية.

هـ امرأة لا تتحدث الإنجليزية و لا تتحدث العربية.

الحل

أ احتمال أن يكون المختار " امرأة تتحدث العربية " = $\frac{٤٥}{٢٠٠}$ = ٠,٢٢٥

ب احتمال أن يكون المختار "رجل يتحدث الإنجليزية" = $\frac{٤٥}{٢٠٠}$ = ٠,٢٢٥

ج احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية أو الفرنسية" = $\frac{٩٥ + ٣٠}{٢٠٠}$ = ٠,٦٢٥

د احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية والإنجليزية" = ل (ϕ) = صفر

هـ احتمال أن يكون المختار "امرأة لا تتحدث الإنجليزية و لا تتحدث العربية" = $\frac{٥}{٢٠٠}$ = ٠,٠٢٥

حاول أن تحل

١٤ في المثال السابق احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

أ لا يتحدث الإنجليزية. ب يتحدث الألمانية.

ج إمرأة تتحدث الفرنسية أو الإنجليزية. د رجل يتحدث العربية أو امرأة تتحدث الإنجليزية.

تمـــاريـن (٤ – ١)

١ يرغب طالب في شراء حقيبة ويمكنه اختيارها من ثلاثة أنواع بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بُنيًّا ، مثِّل فضاء العينة في هذا الموقف بالشجرة البيانية.

٢ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

أ اكتب فضاء العينة المرتبطة بهذه التجربة ثم عين كلًّا من الأحداث الآتية.

- الحدث أ «ظهور صورة وعدد فردي». - الحدث ب «ظهور كتابة وعدد زوجي».
- الحدث ج «ظهور عدد أولي أكبر من ٢». - الحدث د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٣».

٣ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي.

عين كلًّا من الأحداث التالية:

- الحدث أ «ظهور عددين متساويين». - الحدث ب «ظهور عددين مجموعهما ٩».
- الحدث ج «ظهور عددين مجموعهما ١٣». - الحدث د «ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل».

٤ من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤} كون عددًا من رقمين مختلفين. مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة، ثم اكتب ف وعيِّن منها الأحداث الآتية :

- أ حدث أن يكون رقم الآحاد فرديًّا . - ب حدث أن يكون رقم العشرات فرديًّا.
- ج حدث أن يكون كلا الرقمين فرديًّا. - د حدث أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فرديًّا.

٥ حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة اكتب الأحداث الآتية :

أ حدث " العدد المسجل زوجى وأكبر من ١٠" ب حدث " العدد المسجل عامل من عوامل ١٢"

ج حدث " العدد المسجل فردى و يقبل القسمة على ٣" د حدث " العدد المسجل مضاعف للعددين ٢، ٥ "

هـ حدث " العدد المسجل أولى"

و حدث " العدد المسجل يحقق المتباينة ٥س - ٣ ⩾ ١٧ "

٦ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل سحب البطاقة الثانية ، ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ و إذا كان :

أ حدث " العدد فى السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد فى السحبة الأولى"

ب حدث " مجموع العددين أكبر من ١٣"

اكتب كلًّا من أ ،ب هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.

٧ فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات مثِّل فضاء النواتج بشكل شجرى، ثم عيِّن الأحداث الآتية :

أ حدث " ظهور كتابتين على الأقل" ب حدث " ظهور كتابتين على الأكثر"

ج حدث " ظهور صورة فى الرمية الأولى" د حدث " عدم ظهور صورة فى الرميات الثلاث "

٨ ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة الوجه العلوى لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد، مثِّل فضاء العينة بشكل شجرى ثم أوجد الأحداث الآتية :

أ حدث " ظهور كتابة وعدد زوجى" ب حدث " ظهور صورة وعدد فردى"

ج حدث " عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب" د حدث " وقوع الحدث أ فقط "

هـ حدث " وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب"

اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

٩ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو:

أ $\frac{٢}{٥}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{١}{٣}$ د $\frac{١}{٦}$

١٠ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، فإن احتمال الحصول على عدد زوجى فى الرمية الأولى وعدد أولى فى الرمية الثانية هو :

أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{١}{٦}$ ج $\frac{١}{٩}$ د $\frac{١}{٤}$

١١ إذا سحبت كرة عشوائيًّا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن: احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو :

أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{٢}{٣}$ ج $\frac{٧}{١٥}$ د $\frac{١}{٢}$

(١٢) يحتوى صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ اختيرت بطاقة عشوائيًّا، فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقم يقسم العدد ٩ أو رقمًا فرديًّا هو :

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٧}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٩}$

(١٣) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية، وكان ب ⊂ أ ، ل (أ) = ٢ل(ب) = ٠,٦ فإن ل (أ - ب) يساوى:

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

(١٤) ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣ ولوحظ العدد على الوجه العلوي:

(أ) احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- أ "حدث ظهور عدد فردى."
- ب "حدث ظهور عدد أولى."
- ج "حدث ظهور عدد زوجى."
- د "حدث ظهور عدد أكبر من ١٢."
- هـ "حدث ظهور عدد مكون من رقمين."
- و "حدث ظهور عدد مكون من رقم واحد."

(ب) احسب: ل(أ ∪ ج) ، ل(هـ ∪ و) ، ، ل(ب ∩ د).

(١٥) إذا كان ف = {أ ، ب، ج، د} فضاء عينة لتجربة عشوائية، أوجد:
ل(أ) ، ل(ب) ، إذا كان ل (أ) = ٣ ل(ب)، ل(ج) = ل(د) = $\frac{٧}{١٨}$

(١٦) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان:
ل (أ ∪ ب) = ٠,٦، ل (أ - ب) = ٠,٢٥ أحسب ل(أ)، ل(ب).

(١٧) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل(أ) = $\frac{١}{٣}$، ل(ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد:

(أ) ل(أ) (ب) ل(أ ∪ ب) (جـ) ل(أ - ب) (د) ل(أ ∩ بَ)

(١٨) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث:
ل(أ) = ٠,٤ ، ل(بَ) = ٣ل(ب) ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ احسب احتمال:

(أ) وقوع أ فقط. (ب) وقوع أ أو ب. (جـ) وقوع أ وعدم وقوع ب.

(١٩) صندوق به كرات متماثلة وملونه منها ٤ حمراء، ٦ زرقاء، ٥ صفراء، سحبت منه كرة واحدة عشوائيًّا. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

(أ) حمراء. (ب) زرقاء أو صفراء. (جـ) ليست زرقاء. (د) ليست حمراء ولا صفراء.

(٢٠) مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًّا ولوحظ العدد المدون عليها.
احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:

(أ) عددًا يقبل القسمة على ٣ (ب) عددًا يقبل القسمة على ٥
(جـ) عددًا يقبل القسمة على ٣ و ٥ (د) عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥

٢١ ألقيت ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة. احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- أ حدث ظهور صورة واحدة أو صورتين.
- ب حدث ظهور صورة واحدة على الأقل.
- ج حدث ظهور صورة على الأكثر.
- د حدث ظهور كتابتين متتاليتين على الأقل.

٢٢ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة، احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- حدث ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى.
- حدث مجموع العددين فى الرميتين يساوى ٨
- حدث مجموع العددين فى الرميتين أقل من أو يساوي ٥

٢٣ الربط بالرياضة: عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصًا شملهم استطلاع للرأى، وجد أن ٤٠ شخصًا، منهم يشجع نادى الهلال، و٢٨ شخصًا يشجع نادى النجمة، وأن ٨ أشخاص لايشجعون أيًّا من الناديين.
إذا اختير شخص عشوائيًا من أفراد العينة، فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعى:

أ أحد الناديين على الأقل. ب الناديين معًا.
ج نادى الهلال فقط. د أحد الناديين فقط.

