الرياضيات

الشرح و التمارين

معاك
Ma3akApp
التطبيق التفاعلى
للتعلم عن بُعد

امتحانات الكترونية
باستخدام تقنية
QR

2022
المعاصر
إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

الرياضيات

الشـــرح و التمـــارين

الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

GPS

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢/٠٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن
١٥٠١٤

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات / إعداد نخبة من خبراء التعليم. -

القاهرة : جى بى اس للطبع والنشر والتوزيع ، ٢٠٢١-٢٠٢٢.

٣ مج ؛ ٢٨ سم.

الصف الأول الثانوى . الفصل الدراسى الثانى.

المحتويات : جـ١. الجزء الخاص بالشرح والتمارين. –

جـ٢. الجزء الخاص بالامتحانات. –

جـ٣. الخاص بالإجابات.

تدمك : ١ - ٧٧٧ - ٤٧٥ - ٩٧٧ - ٩٧٨

١ - الرياضيات - تعليم وتدريس

٢ - التعليم الثانوى

٥١٠,٧

رقم الإيداع : ٢٥٠٠٤ / ٢٠٢١

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات ... نقدمه إلى أبنائنا الطلبة آملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب ، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض ، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة ، ونافذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

ونحن لن نلجأ - فى هذا التقديم - إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما اُستحدث فيه ، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه ، لكى يبدى فيه رأيًا ... إن كان نقدًا فنحن نرحب به ... وإن كانت كلمة ثناء فهى خير مقابل نرجوه ، وأعز وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملاً ، وهو ولى التوفيق ،

المؤلفون

كيفية استخدام التطبيق

١

قُم بتنزيل التطبيق من

GET IT ON Google Play

٢

قُم بإنشاء الحساب الخاص بك

٣

أدخل كودك الشخصي "الموجود على ظهر الغلاف" أو امسح علامة الباركود من خلال التطبيق

حساب طالب

- شرح الدروس بأحدث وسائل الإيضاح.
- اختبارات وامتحانات تفاعلية.
- تقارير وإحصائيات.
- اسأل المعاصر – الامتحان.
- ألعاب وأنشطة تعليمية.
- مزايا متعددة طوال العام.

حساب ولى أمر

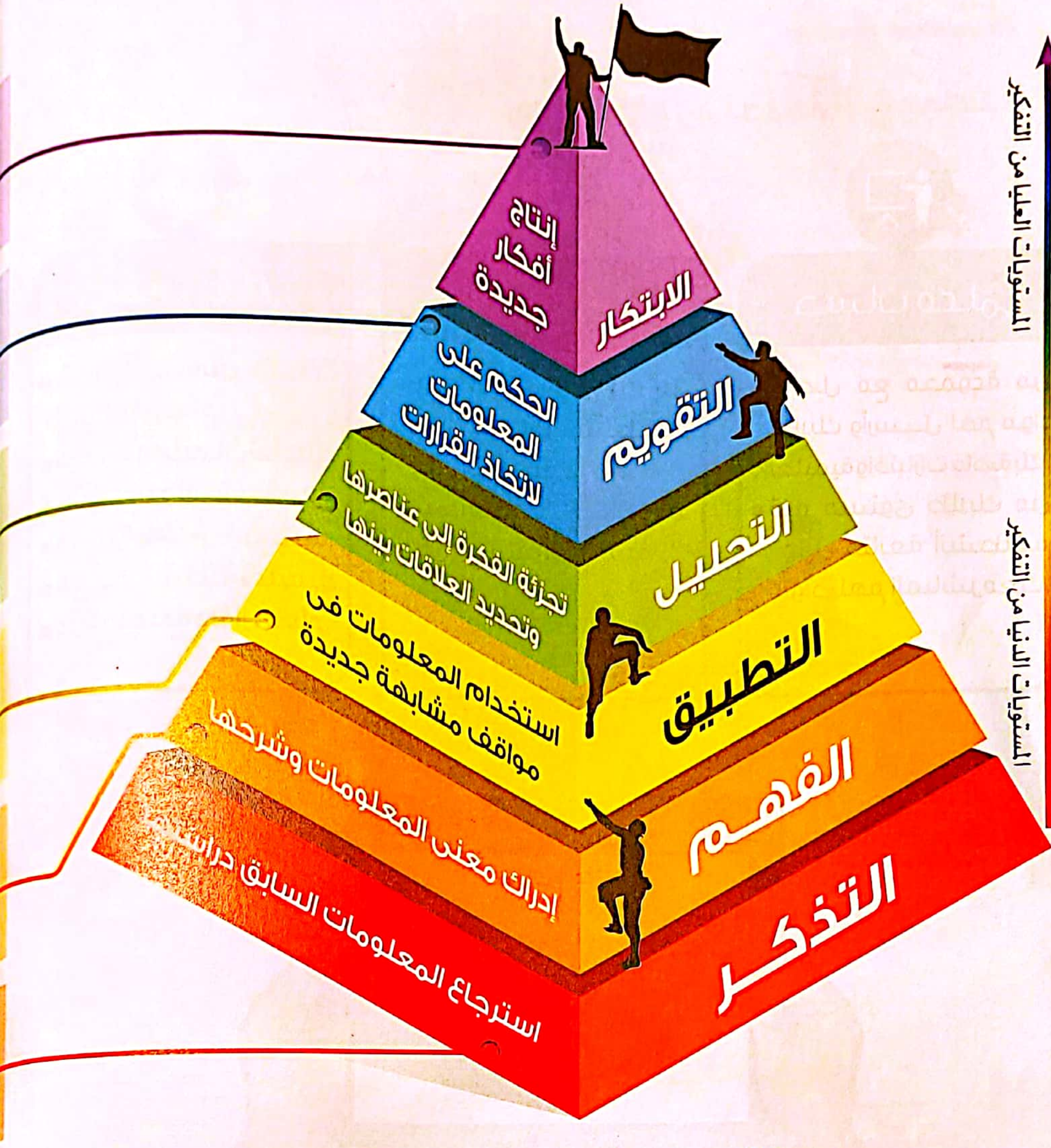
- تابع مستوى أولادك من خلال تقارير أنشطتهم على التطبيق.
- تعرف على كل جديد فى العملية التعليمية.

حساب معلم

- تواصل مع مجموعة من طلابك وأرسل لهم مواد تعليمية واختبارات خاصة بك.
- قيم مستوى طلابك من خلال متابعة أنشطتهم وتواصلهم المباشر معك.

اقترح هذا التصليف العالم بليامين بلوم، ثم تم تحديثه ليشمل ستة مستويات معرفية متدرجة فى شكل هرمى من الأبسط إلى الأرقى كالتالى :

التذكر ← الفهم ← التطبيق ← التحليل ← التقويم ← الابتكار



النموذج الحديث لهرم بلوم

يوضح هرم بلوم أن كل مستوى معرفى يعتمد على المستويات التى تسبقه ويلزم لتحقيق التعلم العميق الوصول إلى المستويات العليا من التفكير ويتم ذلك بالتمكن أولاً من المستويات الدنيا من التفكير.

وفيما يلى بعض استراتيجيات المذاكرة المناسبة التى تمكنك من تحقيق هدف كل مستوى.

التعلّم العميق

- التذكر + الفهم + التطبيق + التحليل + التقويم: تخيل لتكوين صورة ذهنية - ابحث وتحقق مما قدمه الآخرون - طور أفكارك ونفذها - اختبر ما توصلت إليه وعدله إذا لزم الأمر
- التذكر + الفهم + التطبيق + التحليل + قدم تفسيرك الخاص للمعلومات
- التذكر + الفهم + التطبيق + ارسم خريطة ذهنية للأفكار - استنتج العلاقات المتشابكة للوصول لنتائج منطقية
- التذكر + الفهم + اجمع أمثلة مشابهة حول الموضوع - اربط الكلمات والمعانى بالصور
- التذكر + اسأل عن سبب كل معلومة - اشرح الموضوع لنفسك
- اقرأ الموضوع أكثر من مرة - لون الأفكار الأساسية أو ضع خطًا تحتها - لخص الموضوع إلى عدة نقاط مما يسهل عملية الحفظ

التعلم السطحى

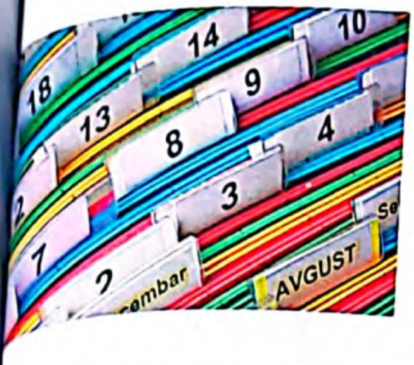
ملاحظة: تم تصنيف الأسئلة بداخل كل تمرين طبقًا لمستويات هرم بلوم والإشارة لها كالتالى:

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا (تحليل أو تقويم أو ابتكار)

Scanned with CamScanner

أولًا الجبــر وحسـاب المثـلـثـات

الوحدة 1 المصفوفات



الـــدرس الأول	تنظيم البيانات فى مصفوفات.
الـدرس الثـانى	جمع وطرح المصفوفات.
الـدرس الثـالث	ضرب المصفوفات.
الـدرس الرابــع	المحددات.
الـدرس الخامس	المعكوس الضربى للمصفوفة.

الوحدة 2 البرمجة الخطية

الــدرس الأول	المتباينة الخطية
	- حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا.
الـدرس الثـانى	البرمجة الخطية والحل الأمثل.

الوحدة 3 حساب المثلثات

الـــدرس الأول	المتطابقات المثلثية.
الـدرس الثـانى	حل المعادلات المثلثية.
الـدرس الثـالث	حل المثلث القائم الزاوية.
الـدرس الرابــع	زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.
الـدرس الخامس	القطاع الدائرى.
الدرس السادس	القطعة الدائرية.
الدرس السابــع	المساحات.

ثانيًا الهندسة التحليلية

الوحدة 4
المتجهات

الدرس الأول	الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة.
الدرس الثانى	المتجهات.
الدرس الثالث	العمليات على المتجهات.
الدرس الرابع	تطبيقات على المتجهات.

الوحدة 5
الخط المستقيم

الدرس الأول	تقسيم قطعة مستقيمة.
الدرس الثانى	معادلة الخط المستقيم.
الدرس الثالث	قياس الزاوية بين مستقيمين.
الدرس الرابع	طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.
الدرس الخامس	المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

جديد

امتحان تفاعلى إلكترونى على كل درس
باستخدام تقنية QR Code

1

قم بتحميل أحد تطبيقات

QR code reader

على هاتفك الذكى من

Google play

أو

App Store

2

افتح التطبيق وامسح

QR code

باستخدام الكاميرا الخاصة

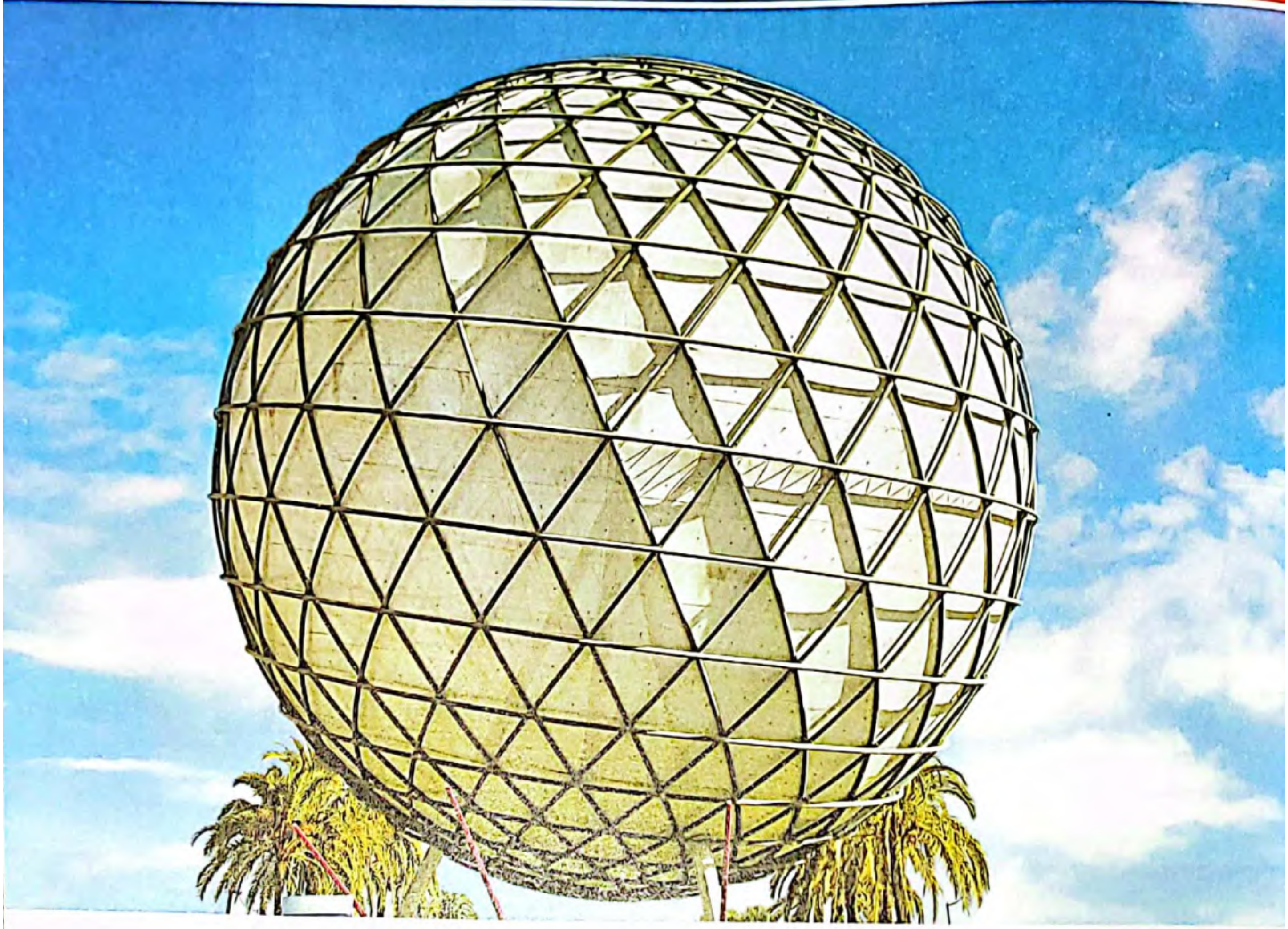
بالهاتف

وابدأ حل الامتحان مباشرة

- بعد الانتهاء من الامتحان يمكنك معرفة نتيجتك لتقييم نفسك مع عرض تقرير مفصل بالإجابات الصحيحة.

أولًا

الجبــر وحســاب المثـلثـات



الوحدة 1 المصفوفات.

الوحدة 2 البرمجة الخطية.

الوحدة 3 حساب المثلثات.

الـوحـدة 1

المصفوفات

دروس الوحدة

الدرس 1 تنظيم البيانات فى مصفوفات.

الدرس 2 جمع وطرح المصفوفات.

الدرس 3 ضرب المصفوفات.

الدرس 4 المحددات.

الدرس 5 المعكوس الضربى للمصفوفة.

نـواتـج الـتـعـلُّـم

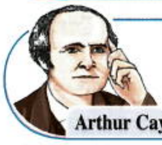
فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها.
- ينمذج بعض المشكلات الحياتية باستخدام المصفوفات.
- يتعرف بعض المصفوفات الخاصة.
- يتعرف تساوى مصفوفتين.
- يوجد مدور المصفوفة.
- يضرب عددًا حقيقيًا فى مصفوفة.
- يتعرف مفهوم المصفوفة المتماثلة والمصفوفة شبه المتماثلة.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
- يتعرف خواص جمع وضرب المصفوفات.
- يوظف استخدام المصفوفات فى مجالات الحياة المختلفة.
- يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد قيمة محدد الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات.
- يحل نظامًا من المعادلات الخطية بطريقة كرامر.
- يوجد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٢ × ٢
- يحل معادلتين آنيتين باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.

نبذة تاريخية

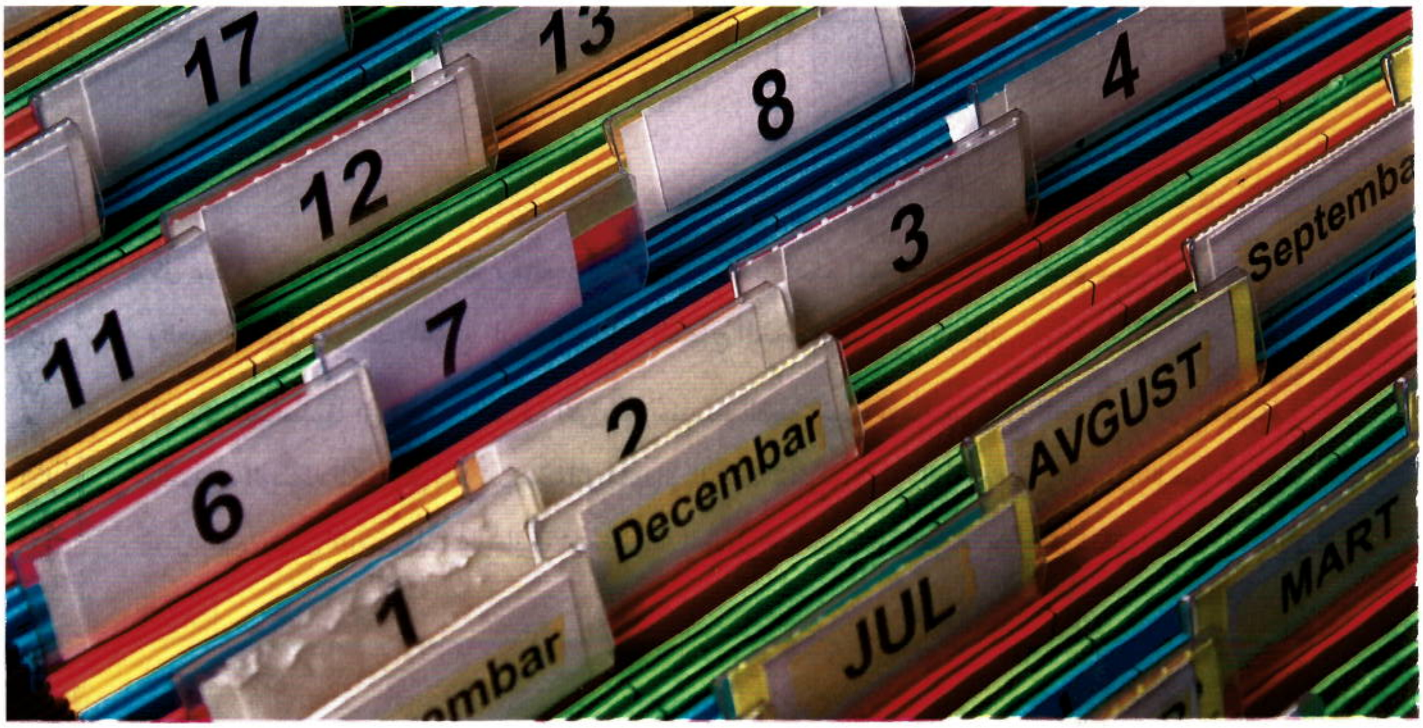

J.J. Sylvester (1814 - 1897)

أول من استخدم مصطلح «مصفوفة Matrix»
هو العالم الإنجليزى : جيمس جوزيف سلفستر (١٨١٤ – ١٨٩٧م)


Arthur Cayley (1821 - 1895)

أول من استخدم المصفوفات هو العالم البريطانى كيلى (١٨٢١ – ١٨٩٥م) وهو عالم رياضيات له الكثير من الأبحاث خاصة فى الجبر وتضمنت تلك الأبحاث نظرية المصفوفة.

انتشرت المصفوفات فى عصرنا الحاضر فشملت العديد من فروع العلوم والمعرفة فنجد استخداماتها فى علوم الإحصاء والاقتصاد والاجتماع وعلم النفس، كما أن لها دورًا هامًا فى علم الرياضيات وخاصة فى فرع الجبر الخطى.



الدرس 1 تنظيم البيانات فى مصفوفات

مثال توضيحى

- أحد محلات بيع البيتزا يبيع أربعة أنواع من البيتزا :

(بيتزا بالخضروات - بيتزا بالدجاج - بيتزا باللحوم - بيتزا بالجبن)

وينتج لكل نوع من الأنواع السابقة ثلاثة أحجام مختلفة :

(صغير - وسط - كبير)

- لسهولة تذكر المعلومات والمقارنة بينها يقوم صاحب المحل بجدولة متوسط عدد القطع المبيعة يوميًا فى الجدول المقابل بصورة مختصرة.

الحجم

النوع	صغير	وسط	كبير
بيتزا الخضروات	١٥	١٣	٩
بيتزا الدجاج	١٦	١٨	١٢
بيتزا اللحوم	١٣	١٠	٨
بيتزا الجبن	١٨	٢٠	١٧

- كل عدد فى هذا الجدول له دلالة ، فالعدد ١٠ يدل على عدد القطع المبيعة من بيتزا اللحوم حجم الوسط، والعدد ١٢ يدل على عدد القطع المبيعة من بيتزا الدجاج الحجم الكبير ، ... وهكذا.

- إذا كنا نعلم مسبقًا أن الأعداد بالصف الأول هى متوسط القطع المبيعة يوميًا من بيتزا الخضروات من الأحجام : الصغير، الوسط، الكبير على الترتيب، وبالمثل الأعداد بالصف الثانى من بيتزا الدجاج، والثالث بيتزا اللحوم، والرابع بيتزا الجبن بنفس الترتيب فإننا نستطيع الاستغناء عن الجدول السابق وكتابة البيانات فى صورة أكثر اختصارًا بكتابة

الأعداد فقط المتضمنة فيه بنفس ترتيبها داخل قوسين كبيرين من النوع $\left(\qquad\right)$

فنكتب : متوسط البيع اليومى للمحل = $\begin{pmatrix} ٩ & ١٣ & ١٥ \\ ١٢ & ١٨ & ١٦ \\ ٨ & ١٠ & ١٣ \\ ١٧ & ٢٠ & ١٨ \end{pmatrix}$

- تُسمى هذه الصورة **مصفوفة أعداد** ، كما تُسمى الأعداد بين القوسين **عناصر المصفوفة**.
- هذه المصفوفة تتكون من :

أربعة صفوف **وثلاثة** أعمدة كما بالشكل المقابل

لذلك نقول إنها مصفوفة **على النظم** ٤ × ٣

(أو اختصارًا مصفوفة ٤ × ٣)

ونلاحظ أننا ذكرنا عدد الصفوف أولًا ثم عدد الأعمدة وليس العكس.