٢٤ فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد، إذا كان أ هو حدث ظهور صورة وعدد أولى ، ب حدث ظهور عدد زوجى . احسب احتمال وقوع كلٍّ من الحدثين أ ، ب ثم احسب احتمال كلًّا من الأحداث الآتية :

أ وقوع أحد الحدثين على الأقل ب وقوع الحدثين معًا
ج وقوع ب فقط د وقوع أحد من الحدثين فقط

٢٥ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا من ٥٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٥٠، احسب احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة:

أ مضاعفًا للعدد ٧ ب مربعًا كاملًا
ج مضاعف للعدد ٧ ومربعًا كاملاً د ليس مربعًا كاملًا، وليس مضاعفًا للعدد ٧

٢٦ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف، ل(ب) = $\frac{٤}{٥}$ ل (أ) ، ل (أ -ب) = ٠,٢٤
ل (ب∩أ´) = ٠,١٥ أوجد : ل (أ)، ل (ب)، ل (أ ∪ ب)، ل (أ´ ∪ ب´)

٢٧ كتب طارق ٧٥ خطابًا على الآلة الكاتبة، فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء ، وكتب زياد ٢٥ خطابًا أخرى، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء، فإذا اختير خطاب عشوائيًا مما تم كتابته بواسطة طارق وزياد، فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب :

أ بلا أخطاء . ب زياد هو الذى كتب الخطاب.
ج زياد لم يخطئ فى كتابته. د طارق قد أخطأ فى كتابته .

٢٨ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة ف، ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٨، ل (أ´∪ ب) = ٠,٥ فاحسب ل(أ´∩ ب)

ملخص الوحدة

١ التجربة العشوائية : هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.

٢ فضاء العينة (فضاء النواتج): فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة و يرمز له بالرمز ف.

٣ الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

٤ الحدث بسيط (أولى): هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحوى عنصرًا واحدًا فقط.

٥ الحدث المؤكد : هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ف.

٦ الحدث المستحيل: هو الحدث الخالى من أى عنصر و يرمز له بالرمز ϕ.

٧ العمليات على الأحداث: التقاطع - الاتحاد - الإكمال - الفرق.

٨ الأحداث المتنافية

يقال إن الحدثين أ، ب متنافيان إذا كان أ $\cap$ ب = ϕ.

- يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

٩ حساب الاحتمال

- إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما ، والأحداث الأولية التى تحويها متساوية الإمكانات.
- فإن احتمال وقوع أى حدث أ $\subset$ ف يرمز له بالرمز ل(أ) حيث ل(أ) = $\frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}}$

١٠ مسلمات الاحتمال

- لكل حدث أ $\subset$ ف يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث أ يرمز له بالرمز ل حيث : ٠ $\leqslant$ ل(أ) $\leqslant$ ١
- ل(ف) = ١
- إذا كان أ $\subset$ ف، ب $\subset$ ف وكان أ، ب حدثين متنافيين فإن: ل(أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب)

١١ إذا كان $أ_١ \cup أ_٢ \cup أ_٣ \cup .... \cup أ_ن$ =ف حيث $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$،...، $أ_ن$ جميعها أحداث متنافية

فإن ل($أ_١$) + ل($أ_٢$) + ل($أ_٣$) + ... + ل($أ_ن$) =١

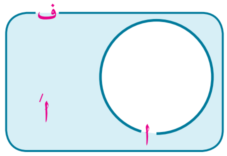
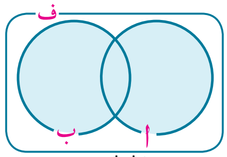
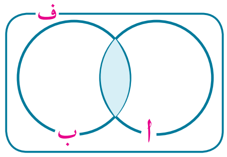
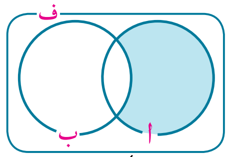
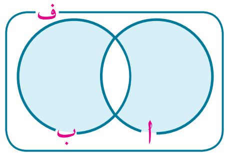
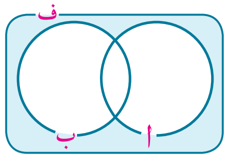
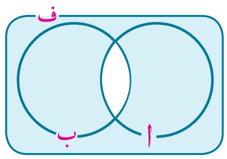
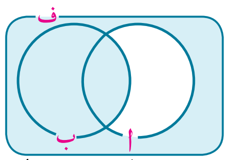
١٢ ل(ϕ) = ٠