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \text{العمود الثالث} & \text{العمود الثانى} & \text{العمود الأول} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} ٩ & ١٣ & ١٥ \\ ١٢ & ١٨ & ١٦ \\ ٨ & ١٠ & ١٣ \\ ١٧ & ٢٠ & ١٨ \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{الصف الأول} \\ \leftarrow \text{الصف الثانى} \\ \leftarrow \text{الصف الثالث} \\ \leftarrow \text{الصف الرابع} \end{array} \end{array}$$

ملاحظة

يمكن لصاحب المحل تنظيم بياناته السابقة فى جدول آخر مثل الجدول التالى :

	النوع			
الحجم	بيتزا الخضروات	بيتزا الدجاج	بيتزا اللحوم	بيتزا الجبن
صغير	١٥	١٦	١٣	١٨
وسط	١٣	١٨	١٠	٢٠
كبير	٩	١٢	٨	١٧

وبالمثل يمكن الاستغناء عن الجدول السابق بكتابة الأعداد داخل مصفوفة.

فنكتب : متوسط البيع اليومى للمحل = $\begin{pmatrix} ١٨ & ١٣ & ١٦ & ١٥ \\ ٢٠ & ١٠ & ١٨ & ١٣ \\ ١٧ & ٨ & ١٢ & ٩ \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة على النظم ٣ × ٤

مما سبق يمكن تعريف المصفوفة كما يلى :

تعريف المصفوفة

- المصفوفة هى ترتيب لعدد من العناصر (متغيرات أو أعداد) فى صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين بحيث يكون الموقع فى المصفوفة له معنى.
- المصفوفة المكونة من م صفًا ، ن عمودًا تكون على النظم م × ن أو من الرتبة م × ن أو من النوع م × ن (وتُقرأ م فى ن) حيث م ، ن عددان صحيحان موجبان.
- عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن

* التعبير عن العنصر داخل المصفوفة :

- يُرمز إلى المصفوفة عادة بأحد الحروف الكبيرة مثل : أ ، ب ، جـ ، س ، ص ، ...

بينما يُرمز للعنصر داخل المصفوفة بأحد الحروف الصغيرة مثل : أ ، ب ، حـ ، س ، ص ، ...

- إذا أردنا التعبير عن العنصر داخل المصفوفة أ الذى يقع فى الصف ص والعمود ع

فإننا نكتبه على الصورة $أ_{ص ع}$

فمثلًا العنصر $أ_{٢٣}$ يقع فى الصف الثانى والعمود الثالث [ويُقرأ : أ اثنين ثلاثة]

، العنصر $أ_{٣٢}$ يقع فى الصف الثالث والعمود الثانى [ويُقرأ : أ ثلاثة اثنين]

مثال ١

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ & -٢ \\ -٤ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٨ & -١ \end{pmatrix}$ ، $جـ = \begin{pmatrix} \sqrt{٥} & -٣ & ٣ \\ -٢ & ٠ & -١ \\ ٩ & \frac{١}{٤} & ٢ \end{pmatrix}$

١ اكتب نظم كل من المصفوفات : أ ، ب ، جـ

٢ اكتب العناصر الآتية : $أ_{٢٢}$ ، $ب_{٢١}$ ، $أ_{٢٣}$ ، $ب_{١٢}$ ، $حـ_{٣٢}$ ، $حـ_{٢٣}$

الحل

١ أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢

، جـ مصفوفة على النظم ٣ × ٣

٢ $أ_{٢٢} = ٦$ ، $ب_{٢١} = -١$ ، $أ_{٢٣} = -٤$ ، $ب_{١٢} = ٥$ ، $حـ_{٣٢} = \frac{١}{٤}$ ، $حـ_{٢٣} = -٢$

حاول بنفسك

إذا كانت المصفوفة $س = \begin{pmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \\ ٠ & -٧ \end{pmatrix}$:

١ اكتب نظم المصفوفة س

٢ اكتب العناصر الآتية : $س_{٣٢}$ ، $س_{٢١}$ ، $س_{١٢}$

ملاحظة

إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن فيمكننا كتابتها على الصورة :

أ = $(أ_{ص ع})$ حيث ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، م ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

وسوف تقتصر دراستنا على الحالات التى فيها م $\leq$ ٣ ، ن $\leq$ ٣

مثال ٢

اكتب جميع عناصر المصفوفتين الآتيتين مبينًا نظم كل مصفوفة :

١ المصفوفة : أ = $(أ_{ص ع})$

حيث : ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١ ، ٢

٢ المصفوفة : ب = $(ب_{ص ع})$

حيث : ص = ١ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣

الحل

١ أ = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٢

٢ ب = $\begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} & ب_{٣١} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣

مثال ٣

اكتب المصفوفة $(أ_{ص ع})$ على النظم ٣ × ٢ بحيث : $أ_{ص ع}$ = ٢ ص − ع

الحل

$أ_{١١}$ = ٢ × ١ − ١ = ١ ، $أ_{٢١}$ = ٢ × ١ − ٢ = ٠ ، $أ_{١٢}$ = ٢ × ٢ − ١ = ٣

، $أ_{٢٢}$ = ٢ × ٢ − ٢ = ٢ ، $أ_{١٣}$ = ٢ × ٣ − ١ = ٥ ، $أ_{٢٣}$ = ٢ × ٣ − ٢ = ٤

∴ $(أ_{ص ع})$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

حاول بنفسك

اكتب جميع عناصر المصفوفة : جـ = $(حـ_{ص ع})$ حيث : ص = ١ ، ٢ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣

بعض المصفوفات الخاصة

١ مصفوفة الصف

هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة

فمثلًا أ = $\begin{pmatrix} ١- & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة صف على النظم ١ × ٣

٢ مصفوفة العمود

هى المصفوفة التى تتكون من عمود واحد وأى عدد من الصفوف

فمثلًا س = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢- \end{pmatrix}$ هى مصفوفة عمود على النظم ٢ × ١

٣ المصفوفة المربعة

هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة

فمثلًا أ = $\begin{pmatrix} ٥ & \sqrt{٣} \\ ٦ & ٢- \end{pmatrix}$ هى مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

٤ المصفوفة الصفرية

هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز $\boxed{\quad}$ وقد تكون مربعة أو لا تكون.

فمثلًا $\boxed{\quad}_{٢ \times ٢}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢

، $\boxed{\quad}_{٣ \times ١}$ = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة صفرية على النظم ٣ × ١

٥ المصفوفة القطرية

هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار، ما عدا عناصر القطر الرئيسى فيكون أحدها على الأقل لا يساوى الصفر [حيث إن القطر الرئيسى هو القطر الذى يحتوى العناصر $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$]

فمثلًا ص = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٢- & ٠ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣

، م = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة قطرية على النظم ٢ × ٢

٦ مصفوفة الوحدة

هى مصفوفة قطرية ، يكون فيها كل عناصر القطر الرئيسى مساوية الواحد ويُرمز لها بالرمز I

فمثلًا $I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة وحدة على النظم ٢ × ٢

، $I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة وحدة على النظم ٣ × ٣

لاحظ أن

فى مصفوفة الوحدة

$\text{أ}_{\text{ص ع}} = ١$ لكل ص = ع

$\text{أ}_{\text{ص ع}} = ٠$ لكل ص ≠ ع

تحقق من فهمك

اكتب نوع ونظم كل مصفوفة مما يأتى :

١ $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١- \\ ٤ \end{pmatrix}$	٢ $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$	٣ $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$
٤ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$	٥ $\begin{pmatrix} ٧ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$	٦ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

تساوى مصفوفتين

- **تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :**

١ المصفوفتان على نفس النظم.

٢ كل عنصر فى المصفوفة أ يساوى العنصر المناظر له فى الموضع فى المصفوفة ب

أى أن $\text{أ}_{\text{ص ع}} = \text{ب}_{\text{ص ع}}$ لكل ص ولكل ع

فمثلًا $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢- \\ ٢ & ٣ & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢- \\ \frac{٤}{٢} & ٣ & ١- \end{pmatrix}$

بينما $\begin{pmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣- & ٥ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣- & ٨ \end{pmatrix}$ لاختلاف العناصر المتناظرة

، **وكذلك** $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ لأنهما ليستا على نفس النظم.

مثال ٤

أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع إذا كان :

$$\begin{pmatrix} س + ٥ & ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ص - ٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ع \\ ٥ & ٧ & ٤ \end{pmatrix}$$

الحل

∵ المصفوفتان متساويتان.

∴ ع = −١ ، س + ٥ = ٢ ومنها س = −٣

، ٢ ص − ٣ = ٧ ومنها ص = ٥

حاول بنفسك

أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كان : $\begin{pmatrix} -٢ & ٨ \\ -ص & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & س^{٣} \\ ٢ص - ٩ & ٣ \end{pmatrix}$

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة

إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن فإن حاصل ضرب أى عدد حقيقى ك فى المصفوفة أ هى المصفوفة جـ = ك أ على نفس النظم م × ن وكل عنصر من عناصر المصفوفة جـ يساوى العنصر المناظر له فى المصفوفة أ مضروبًا فى العدد الحقيقى ك

أى أن $حـ_{ص ع} = ك \, أ_{ص ع}$ حيث ص = ١ ، ٢ ، ... ، م ، ع = ١ ، ٢ ، ... ، ن

أى أن ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة يعنى ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة فى ذلك العدد الحقيقى. ولايغير من نظم المصفوفة

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

فإن : • $٢ أ = \begin{pmatrix} ٣ \times ٢ & -٢ \times ٢ & ٦ \times ٢ \\ ٠ \times ٢ & ٤ \times ٢ & ٢ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -٤ & ١٢ \\ ٠ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

• $-٣ أ = \begin{pmatrix} -٩ & ٦ & -١٨ \\ ٠ & -١٢ & -٦ \end{pmatrix}$

ملاحظة

يمكن أخذ عامل مشترك من بين جميع عناصر المصفوفة.