١٢ إذا كان أ $\subset$ ف حيث ف فضاء نواتج لتجربة عشوائية فإن ل($\bar{أ}$) = ١ - ل(أ)

١٣ لأى حدثين أ ، ب من ف فضاء نواتج لتجربة عشوائية فإن

أ ل (أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل (أ $\cap$ ب) ب ل(أ-ب) = ل(أ) - ل (أ $\cap$ ب)

١٤ الأحداث بالصورة اللفظية وتمثيلها بشكل ڤن، واحتمالاتها:

الحدث فى صورة لفظية	تمثيل الحدث بشكل ڤن	احتمال وقوع الحدث
عدم وقوع الحدث أ		ل(أ´) = ١ - ل(أ)
وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)	 أ ∪ ب	ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)
وقوع أ و ب (وقوعهما معًا)	 أ ∩ ب	ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∪ ب)
وقوع الحدث أ فقط (وقوع أ وعدم وقوع ب)	 أ - ب = أ ∩ ب´ = أ - (أ ∩ ب)	ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ ∩ ب) = ل(أ ∩ ب´)
وقوع أحدهما فقط (وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط)	 (أ - ب) ∪ (ب - أ)	ل((أ - ب) ∪ (ب - أ)) = ل(أ - ب) + ل(ب - أ) = ل(أ ∪ ب) - ل(أ ∩ ب)
عدم وقوع أى من الحدثين (عدم وقوع أ وعدم وقوع ب)	 (أ ∪ ب)´ = أ´ ∩ ب´	ل(أ ∪ ب)´ = ل(أ´ ∩ ب´) = ١ - ل (أ ∪ ب)
عدم وقوع الحدثين معًا (عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب) أو (وقوع أحدهما على الأكثر)	 (أ ∩ ب)´ = أ´ ∪ ب´	ل(أ ∩ ب)´ = ل(أ´ ∪ ب´) = ١ - ل(أ ∩ ب)
عدم وقوع أ فقط (وقوع ب أو عدم وقوع أ)	 (أ - ب)´ = ب ∪ أ´	ل(أ - ب)´ = ١ - ل(أ - ب) = ل (ب ∪ أ´) = ل (أ´) + ل (أ ∩ ب)

اختبار تراكمى

أكمل ما يأتى:

١) عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن فضاء النواتج ف = ...

٢) عند إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين متتاليتين، وملاحظة الوجه العلوى، فإن حدث ظهور صورة على الأكثر = ...

٣) عند إلقاء حجر نرد منتظم ثم قطعة نقود وملاحظة الوجه العلوى لكل منهما فإن حدث ظهور عدد أولى = ...

٤) عند إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه العلوى فى كل مرة، فإن حدث " مجموع العددين الظاهرين يساوى ٥" = ...

٥) عند سحب بطاقة من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الظاهر على البطاقة فإن حدث « العدد الظاهر يقبل القسمة على ٣ " = ...

٦) عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتاليات وملاحظة تتابع الصور والكتابات، فإن حدث "ظهور صورتين بالضبط" = ...

٧) إذا كان أ $\subset$ ف حيث ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ، وكان ل(أَ) = ٣ ل(أ) فأوجد ل(أَ) .

٨) صندوق به ٢٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًا، أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة :

أ) يقبل القسمة على ٦ ب) أوليًّا أكبر من ١٠ ج) من عوامل العدد ١٢

٩) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، ل (أ $\cup$ ب) = ٠,٨٥ ، ل(أ) = ٠,٧٥ ، ل(بَ) = ٠,٦ أوجد:

أ) ل (أ $\cap$ ب) ب) ل (أ $\cap$ بَ) ج) ل (أَ $\cup$ بَ)

١٠) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإذا كان ل (أ) = $\frac{٢}{٣}$ ل(ب) ، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأكثر يساوى ٠,٧٥ ، احتمال حدث "وقوع أحدهما على الأقل" يساوى ٠,٦ فأوجد احتمال الأحداث الآتية:

أ) احتمال وقوعهما معًا. ب) وقوع أحد الحدثين فقط. ج) وقوع ب أو عدم وقوع أ.