فمثلًا $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٢ \\ -٧ & ٠ & ١ \end{pmatrix} ٢ = \begin{pmatrix} ٦ & ٨ & ٤ \\ -١٤ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

مثـال ٥

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١٠ & -٢٠ \\ -٨ & ١٦ \end{pmatrix} = -٢ \begin{pmatrix} -٥ & ٥ \text{ س} \\ ٤ & -٢ \text{ ص} \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة :** $\sqrt[٣]{\text{س ص}}$

الحـل

$\because \begin{pmatrix} ١٠ & -٢٠ \\ -٨ & ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & -١٠ \text{ س} \\ -٨ & ٤ \text{ ص} \end{pmatrix}$ $\therefore$ -٢٠ = -١٠ س ومنها س = ٢

، ١٦ = ٤ ص ومنها ص = ٤ $\therefore \sqrt[٣]{\text{س ص}} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

حاول بنفسك

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** ٣ أ ، - أ ، - ٥ أ

٢ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢٤ & -٨ \\ ٣٢ & ٠ \\ ١٢ & -٤ \end{pmatrix} = ٤ \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \text{ ص} \\ -٢ \text{ س} & ٠ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** س ص

مـدور المصـفوفة

فى أى مصفوفة أ على النظم م × ن إذا استبدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مصفوفة على النظم ن × م تسمى بمدور المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز $أ^{مد}$

أى أن إذا كانت : $أ = (أ_{ص ع})$ فإن : $أ^{مد} = (أ_{ع ص})$

فمثلًا • إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

فإن : $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٥ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٢

، $(أ^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix} = أ$

لاحظ أن

$(أ^{مد})^{مد} = أ$

• إذا كانت : ب $= \begin{pmatrix} ٩ \\ -٢ \\ ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ١ (مصفوفة عمود)

فإن : $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٩ & -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣ (مصفوفة صف)

، $(ب^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} ٩ \\ -٢ \\ ٤ \end{pmatrix} = ب$

مثال ٦

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ظا ٣٠° & قا ٣٠° \\ قتا ٣٠° & حا ٣٠° \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} \sqrt{٣} & \frac{١}{٢} ص \\ \sqrt{٣} س & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$ وكانت : $أ = ب^{مد}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

الحل

$\because أ = \begin{pmatrix} \sqrt{٣} & \frac{٢}{\sqrt{٣}} \\ ٢ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} \sqrt{٣} & \sqrt{٣} س \\ \frac{١}{٢} ص & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

، $\because أ = ب^{مد}$

$\therefore \sqrt{٣} س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ومنها س $= \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ص = ٢ ومنها ص = ٤

حاول بنفسك

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & س + ٢ & -٥ \\ ٠ & ٦ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & ٦ \\ -٥ & ص \end{pmatrix}^{مد}$ **فأوجد :** $\frac{س}{ص}$

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة

إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن :

• أ تُسمى مصفوفة متماثلة إذا وفقط إذا كانت : $\boxed{أ = أ^{مد}}$

• أ تُسمى مصفوفة شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت : $\boxed{أ = -أ^{مد}}$

فمثلًا

• إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$

أى أن أ مصفوفة متماثلة لأن : $\text{أ} = \text{أ}^{\text{مد}}$

• إذا كانت : $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٤ & -\frac{١}{٢} & ٠ \\ ٢ & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ٠ & -٢ & ٤ \end{pmatrix}$

فإن : $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٤ & \frac{١}{٢} & ٠ \\ -٢ & ٠ & -\frac{١}{٢} \\ ٠ & ٢ & -٤ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -٤ & -\frac{١}{٢} & ٠ \\ ٢ & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ٠ & -٢ & ٤ \end{pmatrix}$

أى أن ب مصفوفة شبه متماثلة لأن : $\text{ب} = -\text{ب}^{\text{مد}}$

ملاحظات

• إذا كانت : أ مصفوفة متماثلة فإننا نلاحظ تماثل عناصرها حول القطر الرئيسى ،

$\begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{ء} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{ب} & \text{ء} \\ \text{حـ} & \text{و} & \text{هـ} \end{pmatrix}$

القطر الرئيسى

فيكون : $\text{أ}_{\text{ص ع}} = \text{أ}_{\text{ع ص}}$ كما بالشكل المقابل حيث :

$\text{أ}_{١٢} = \text{أ}_{٢١} = \text{ء}$ ، $\text{أ}_{١٣} = \text{أ}_{٣١} = \text{هـ}$ ، $\text{أ}_{٢٣} = \text{أ}_{٣٢} = \text{و}$

• عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة شبه المتماثلة تكون مساوية الصفر وعناصرها تحقق العلاقة : $\text{أ}_{\text{ص ع}} = -\text{أ}_{\text{ع ص}}$

ويمكنك ملاحظة ذلك فى المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٤ & -\frac{١}{٢} & ٠ \\ ٢ & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ٠ & -٢ & ٤ \end{pmatrix}$

حيث : $\text{أ}_{١٢} = -\text{أ}_{٢١} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{أ}_{١٣} = -\text{أ}_{٣١} = ٤$ ، $\text{أ}_{٢٣} = -\text{أ}_{٣٢} = -٢$

• أى مصفوفة قطرية هى مصفوفة متماثلة.

مثال ٧

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ س & ٨ \\ -٤ & -٣ & ٦ \\ س + ٢ ص & ٦ & ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

٢ إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} . & ٣ س & ٧ \\ ع + ٣ & . & -٢ ع \\ ٣ ص - س & ٦ & . \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع

الحل

١ ∵ أ مصفوفة متماثلة. ∴ ٢ س = -٤ ومنها $\boxed{س = -٢}$

، س + ٢ ص = ٨ ∴ -٢ + ٢ ص = ٨ ومنها $\boxed{ص = ٥}$

٢ ∵ ب مصفوفة شبه متماثلة. ∴ ع + ٣ = -٣ س (١)

، ٣ ص - س = -٧ (٢)

، -٢ ع = -٦ ومنها $\boxed{ع = ٣}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٣ + ٣ = -٣ س ومنها $\boxed{س = -٢}$

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ٣ ص + ٢ = -٧ ومنها $\boxed{ص = -٣}$

حاول بنفسك

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ -٢ س & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة **فأوجد قيمة :** س

٢ إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} . & -٨ & ٥ \\ \frac{١}{٢} س & . & ١٢ \\ -٥ & ص - س & . \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة **فأوجد قيمتى :** س ، ص

تمارين 1 على تنظيم البيانات فى مصفوفات

اختبر نفسك

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ على النظم ....

(أ) ٢ × ١ (ب) ١ × ٣ (جـ) ٣ × ٢ (د) ٣ × ١

(٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ٣ \\ ٧ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : $أ_{٢١} + أ_{٢٣}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) صفر (د) ١٠

(٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٩ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن : $أ_{١٢} + حـ_{٢١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) -٥ (د) ٣

(٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ فإن : عدد عناصر المصفوفة أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٥

(٥) إذا كانت ب مصفوفة على النظم ٣ × ١ فإن : $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ٣ × ٣ (جـ) ١ × ١ (د) ١ × ٣

(٦) إذا كانت ▭ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢ فإن عدد عناصرها يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\varnothing$ (جـ) ٢ (د) ٤

(٧) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٣ × ٤ فإن الصف يحتوى على .... عنصر.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٢

(٨) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ فإن المصفوفة ٢ أ على النظم ....

(أ) ٦ × ٤ (ب) ٣ × ٤ (جـ) ٦ × ٢ (د) ٣ × ٢

(٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٧ & -٢ & ٣ \\ ٢ & -٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $أ^{مد}$ فإن : $أ_{٢١} + ب_{١٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٤ (د) ١٠

(١٠) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٦ & -٧ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : ٢ $أ^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & ٦ & ٤ \\ ١٢ & -١٤ & ٨ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ -٧ & ٦ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ -١٤ & ٦ \\ ١٢ & -٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ -١٤ & ٢ \\ ١١ & -١ \end{pmatrix}$

(١١) أقل عدد عناصر يمكن أن تحتويها مصفوفة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٢) إذا كان عدد عناصر مصفوفة يساوى ٩ عناصر فإن عدد طرق تكوين هذه المصفوفة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٣) إذا كانت أ مصفوفة مربعة عدد عناصرها ن فإن ن يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(١٤) إذا كان عدد عناصر المصفوفة س يساوى ١٢ عنصر فأى مما يأتى لا يمكن أن يكون نظمًا للمصفوفة س؟

(أ) ٣ × ٤ (ب) ٢ × ٦ (جـ) ٤ × ٨ (د) ١ × ١٢

(١٥) المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & ٢ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة ....

(أ) وحدة. (ب) صفرية. (جـ) قطرية. (د) شبه متماثلة.

(١٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٧ & ٢٠ - ٢ س \\ ٣ - ٦ ص & ١٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية فإن : س + ٢ ص = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(١٧) أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان : $أ_{١٢}$ = س + ٤ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ٤

(جـ) −٤ (د) أى عدد حقيقى ماعدا −٤

(١٨) مجموع عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة أ حيث أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & \cdot & ٤ \\ -١ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٥

(١٩) فى المصفوفة $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ & ١ \\ ١ & س & -١ \\ ٢ & \cdot & ٦ \end{pmatrix}$ إذا كان مجموع عناصر القطر الرئيسى = ضعف مجموع عناصر القطر الآخر فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٧

(٢٠) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان مجموع عناصر أ يساوى ١٢ فإن مجموع عناصر القطر الرئيسى فقط ....

(أ) يساوى ١٢ (ب) أقل من ١٢ (جـ) أكبر من ١٢ (د) يساوى صفر

(٢١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & س & ١ \\ ٥ & ٦ & -١ \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٦ & -٣ \\ ص & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) -١٥ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ١٥

(٢٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ص + ١ & ٧ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٧ (ب) -٣ (جـ) ٤ (د) ١٠

(٢٣) إذا كانت : $\begin{pmatrix} س & ٤ \\ ص & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ع & ٤ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}^{مد}$ فإن : $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة ....

(أ) وحدة. (ب) صفرية. (جـ) قطرية. (د) شبه متماثلة.

(٢٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ء \\ ٤ & ٣هـ \end{pmatrix}$ ، أ = ب^{مد} فإن : ء + هـ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) -١

(٢٥) إذا كانت : $\begin{pmatrix} -٢س & ١٢ \\ -٨ & ١٦ \end{pmatrix} = -٤ \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & ٢ص - س \end{pmatrix}$ فإن : $\sqrt{س ص}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٤ & س^٢ - ص^٢ \\ ١٤ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س + ص & ١٢ \\ ١٤ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٧}{٤}$

(٢٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & جا س \\ جا س & ١ \end{pmatrix}$ حيث $٠ \le س \le \frac{\pi}{٢}$ وكان : $أ_{١١} \times أ_{٢٢} = أ_{٢١} \times أ_{١٢}$

فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٢٨) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -جا\theta & جتا\theta \\ جتا\theta & جا\theta \end{pmatrix}$ فإن قيمة θ التي تجعل أ مصفوفة وحدة هي ....

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) $\frac{٣\pi}{٢}$

(٢٩) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ٢س - ٤ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) -٢

(٣٠) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & \text{س} - ١ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٦

(٣١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{س}^{٢} & ٣ \\ ١ & \text{س} + ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) صفر

(٣٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{pmatrix} = ٣\, I$ حيث I مصفوفة الوحدة فإن : س + ص + ع + ل = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٣٣) إذا كانت المصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & \text{م} & ٢ \\ \text{ص} - \text{س} & ٥ & ٧ \\ \text{ص} & \text{س} - ١ & ١ \end{pmatrix}$ متماثلة فإن : م = ...