١١) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإذا كان ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ل(أ $\cup$ ب)= ٠,٤٥ فأوجد ل (ب) فى الحالات الاتية :

أ) أ، ب حدثان متنافيان ب) أ $\supset$ ب ج) ل(ب - أ) = ٠,٢

١٢) الربط بالسياحة: فوج سياحى مكون من ١٩ سائحًا من روسيا، ١٧ سائحًا من إيطاليا، ١٤ سائحًا من فرنسا، اختير أحدهم عشوائيًّا، احسب احتمال أن يكون السائح:

أ) من روسيا أو من فرنسا. ب) ليس من فرنسا.

ج) من أوروبا.   د) من هولندا.

(١٣) الربط بالبيئة المدرسية: فى احتفال المدرسة بتكريم أوائل طلابها، إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٨، واحتمال حضور مدير عام التعليم ٠,٩ واحتمال حضورهما معًا ٠,٧٥ أوجد:

أ) احتمال حضور المحافظ فقط.   ب) احتمال حضور أحدهما على الأقل.

ج) احتمال عدم حضورهما معًا.

(١٤) أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ف.

فإذا كان ل(أ) = ٠,٦، ل(بَ) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:

أ) وقوع أ و ب   ب) وقوع أ وعدم وقوع ب   ج) وقوع أ فقط أو ب فقط

(١٥) إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث ف= {أ، ب، جـ}

وكان $\frac{\text{ل(أَ)}}{\text{ل(أ)}} = \frac{٧}{٣}$ ، ٢ ل (ب) = ٣ ل(بَ) فأوجد $\frac{\text{ل(جـَ)}}{\text{ل(جـ)}}$

(١٦) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان:

ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (أَ ∪ بَ) = ٠,٧ فأوجد احتمال كل مما يأتي:

أولًا: وقوع الحدثين أ، ب معًا   ثانيًا: وقوع حدث أ فقط

ثالثًا: وقوع أحد الحدثين على الأقل   رابعًا: وقوع أحد الحدثين فقط

(١٧) تقدم لوظيفة بأحد البنوك ٥٠ شخصًا موزعين كما هو موضح بالجدول التالي، اختير أحد المتقدمين عشوائيًّا، أوجد احتمال أن يكون الشخص المختار:

أولًا: أنثى.

ثانيًا: من ذوى المؤهلات المتوسطة.

ثالثًا: ذكر من المؤهلات العليا.

رابعًا: أنثى أو من ذوى المؤهلات العليا.

الجنس	مؤهلات عليا	مؤهلات متوسطة	المجموع
ذكر	١٦	١٤	٣٠
أنثى	١٢	٨	٢٠
المجموع	٢٨	٢٢	٥٠

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

اختبارات عامة

الاختبار الأول — تطبيقات الرياضيات

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ق، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ق، فيكون قياس الزاوية بينهما:

أ) صفر ب) ٦٠ جـ) ٢٠ د) ١٨٠

(٢) إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٩٠ كم/س لمدة ٣٠ دقيقة، فإن المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة بوحدة الكيلو متر تساوى:

أ) $\frac{٣}{٤}$ ب) ٢,٧ جـ) ٤٥ د) ١٦٢

(٣) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا:

أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه ب) مستقيمين متوازيين مختلفين

جـ) مستقيمين متقاطعين د) مستقيمين متخالفين

(٤) إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة على سطح أفقى، ولوحظ الوجه العلوى فإن احتمال عدم ظهور الصورة يساوى:

أ) صفر ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

السؤال الثانى:

(١) إذا كان $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = -١٤ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overleftarrow{ح}$ = (١٠$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}\pi$) فأوجد قيمتى أ ، ب.

(٢) وضع جسم وزنه ٣٠٠ ث.جم على مستو مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى، أوجد مقدار القوة ومقدار رد فعل المستوى.

السؤال الثالث:

(١) قطع راكب دراجة على طريق مستقيم مسافة ٣٧,٥ كم بسرعة ٢٥ كم /س ثم قطع ١٨ كم بسرعة ١٢ كم/س أوجد معيار متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت :

أ) الإزاحتان فى اتجاه واحد ب) الإزاحتان فى اتجاهين متضادين.

(٢) بدأ جسم حركته فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٥سم/ث^{٢} وبسرعة ابتدائية ٢٠سم/ث فى عكس اتجاه العجلة أوجد سرعته وازاحته بعد :

أ) ٣ ثوانٍ ب) ٤ ثوانٍ جـ) ٦ ثوانٍ د) ٩ ثوانٍ

السؤال الرابع:

(١) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$ فاحسب أولًا: ل (أ ∪ ب) ثانيًا: ل (أ ∪ بَ)

(٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢، - ١) وطول نصف قطرها ٣سم.

السؤال الخامس:

(١) كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث جم وطول نصف قطرها ٣٠سم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٠سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس. أوجد فى وضع التوازن كلًّا من: الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.

(٢) إذا كان طول نصف قطر كل من القمر والأرض ١٦٠٠كم، ٦٤٠٠كم على الترتيب، وكانت النسبة بين عجلتى الجاذبية لكل منهما ١ : ٦ فأوجد النسبة بين كتلتيهما على الترتيب.

الاختبار الثانى — تطبيقات الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا اختير حرف عشوائي من حروف المجموعة ف={ أ ، ب، جـ ، د، هـ ، و ، ر ، ك، م ، ع} فإن احتمال أن يكون هذا الحرف هو أحد حروف كلمة مبروك هو

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٢}{٣}$

(٢) النقطة التى تقع على الدائرة (س -٢)^٢ + ص^٢ = ١٣

أ (٢، ٣) ب (٣، -٢) جـ (٢، ٥) د (٤، ٣)

(٣) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٥، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى

أ ٢ ب ٧ جـ ٨ د ٥

(٤) ١٨٠ مترًا / ساعة /ث = ... سم /ث^٢

أ $\frac{١}{٢٠}$ ب ٥ جـ ٣٠ د ٣٠٠

السؤال الثانى:

(١) مكعب من الشمع طول حرفه ٣٠سم حول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤٥ سم، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ٨٪ من الشمع قد فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل.

(٢) أ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث ل(أ)$'$ = $\frac{٣}{٨}$، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$ فأوجد ل(ب) فى كل من الحالتين

أ أ ، ب حدثان متنافيان ب ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

السؤال الثالث:

(١) قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ووزنه ١٥٠ث.جم عُلِّق من طرفيه تعليقًا حرًّا بواسطة خيطين، ثُبت طرفاهما فى نقطة واحدة، فإذا كان طولا الخيطين ٨٠ سم، ٦٠سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

(٢) أ ب جـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨، $٦\sqrt{٣}$، ٥، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

السؤال الرابع:

(١) نقصت سرعة سيارة بانتظام من ٦٦ م/ث إلى ٧٩,٢ كم/س خلال قطعها مسافة ٦٦ مترًا، أوجد الزمن الذى قطعت فيه السيارة هذه المسافة، ثم أوجد المسافة التى تقطعها بعد ذلك حتى تسكن.

(٢) قُذفَ جسم رأسيًّا لأعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ١٠ ثوانٍ من لحظة القذف أوجد:
أ السرعة الابتدائية
ب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

السؤال الخامس:

(١) $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم طوله ٤٠سم وزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف، يتصل بطرف القضيب عند ب وبنقطة جـ على الحائط تعلو أ رأسيًّا بمسافة ٤٠ سم أوجد كلًّا من الشد ورد الفعل عند أ.

(٢) يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه $\overleftarrow{\text{ر}}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ بالعلاقة $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٦ن - ٣) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (٨ن + ١) $\overleftarrow{\text{ص}}$. أوجد المسافة الإزاحة حتى اللحظة ن = ٣

المقاس	عدد الصفحات بالغلاف	ورق المتن	ورق الغلاف	طباعة المتن	طباعة الغلاف	التجليد	رقم الكتاب
$\frac{١}{٨}$ ٥٧ X ٨٢	١٥٦	٧٠ جرام	١٨٠ جرام	٤ لون	٤ لون	بشر	٤٤١/١٠/٣/٣٣/٢/٥٢

http://elearning.moe.gov.eg

صندوق تأمين ضباط الشرطة