(أ) ٤ (ب) -٦ (جـ) ١٠ (د) -٨

(٣٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٠ & \text{ص} - ٥ & ٣\text{س} \\ \text{س} & ٠ & ٢\text{ع} \\ \text{ص} - ٧ & -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة

فإن : س + ص + ع = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) ٧

(٣٥) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} \text{س} & ٣ & ٤ \\ \text{ص} & \text{ع} & -٥ \\ -٤ & \text{ل} & ٠ \end{pmatrix}$ وكان : $أ = - أ^{\text{مد}}$ فإن : س + ص + ع + ل = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -٢

(٣٦) إذا كانت المصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} \text{حتا}\,\theta & \text{حا}\,\theta & \text{طا}\,\frac{\theta}{٢} \\ -١ & -\text{حتا}\,\theta & ١ \\ -١ & \text{حتا}\,٢\theta & ٠ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : θ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) $\frac{٣\pi}{٢}$

(٣٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ حيث $أ_{\text{ص ع}} = \text{ص} - ٢\,\text{ع}$ فإن : أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٣٨) إذا كانت أ مصفوفة وكان $أ_{\text{س ص}} = \text{س ص}$ لكل س ∈ {١ ، ٢} ، ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

فإن المصفوفة أ تساوى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$

(٣٩) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : $أ_{\text{س ص}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

فإن : $أ_{١١} \times أ_{٢١} \times أ_{١٢} \times أ_{٢٢} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٠) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ وكان : $أ_{١١} = ٢$ ، $أ_{١٢} = ٣$ ، $أ_{٢٣} = \frac{١}{٢} أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢} = أ_{١٢} + ٣$ ،

$أ_{١٣} = -٩$ ، $أ_{٢١} = \frac{١}{٣} أ_{١٣}$ فإن المصفوفة أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٩- & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ ٣- & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ ٣- & ٩- \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ ١ & ٩- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٩- & ٣ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٣- \end{pmatrix}$

(٤١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{\text{س ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

فإن : $أ + أ^{\text{مد}} =$ ....

(أ) صفر (ب) $\boxed{}$ (ج) ٢ أ (د) $٢ أ^{\text{مد}}$

(٤٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{\text{س ص}} = \frac{|\text{س} - \text{ص}|}{|\text{س} + \text{ص}|}$

فإن : $أ_{\text{س ص}} =$ ....

(أ) $أ_{\text{ص س}}$ (ب) $- أ_{\text{س ص}}$ (ج) $- أ_{\text{ص س}}$ (د) ١

(٤٣) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{\text{س ص}} = \text{جا} \left(\frac{\pi}{٢} \text{س}\right) - \text{جتا} \left(\frac{\pi}{٢} \text{ص}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١- & ١- & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١- & ٢ & ١ \\ ٠ & ١- & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١- & ٠ & ١- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١- & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٤٤) إذا كانت أ مصفوفة صف وكان $أ_{\text{س ع}} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ ع (ج) $\frac{٥}{\text{ع}}$ (د) ١

(٤٥) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٣ × ٣ فإن : $أ_{١١} + أ_{٢٢} + أ_{٣٣} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

(٤٦) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة وكان : $أ^{\text{مد}} = ٢ أ$ فإن : أ = ...

(أ) I (ب) − I (ج) $\boxed{}$ (د) ٢ I

(٤٧) إذا كانت المصفوفة أ على النظم م × ن حيث م < ن وكان عدد عناصرها يساوى ٣

وكانت المصفوفة ب على النظم ن × ٢ فإن عدد عناصر المصفوفة ب يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٩

(٤٨) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ وكان مجموع عناصر المصفوفة أ يساوى س

فإن مجموع عناصر المصفوفة ٢ أ يساوى ....

(أ) س (ب) ٢ س (جـ) ٦ س (د) ١٢ س

(٤٩) إذا كانت : أ = (أ $_{\text{ص ع}}$) مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يمكن أن يمثل قاعدة لإيجاد عناصر أ ؟

(أ) أ $_{\text{ص ع}}$ = ٢ ص − ع (ب) أ $_{\text{ص ع}}$ = ص + ع

(جـ) أ $_{\text{ص ع}}$ = ص $^{\text{ع}}$ (د) أ $_{\text{ص ع}}$ = ٣ ص + ٢ ع

(٥٠) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} \text{س} - ١ & ٠ \\ ٠ & \text{س}^{٢} - ١ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : س ∈ ....

(أ) {−١ ، ٢} (ب) {٠ ، −١} (جـ) {١ ، −٢} (د) {٠ ، ١}

(٥١) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان أ $_{\text{س ص}}$ = ٥ لكل س = ص فإن : ....

(أ) أ = I (ب) أ = ٥ I (جـ) أ = ٥ $\boxed{}$ (د) أ = $\boxed{}$

(٥٢) إذا كانت المصفوفة أ متماثلة وفى نفس الوقت هى شبه متماثلة فإن : ....

(أ) أ = I (ب) أ = $\boxed{}$

(جـ) أ مصفوفة قطرية. (د) أ مصفوفة صف.

(٥٣) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٣ × ٣ وكان أ $_{٣١}$ = ٤ أى من العبارات الآتية صحيحة ؟

(١) أ $_{١٣}$ = −٤ (٢) أ $_{١١}$ = ٠ (٣) أ $_{٢٣}$ + أ $_{٣٢}$ = ٠

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣) معًا.

(٥٤) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & \text{أ} - \text{ب} \\ \text{ب} - ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٦ & \text{أ} - ٦ \\ ٤ - \text{أ} & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : ٢ س = ص $^{\text{مد}}$

فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٥٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & \text{جا } ٣٠^\circ \\ \text{ظا } ٤٥^\circ & \text{ظا}^{٢}\, ٦٠^\circ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & \text{م} - \text{جا } ٦٠^\circ \\ \text{ن} + \text{جا}^{٢}\, ٩٠^\circ & \text{ف} + \text{قا}^{٢}\, ٤٥^\circ \end{pmatrix}$ وكان : أ = ب

فإن : م + ف − ن = ...

(أ) ٢ (ب) ١٠ (جـ) −٢ (د) ١

(٥٦) أى مما يأتى يكفى لإيجاد قيمة س حيث $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٣ & ٣ \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{ن} \\ -٣ & ٥ & \text{م} \end{pmatrix}$ ؟

(١) $\text{أ} = \text{أ}^{\text{مد}}$ (٢) $\text{أ} = -\text{أ}^{\text{مد}}$ (٣) أ مصفوفة قطرية.

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط.

(جـ) (٣) فقط. (د) لا يمكن إيجاد قيمة س

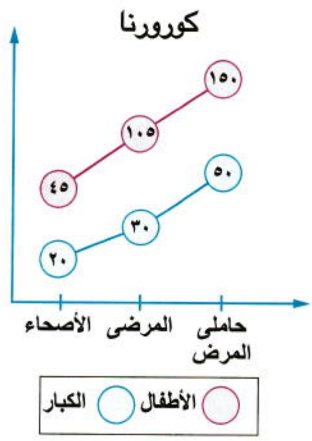
(٥٧) إذا كانت س ، ص مصفوفتان فأى مما يأتى يكون كافيًا لإثبات أن س = ص ؟

(١) نظم س = نظم ص (٢) عدد عناصر س = عدد عناصر ص

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط.

(جـ) (١) ، (٢) معًا. (د) (١) ، (٢) غير كافيان.

(٥٨) الشكل المقابل يمثل انتشار كورونا فى أحد المدارس ويبين عدد الأصحاء والمرضى وحاملى المرض بالنسبة للأطفال والكبار فإن المصفوفة التى تمثل هذه البيانات هى ....



(أ) $\begin{array}{c} \\ \text{أطفال} \\ \text{كبار} \end{array}\begin{array}{c} \text{حاملى المرض} \quad \text{مرضى} \quad \text{أصحاء} \\ \begin{pmatrix} ٢٠ & ٣٠ & ٥٠ \\ ٤٥ & ١٠٥ & ١٥٠ \end{pmatrix} \end{array}$

(ب) $\begin{array}{c} \\ \text{أطفال} \\ \text{كبار} \end{array}\begin{array}{c} \text{حاملى المرض} \quad \text{مرضى} \quad \text{أصحاء} \\ \begin{pmatrix} ٥٠ & ٣٠ & ٢٠ \\ ١٥٠ & ١٠٥ & ٤٥ \end{pmatrix} \end{array}$

(جـ) $\begin{array}{c} \\ \text{أطفال} \\ \text{كبار} \end{array}\begin{array}{c} \text{حاملى المرض} \quad \text{مرضى} \quad \text{أصحاء} \\ \begin{pmatrix} ٤٥ & ١٠٥ & ١٥٠ \\ ٢٠ & ٣٠ & ٥٠ \end{pmatrix} \end{array}$

(د) $\begin{array}{c} \\ \text{أطفال} \\ \text{كبار} \end{array}\begin{array}{c} \text{حاملى المرض} \quad \text{مرضى} \quad \text{أصحاء} \\ \begin{pmatrix} ١٥٠ & ١٠٥ & ٤٥ \\ ٥٠ & ٣٠ & ٢٠ \end{pmatrix} \end{array}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ١ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٨ & -٧ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٣} \\ -\frac{١}{٥} \end{pmatrix}$

(١) اذكر نظم كل مصفوفة.

(٢) اكتب كلاً من العناصر الآتية : أ$_{٣٢}$ ، ب$_{١١}$ ، حـ$_{١٣}$ ، أ$_{١٣}$ ، ب$_{٣٣}$ ، حـ$_{١٢}$

---

٢ اكتب نوع كل مصفوفة ونظمها :

(١) $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

---

٣ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١٠ & -١٢ & ١٥ \\ ٧ & -١٠ & ٢٠ \\ ٣ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$ فأوجد : -٥ أ

---

٤ أوجد مدور كل من المصفوفات التالية موضحًا نظم المصفوفة الناتجة :

(١) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٥ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} \sqrt{٥} & -١ \\ ٣ & ٢ \\ ٧ & -٤ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} ٦ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \\ ١٢ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

---

٥ اكتب جميع عناصر المصفوفات الآتية :

(١) أ = (أ$_{ص ع}$) ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣

(٢) ب = (ب$_{ص ع}$) ، ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١

(٣) ج = (حـ$_{ص ع}$) ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١ ، ٢

---

٦ إذا كانت : أ = (أ$_{س ص}$) لكل س ∈ {١ ، ٢ ، ٣} ، ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

اكتب المصفوفة أ إذا عُلم أن : أ$_{س ص}$ = ص − س ثم أوجد : أ^{مد}

---

٧ اكتب المصفوفة : أ = (أ$_{هـ ى}$) على النظم ٣ × ٢ حيث أ$_{هـ ى}$ = هـ − ى + ٢

ثم أوجد المصفوفة ج حيث ج = أ^{مد} واذكر نظمها وأوجد قيمة حـ$_{ى هـ}$ إذا كان هـ = ٣ ى

٨ أوجد قيمة كل من أ ، ب إذا كان : $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٢\text{أ} - ١ & ٣\text{ب} + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$ «٢ ، ٢»

٩ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢\text{س} - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣\text{ص} + ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & \text{ص} + ١٨ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمتى : س ، ص «١٥ ، ٣»

١٠ إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{س} + ٨ & -٥ \\ ٣ & -\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥ \\ ٣ & ٤\text{ص} - ١٠ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتى : س ، ص «٣٠ ، ٢»

١١ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٨ & ١٥ \\ -١ & \text{ع} + \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ل}^{٣} & \text{س}^{٢} - ١ \\ \text{ص} & ٨ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع ، ل «±٤ ، −١ ، ٩ ، ٢»

١٢ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣\text{س} & \text{س} + \text{ص} & \text{س} - \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٩ & ٤ & -١٠ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع «−٣ ، ٧ ، ٧»

١٣ أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، د إذا كان :

(١) $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ \text{أ} - ٣ & ٣\text{د} - ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} - ٢ & ٢\text{ب} + ١ \\ \text{حـ} & ١٦ \end{pmatrix}$ «٥ ، −٣ ، ٢ ، ٦»

(٢) $\begin{pmatrix} ١٥ & ٢\text{ب} \\ ٠ & ٢\text{أ} + \text{حـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣\text{أ} & ١٠ \\ ٢\text{ب} - \text{د} & ١٠ \end{pmatrix}$ «٥ ، ٥ ، ٠ ، ١٠»

(٣) $\begin{pmatrix} \text{أ} + \text{ب} & \text{أ} - \text{ب} \\ \text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} & \text{أ} - \text{ب} + ٢\text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ «٣ ، ٦ ، −٢ ، ٤»

١٤ إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{طتا } ٦٠^\circ & \text{حتا } ٣٠^\circ & \text{طا } ٦٠^\circ \\ \text{قا } ٦٠^\circ & \text{قتا } ٦٠^\circ & \text{حا } ٣٠^\circ \end{pmatrix} = \sqrt{٣} \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{٢\sqrt{٣}}{٣} \\ \frac{١}{٢}\text{س} & ٢\text{ص} \\ ١ & \sqrt{٣}\,\text{ع} \end{pmatrix}^{\text{مد}}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع «١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$»

١٥ بيِّن أيًا من المصفوفات الآتية متماثلة وأيها شبه متماثلة :

(١) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ١ & -٣ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٤ \\ -١ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} ٠ & -\frac{٥}{٢} & -١ \\ \frac{٥}{٢} & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ١ & -\frac{١}{٢} & ٠ \end{pmatrix}$

١٦ إذا كانت : أ مصفوفة متماثلة حيث أ = $\begin{pmatrix} \text{٣ص + س} & \text{٢ص} & \text{٥} \\ \text{ع + ٣} & \text{-١} & \text{ع + ١} \\ \text{٠} & \text{٨} & \text{٢ + ٣س} \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع «٣,٥ ، ٣ ، ٥»

---

١٧ إذا كانت : ب مصفوفة شبه متماثلة حيث ب = $\begin{pmatrix} \text{-٥} & \text{-٢س} & \text{٠} \\ \text{٣ع} & \text{٠} & \text{ع + ٦} \\ \text{٠} & \text{٦} & \text{٣ص + س} \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة : س ص ع «-٤»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\begin{pmatrix} \text{٢س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{س} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{pmatrix}^{\text{مد}}$ وكان أ د - ب جـ = ١ فإن : س ∈ ....

(أ) $\{ ١ ، -\frac{١}{٢} \}$ (ب) $\{ -١ ، \frac{١}{٢} \}$ (جـ) $\{ ١ ، \frac{١}{٢} \}$ (د) $\{ -١ ، \frac{-١}{٢} \}$

(٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ١ = ٠$

وكان $\begin{pmatrix} \text{ل}^٢\text{م} & \text{-ل}^٢ \\ \text{م}^٢ & \text{م} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{pmatrix}$ فإن : أ د - ب جـ = ...

(أ) ١٨ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة فإن : $\frac{\text{أ + ب + جـ + و}}{\text{د + س + ص + ع}} =$ ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) -١ (د) هـ

(٤) إذا كانت المصفوفة ($\text{أ}_{\text{س ص}}$) على النظم ٣ × ٢ حيث $\text{أ}_{\text{س ص}} = \text{س} + ٢\text{ص}$

وكان مجموع عناصر الصف الأول = $\text{ك}^٢$ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) - ٢ (جـ) $٢\sqrt{٢}$ (د) $\pm ٢\sqrt{٢}$

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن وكانت $\text{أ}^{\text{مد}}$ على النظم (٢ م - ١) × (ن - ١)

فإن : م + ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٦) إذا كان : $\begin{pmatrix} \text{١ + ت} & \text{١ - ت} \\ \text{جاس} & \text{١} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{pmatrix}$ وكان أ ب جـ د = ١ فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣} & ٦ \\ \text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} & ١٢ \end{pmatrix} = ٣ \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) ٢

(٨) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \text{جا } \frac{\pi}{٢} & \text{جا صفر} \\ \text{جتا } \frac{\pi}{٢} & \text{جتا صفر} \end{pmatrix}$ أى من العبارات التالية تكون صحيحة ؟

(١) أ مصفوفة وحدة. (٢) أ مصفوفة متماثلة. (٣) أ مصفوفة مربعة.

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣) معًا.

(٩) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث $\text{أ}_{\text{س ص}} = \begin{cases} \text{س} + \text{ص} & \text{لكل س} \neq \text{ص} \\ ٦ & \text{لكل س} = \text{ص} \end{cases}$

فإن : مجموع عناصر القطر الرئيسى يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(١٠) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ى} \\ \text{هـ} & \text{ص} \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة فإن : ٢ ى + ٣ هـ = ...

(أ) ى (ب) س + ص (جـ) هـ + ص (د) س

(١١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣^{\text{س}} & ٢\text{س} + \text{ص} \\ \text{س} + \text{ص} & ٣^{\text{ص}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & \text{ب} \\ \text{أ} & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ١٥ (د) ٥

تطبيقات حياتية

١ **ألعاب :** رصد مدرب فريق كرة السلة بالمدرسة إنجازات ثلاثة لاعبين فى مباريات دورى الفصول فكانت على النحو التالى :

سمير : لعب ١٠ مباريات ، ٢٠ تسديدة ، ٥ أهداف.

حازم : لعب ١٦ مباراة ، ٣٥ تسديدة ، ٨ أهداف.

كريم : لعب ١٨ مباراة ، ٤١ تسديدة ، ١٠ أهداف.

(١) نظم البيانات فى مصفوفة على أن ترتب أسماء اللاعبين ترتيبًا تصاعديًا تبعًا لعدد الأهداف.

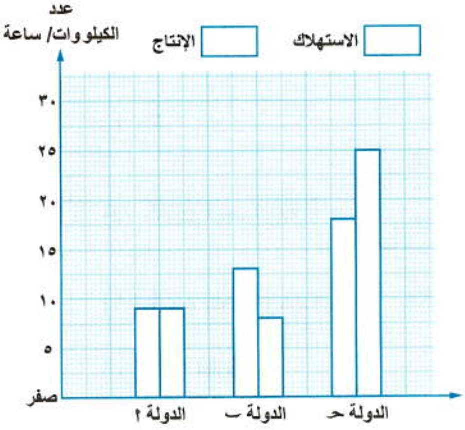
(٢) حدد نظم المصفوفة ، ما قيمة $\text{أ}_{٢٢}$ ؟

٢ الربط بالطاقة :

يمكن أن يقاس استهلاك الطاقة بالكيلووات/ساعة.

يبين الرسم البيانى المقابل إنتاج الطاقة والاستهلاك لبعض الدول.

اكتب مصفوفة تمثل بيانات الرسم البيانى المقابل.



٣ الربط بالصناعة :

يبين الجدول المقابل عدد المصانع الأهلية العاملة فى قطاعى صناعة الأغذية والمصنوعات الجلدية فى ثلاث مدن مختلفة من مدن بعض محافظات جمهورية مصر العربية.

	صناعة الأغذية	المصنوعات الجلدية
٦ أكتوبر	٤٤	٦٨
مدينة السادات	٢٨	٥٢
العاشر من رمضان	٣٧	١٤

(١) نظم البيانات فى مصفوفة.

(٢) اجمع عناصر كل عمود ، ما تفسيرك للنتائج التى حصلت عليها ؟

(٣) اجمع عناصر كل صف ، هل النتائج التى حصلت عليها يمكن أن تزودنا ببيانات ذات معنى ؟ فسر إجابتك.

الدرس 2 جمع وطرح المصفوفات

أولاً جمع المصفوفات

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين لهما نفس النظم فإن عملية الجمع تكون ممكنة ويكون ناتج الجمع عبارة عن مصفوفة لها نفس النظم وكل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين فى أ ، ب

فمثلاً إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ + ٥ & ١ + ٢ \\ ٣ + ٢ & -٢ + ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$

مثال ١

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & -٢ \\ ٥ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$

أوجد إن أمكن كلاً من : ١ $٢ \text{أ} + \text{ج}^{\text{مد}}$ ٢ $\text{ب} + \text{ج}$

الحل

١ $٢ \text{أ} + \text{ج}^{\text{مد}} = ٢ \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٦ & ١٠ \\ ٨ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٦ & ١٤ \\ ٧ & ١٠ \end{pmatrix}$

٢ المصفوفتان ب ، ج لا يمكن جمعهما لاختلاف نظمهما

حيث إن : ب مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ج مصفوفة على النظم ٢ × ٣

مثال ٢

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ **فحقق أن :** $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

الحل

$$\because \text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\text{،} \because \text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ ، } \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

من (١) ، (٢) نجد أن : $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ **فأوجد :** $\frac{1}{3}(\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}})$

مثال ٣

أوجد قيم أ ، ب ، حـ التى تحقق المعادلة : $3\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \text{أ} & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & \text{ب} + 4 \\ \text{حـ} + 3 & 3 \end{pmatrix}$

الحل

$$\begin{pmatrix} 3\text{أ} & 3\text{ب} \\ 3\text{حـ} & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\text{أ} & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & \text{ب} + 4 \\ \text{حـ} + 3 & 3 \end{pmatrix}$$ (ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة)

$$\therefore \begin{pmatrix} 3\text{أ} & 3\text{ب} \\ 3\text{حـ} & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\text{أ} + 4 & \text{ب} + 16 \\ \text{حـ} + 1 & 9 \end{pmatrix}$$

ومن خاصية تساوى مصفوفتين : $\therefore 3\text{أ} = 2\text{أ} + 4$ ومنها : $\text{أ} = 4$

، $3\text{ب} = \text{ب} + 16$ ومنها : $\text{ب} = 8$

، $3\text{حـ} = \text{حـ} + 1$ ومنها : $\text{حـ} = \frac{1}{2}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $3\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \text{أ} + 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 + \text{ب} \\ \text{حـ} + 3 & -10 \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، حـ**

خواص عملية جمع المصفوفات

بفرض أن أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات من النظم م × ن وأن $\boxed{}$ مصفوفة صفرية من نفس النظم

فإن الخواص الآتية تتحقق :

١ خاصية الانغلاق

أ + ب تكون مصفوفة من نفس النظم م × ن

٢ خاصية الإبــدال

أ + ب = ب + أ

فمثلًا $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

٣ خاصية الدمــج

(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

فمثلًا

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$

فإن : (أ + ب) + ج = $\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 11 & 13 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 17 & 20 & 1 \end{pmatrix}$

، أ + (ب + ج) = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 13 & 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 17 & 20 & 1 \end{pmatrix}$

أى أن (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

٤ خاصية وجود المحايد الجمعى

المصفوفة الصفرية $\boxed{}$ هى المحايد الجمعى **أى أن :** أ + $\boxed{}$ = $\boxed{}$ + أ = أ

فمثلًا $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

٥ خاصية المعكوس (النظير الجمعى)

أ + (− أ) = (− أ) + أ = $\boxed{}$ حيث (− أ) هو النظير الجمعى للمصفوفة أ

فمثلًا إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : المعكوس الجمعى لها هو : − أ = $\begin{pmatrix} -٤ & -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ & -٥ \end{pmatrix}$

حيث : $\begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ & -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \boxed{}_{٢ \times ٣}$

ثانيًا طرح المصفوفات

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين لهما نفس النظم م × ن فإن ناتج الطرح (أ − ب)
هو المصفوفة جـ من النظم م × ن والتى تُعرف كما يلى :
جـ = أ − ب = أ + (− ب) حيث (− ب) هى المعكوس الجمعى للمصفوفة ب

فمثلًا إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

فإن : أ − ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & -٣ \\ -٥ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & -٤ \end{pmatrix}$

ملاحظة

يمكن إجراء عملية الطرح مباشرة بطرح العناصر المتناظرة من المصفوفتين.

فمثلًا $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٣ & -٢ & ٦ \\ ٠ & -١ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ & -١ \\ -٢ & ٢ & -٨ \end{pmatrix}$

مثال ٤

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٥ \\ ٣ & -٣ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ -٢ & -٦ \\ ٨ & -٢ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة : ٤ أ − ٢ ب + $\frac{١}{٢}$ جـ

الحل

٤ أ − ٢ ب + $\frac{١}{٢}$ جـ = ٤ $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٥ \\ ٣ & -٣ \end{pmatrix} + \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ -٢ & -٦ \\ ٨ & -٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ -٤ & ١٢ \\ ٠ & ١٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & ٤ \\ ٢ & -١٠ \\ -٦ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -١ & -٣ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ \\ -٣ & -١ \\ -٢ & ٢١ \end{pmatrix}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة :** ٢ أ + ٣ ج - ٢ ب

ملاحظة

عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية وليست دامجة.

مثال ٥

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ١ & -١ \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٧ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & -٢ \\ -٣ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$ **أوجد المصفوفة س بحيث :** ٣ س + ٢ ب = أ

الحل

∵ ٣ س + ٢ ب = أ   بإضافة المعكوس الجمعى للمصفوفة ٢ ب للطرفين

∴ ٣ س + ٢ ب + (- ٢ ب) = أ + (- ٢ ب)

∴ ٣ س + $\boxed{}$ = أ - ٢ ب   ∴ ٣ س = أ - ٢ ب (بضرب الطرفين فى $\frac{١}{٣}$)

∴ س = $\frac{١}{٣}$ [أ - ٢ ب]

∴ س = $\frac{١}{٣} \left[\begin{pmatrix} ٤ & ١ & -١ \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٧ & ٣ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & -٢ \\ -٣ & -١ & ٠ \end{pmatrix} \right] = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} -٢ & -٣ & -٣ \\ ٠ & -٣ & ٦ \\ ٨ & ٩ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{٢}{٣} & -١ & -١ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ \frac{٨}{٣} & ٣ & ١ \end{pmatrix}$

مثال ٦

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٠ \\ -٤ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : ٢ [س^{مد} - أ] = ٣ ب

الحل

∵ ٢ [س^{مد} - أ] = ٣ ب   ∴ ٢ س^{مد} - ٢ أ = ٣ ب   وبإضافة المصفوفة ٢ أ للطرفين

∴ ٢ س^{مد} - ٢ أ + ٢ أ = ٣ ب + ٢ أ   ∴ ٢ س^{مد} + $\boxed{}$ = ٣ ب + ٢ أ

∴ ٢ س^{مد} = ٣ ب + ٢ أ = ٣ $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٠ \\ -٤ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ + ٢ $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٤ \\ -٢ & ١٤ & ١٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س}^{\text{مد}} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٥ \\ ١٣ & ١٤ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & \frac{٣}{٢} & \frac{٥}{٢} \\ \frac{١٣}{٢} & ٧ & -١ \end{pmatrix}$

وبأخذ مدور الطرفين : $\therefore (\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & \frac{٣}{٢} & \frac{٥}{٢} \\ \frac{١٣}{٢} & ٧ & -١ \end{pmatrix}^{\text{مد}} \quad \therefore \text{س} = \begin{pmatrix} ٢ & \frac{١٣}{٢} \\ \frac{٣}{٢} & ٧ \\ \frac{٥}{٢} & -١ \end{pmatrix}$

مثال ٧

إذا كانت : $\text{س} + ٢\,\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٤ \\ ١٣ & ٦ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** المصفوفة س

الحل

$\because \text{س} + ٢\,\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٤ \\ ١٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (١)

وبأخذ مدور الطرفين : $\therefore (\text{س} + ٢\,\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٤ \\ ١٣ & ٦ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$

$\therefore \text{س}^{\text{مد}} + ٢\,\text{س} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٣ \\ ١٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × –٢ :

$\therefore -٢\,\text{س}^{\text{مد}} - ٤\,\text{س} = \begin{pmatrix} -١٨ & -٢٦ \\ -٢٨ & -١٢ \end{pmatrix}$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : $\therefore -٣\,\text{س} = \begin{pmatrix} -٩ & -١٢ \\ -١٥ & -٦ \end{pmatrix} \quad \therefore \text{س} = \frac{-١}{٣} \begin{pmatrix} -٩ & -١٢ \\ -١٥ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

لاحظ أن

- $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$
- $(\text{أ}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \text{أ}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -٢ \\ ٤ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث : $٣\,\text{أ} - ٢\,\text{ب} = ٢\,\text{س} - ٣\,I$ حيث I على النظم ٢ × ٢

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى جمع وطرح المصفوفات وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

لاحظ أن

لأى مصفوفة مربعة أ يكون

$\text{أ} = \underbrace{\frac{١}{٢}(\text{أ} + \text{أ}^{\text{مد}})}_{\text{مصفوفة متماثلة}} + \underbrace{\frac{١}{٢}(\text{أ} - \text{أ}^{\text{مد}})}_{\text{مصفوفة شبه متماثلة}}$

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\boxed{}$ هى المصفوفة الصفرية على النظم ٢ × ٣

فإن : $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & -٣ \\ -١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \boxed{} =$ ....

(أ) I (ب) $\boxed{}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & -٣ \\ -١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٤ & ٠ & ٣ \\ ١ & -٥ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} -٤ \\ ٨ \\ -٥ \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} ٢ \\ -٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢ \\ ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٦ \\ ١٢ \\ -١٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} -٣ & -١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix} =$ ....

(أ) $\boxed{}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} -٥ & -٢ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}^{\text{مد}} =$ ....

(أ) $\boxed{}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) I

(٥) إذا كانت : س + $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix} = \boxed{}$ فإن : س = ...

(أ) $\boxed{}$ (ب) I (جـ) $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

(٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ + ب $= I$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٥ & -١ \\ -٤ & -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٤ & -١ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٥ & ٠ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -٣ \end{pmatrix} + ٣ \begin{pmatrix} ١ & -٢ \end{pmatrix}^{\text{مد}} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ -٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٨ \\ -٩ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

(٨) إذا كان : $٢\,\text{س} + \begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & \text{صفر} \end{pmatrix} = \boxed{}$ فإن : المصفوفة س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & \text{صفر} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$

(٩) $\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كان : $\begin{pmatrix} \text{س} \\ ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٣

(١١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٣\text{ك} & -\text{ص} \\ ٢\text{س} & ١١ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص + ك = ...

(أ) -٣ (ب) -٦ (جـ) ١ (د) -٨

(١٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix}^{\text{مد}} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & -٢ \end{pmatrix}$

(١٣) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix} = \text{س} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} - \text{ص} \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) -٢

(١٤) إذا كانت : س ، ص ، ع أعدادًا حقيقية وكان $\text{س} \begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \\ ١ \end{pmatrix} + \text{ص} \begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix} + \text{ع} \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$

فإن : س ص ع = ...

(أ) ١٢ (ب) ٤ (جـ) -١٢ (د) ٣

(١٥) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ - \text{س} & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ص} + ٢ \end{pmatrix} = \boxed{}$ فإن : س + ص = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ٠ (د) -٤

(١٦) لأى مصفوفة أ يكون : أ + (-أ) = ...

(أ) أ (ب) -أ (جـ) $\boxed{}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(١٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب هى المعكوس الجمعى للمصفوفة أ

فإن ب على النظم ....

(أ) ٢ × ٣ (ب) ٣ × ٢ (جـ) ٢ × ٢ (د) ٣ × ٣

(١٨) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، ج مصفوفة على النظم ٣ × ٢ فأى العمليات الآتية معرفة ؟

(أ) أ + ب (ب) ب − ج (جـ) أ + ج^مد (د) أ − ج

(١٩) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن المعكوس الجمعى للمصفوفة أ يساوى ....

(١) − أ (٢) أ^مد (٣) − أ^مد

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط. (جـ) (١) ، (٢) فقط. (د) (٢) ، (٣) فقط.

(٢٠) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يكون متماثلة أيضًا ؟

(١) ٢ أ (٢) − أ (٣) أ^مد

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط. (جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٢١) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٢ × ٢ وكان حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى = ك (حيث ك ≠ ٠) وكانت المصفوفة ب هى المعكوس الجمعى للمصفوفة أ فإن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى للمصفوفة ب = ...

(أ) ك (ب) − ك (جـ) $\frac{١}{ك}$ (د) ٢ ك

(٢٢) إذا كانت : أ + أ^مد = $\boxed{}$ فإن : أ مصفوفة ....

(أ) صف. (ب) عمود. (جـ) متماثلة. (د) شبه متماثلة.

(٢٣) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن : أ + أ^مد = ...

(أ) ٢ أ (ب) ٢ أ^مد (جـ) $\boxed{}$ (د) صفر

(٢٤) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة فإن : $\frac{١}{٢}$ (أ + أ^مد) = ...

(أ) أ (ب) $\frac{١}{٢}$ أ (جـ) I (د) $\boxed{}$

(٢٥) (س^مد)^مد − س = ...

(أ) $\boxed{}$ (ب) س (جـ) ٢ س (د) صفر

(٢٦) إذا كانت المصفوفتان أ ، ب لهما نفس النظم م × ن

فإن المصفوفة أ − ٢ب تكون على النظم ....

(أ) م × ١ (ب) ١ × ن (جـ) ن × م (د) م × ن

(٢٧) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٣ × ٢ فإن : المصفوفة $(\text{٥ أ} + \text{٣ب})^{\text{مد}}$

على النظم ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٥ × ٣ (جـ) ٢ × ٣ (د) ٣ × ٣

(٢٨) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٣ \\ -\text{ص} & \text{ص} + ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$

وكان : أ − ٢ب = ٣ ج فإن : س ص = ...

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) ٩

(٢٩) إذا كان : $\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : $٢\,(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$

(٣٠) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & -٦ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٦ \end{pmatrix}$

(٣١) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) أ − ٢ (ب) أ − ٢ I (جـ) أ + I (د) أ − I

(٣٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٨ & ١٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{ك} & ٢\text{ك} \\ ٢\text{ك} & ٣\text{ك} \end{pmatrix} = I$ فإن : ك = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٣) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ك أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣\text{أ} \\ ٢\text{ب} & ٢٤ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب − ك = ...

(أ) −١٩ (ب) −٧ (جـ) ٧ (د) ١٩

(٣٤) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان بحيث أ + ب = أ − ب فإن ....

(أ) أ مصفوفة صفرية. (ب) ب مصفوفة صفرية.

(جـ) ب مصفوفة وحدة. (د) ب معكوس جمعى أ

(٣٥) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من نفس النظم ٢ × ٢ وكان : أ + ب = I ، ٢ أ − ٢ ب = I

فإن : أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(٣٦) إذا كانت : أ + $\text{ب}^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ وكان : ب − $\text{أ}^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ فإن : $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

(٣٧) إذا كان : ٢ أ + $\text{ب}^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$ وكان : ٢ ب + $\text{أ}^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

(٣٨) أبسط صورة للمقدار : حتا θ $\begin{pmatrix} \text{حتا }\theta & \text{حا }\theta \\ -\text{حا }\theta & \text{حتا }\theta \end{pmatrix}$ + حا θ $\begin{pmatrix} \text{حا }\theta & -\text{حتا }\theta \\ \text{حتا }\theta & \text{حا }\theta \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) $\boxed{}$ (ب) I (جـ) − I (د) $\begin{pmatrix} 1 & \text{حا }\theta \\ \text{حتا }\theta & 1 \end{pmatrix}$

(٣٩) أبسط صورة للمقدار : قتا θ $\begin{pmatrix} \text{قتا }\theta & -\text{ظتا }\theta \\ \text{ظتا }\theta & -\text{قتا }\theta \end{pmatrix}$ + ظتا θ $\begin{pmatrix} -\text{ظتا }\theta & \text{قتا }\theta \\ -\text{قتا }\theta & \text{ظتا }\theta \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) $\boxed{}$ (ب) I (جـ) − I (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(٤٠) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} \text{حتا }\theta & -\text{حا }\theta \\ \text{حا }\theta & \text{حتا }\theta \end{pmatrix}$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ وكان : أ + $\text{أ}^{\text{مد}}$ = I فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(٤١) إذا كانت س مصفوفة مربعة بحيث س = ص + ع حيث ص مصفوفة متماثلة

، ع مصفوفة شبه متماثلة فإن :

أولاً : ع = ...

(أ) س − $\text{س}^{\text{مد}}$ (ب) س + $\text{س}^{\text{مد}}$

(جـ) $\frac{1}{2}$ (س − $\text{س}^{\text{مد}}$) (د) $\frac{1}{2}$ (س + $\text{س}^{\text{مد}}$)

ثانيًا : ص = ...

(أ) س − $\text{س}^{\text{مد}}$ (ب) س + $\text{س}^{\text{مد}}$

(جـ) $\frac{1}{2}$ (س − $\text{س}^{\text{مد}}$) (د) $\frac{1}{2}$ (س + $\text{س}^{\text{مد}}$)

(٤٢) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٠ \end{pmatrix}$ وكانت : س $= \begin{pmatrix} \text{حتا } \theta & \text{حا } \theta \\ -\text{حا } \theta & \text{حتا } \theta \end{pmatrix}$

فإن : س = ...

(أ) أ حا θ + ب حتا θ　　　(ب) أ حتا θ + ب حا θ

(جـ) أ حا θ − ب حتا θ　　　(د) أ حتا θ − ب حا θ

(٤٣) إذا كانت : أ = (أ $_{\text{ص ع}}$) مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث أ $_{\text{ص ع}} = \begin{cases} \text{ص + ع ، ص = ع} \\ \text{ص − ع ، ص} \neq \text{ع} \end{cases}$

فإن : أ + أ $^{\text{مد}}$ = ٤ × ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٨ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١٢ \end{pmatrix}$　　　(ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١- & ٢- \\ ١ & ٤ & ١- \\ ٢ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$　　　(د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١- & ٤ & ١ \\ ٢- & ١- & ٦ \end{pmatrix}$

(٤٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ حيث أ $_{\text{ص ع}}$ = | ص − ع | وكانت ب مصفوفة على النظم ٢ × ٣ حيث ب $_{\text{ص ع}}$ = ص − ع　فإن : أ + ب = ...

(أ) $\boxed{}$　　(ب) I　　(جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$　　(د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٤٥) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ وكانت الدالة د معرفة على مجموعة المصفوفات المربعة حيث

د (س) = ٣ س + ٥ I　فإن : د (أ) = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١٤ \\ ٥ & ١١ \end{pmatrix}$　　(ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{pmatrix}$　　(جـ) $\begin{pmatrix} ٣- & ٩ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$　　(د) $\begin{pmatrix} ٣- & ١٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

(٤٦) إذا كان س مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : س + س $^{\text{مد}}$ $= \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

فإن مجموع عناصر س يساوى ....

(أ) ٦　　(ب) ٥　　(جـ) ٤　　(د) ٣

(٤٧) المصفوفة المربعة يمكن التعبير عنها دائمًا ....

(أ) كمجموع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى شبه متماثلة.

(ب) كمجموع مصفوفتين إحداهما قطرية والأخرى متماثلة.

(جـ) كحاصل ضرب عدد حقيقى ≠ صفر فى مصفوفة متماثلة لها نفس النظم.

(د) بجمع المصفوفة نفسها مع مدورها.

(٤٨) إذا كانت : أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات بحيث أ + ب = $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب + ج = $\begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$

، ج + أ = $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب + ج = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & -٤ \\ -٧ & -٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٧ & ٢ \\ -١ & ٨ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٤ \end{pmatrix}$

فأوجد كلاً مما يأتى إن أمكن : (١) أ + ب (٢) أ + ج

---

٢ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$

فأوجد كلاً مما يأتى : (١) ب − ج (٢) أ + ٢ ب − ج

---

٣ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة : ٢ أ − ٣ ب + ٤ ج

---

٤ إذا كان : س = $\begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ ٦ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ٠ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ع = $\begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ ٢ & -٣ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة : ٣ س − ص + ع

---

٥ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ١ & ٣ \\ -٣ & ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٢ \\ ٣ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ **حقق أن :** ٤ (أ + ب) = ٤ أ + ٤ ب

---

٦ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

حقق أن : (١) $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$ (٢) $(أ - ب)^{مد} = أ^{مد} - ب^{مد}$

(٣) أ − ب ≠ ب − أ (٤) − (أ + ب) = (− أ) + (− ب)

---

٧ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد : (١) $\frac{١}{٣}$ (أ + ج) (٢) ٢ أ − ب + ٢ ج

(٣) أ − ٢ ب + ٢ (ب + ج) (٤) $أ + ٢ ب^{مد} - ج^{مد}$

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

٨ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٧ & ٠ & -٥ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٨ & ٤ \\ ٠ & ٧ \\ -٦ & -٥ \end{pmatrix}$

فأوجد ناتج كل من العمليات الآتية إن أمكن ، مع ذكر السبب فى حالة تعذر إجراء العملية :

(١) أ + ب　　(٢) أ + $\text{ب}^{\text{مد}}$　　(٣) $\text{أ}^{\text{مد}}$ + ب

---

٩ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٤ \\ ٦ \\ -١٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٣ \\ ٦ \end{pmatrix}$ **أثبت أن : المصفوفة أ معكوس جمعى للمصفوفة ٢ ب**

---

١٠ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٧ & ٥ \\ ٠ & -٦ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٤ & -٦ & -٧ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٥ & \text{أ} \\ ٨ & \text{ص} & -٢ \\ \text{ب} & -٣ & \text{ع} \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع ، أ ، ب　　«٣ ، ١ ، ١٣ ، −٤ ، −١»

---

١١ إذا كان : $٣ \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ \text{س} & ٢ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٢ & \text{ص} \\ ٥ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & ٦ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}^{\text{مد}} + \begin{pmatrix} ٦ & -٥ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من : س ، ص　　«٤ ، ٣»

---

١٢ **أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ء التى تحقق المعادلة :**

$٢ \begin{pmatrix} \text{أ} & ٣ \\ ٦ & \text{ب} \end{pmatrix} = ٣ \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ء} \\ \text{حـ} & -٢ \end{pmatrix} - ٤ \begin{pmatrix} \text{حـ} & ٣ \\ ٠ & \text{أ} \end{pmatrix}$　　«١٦ ، −٣٥ ، ٤ ، ٦»

---

١٣ **أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل التى تحقق أن :**

$\text{س} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & \text{ص} \end{pmatrix} + \text{ع} \begin{pmatrix} ٢ & \text{ل} \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} + ٥ \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \boxed{}_{٢ \times ٢}$　　«−١ ، ٢ ، −٢ ، ١»

---

١٤ إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢\text{س} - ١ & ٨ \\ \text{ع} & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{س} + ٣ & ٥ \\ -٢\text{ع} & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤\text{س} & -٣\text{ص} \\ ٣ & \text{ك} \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} -\text{س} & ٦\text{ص} \\ -٦ & ٢\text{ك} \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع ، ك　　«-٤ ، $\frac{١}{٣}$ ، -٣ ، $\frac{٢}{٥}$»

---

١٥ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$ ، $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٦ \\ -١ & ٥ & ٨ \\ ٤ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ **أوجد : المصفوفة ب**

---

١٦ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٨ & -٦ \\ ٢ & -٤ & ٨ \\ ٦ & ١٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -٦ & ٢ \\ ٤ & -١٠ & ٠ \\ -١ & ٨ & -٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث : س = ٢ أ − ٣ ب

١٧ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١- & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٢- \\ ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١- & ٧ \\ ٥- & ١٢ & ٤ \\ ٣ & ٢١ & ١٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث : ٢ أ + ب − س = $\boxed{}$

---

١٨ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٢- & ٦ \end{pmatrix}$ **أوجد المصفوفة س حيث :** ٢ أ − س = ب^{مد}

---

١٩ **حل المعادلة المصفوفية :** ٤ $\left[س + \begin{pmatrix} ١- & ٥ \\ ٣- & ٠ \end{pmatrix} \right]$ = ٢ س^{مد} + $\begin{pmatrix} ٤- & ١٢ \\ ٦- & ٥ \end{pmatrix}$

---

٢٠ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٣- & ٢ \\ ٤ & ٦- & ٢- \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث :

(١) س^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد} (٢) ٢ [س^{مد} + أ] = ٤ ب

(٣) ٥ س^{مد} − ٢ (أ − ب) = $\boxed{}$

---

٢١ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \\ ٢ & ٥- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٤- \\ ٢- & ١ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : ٢ ب + س^{مد} = ٣ س^{مد} − أ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير صفرية فإن المصفوفة أ + أ^{مد} مصفوفة ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) صفرية.

(٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن المصفوفة (أ − أ^{مد}) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) صفرية. (د) قطرية.

(٣) إذا كان : أ^{مد} + ب^{مد} = أ + ب فإن ....

(أ) أ متماثلة. (ب) ب متماثلة.

(جـ) (أ + ب) متماثلة. (د) (أ + ب) شبه متماثلة.

(٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{ص ع} = ٢ ص - ع$ ، ب مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث $ب_{ص ع} = ع - ص$ فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ \\ -٢ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٣ & ٠ \end{pmatrix}$

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان $أ + أ^{مد} = I$ فإن مجموع عناصر أ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٦) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ وكان (أ + ب) مصفوفة متماثلة

فإن : $\frac{أ_{٢١} - أ_{١٢}}{ب_{٢١} - ب_{١٢}} =$ ....

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

---

٢ **تحقق من صحة المتطابقة :**

$$\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix} = أ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} + ب \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} + حـ \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} + ء \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

ثم اكتب المصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ على صورة مجموع أربع مصفوفات كل منها أحَد عناصرها الواحد الصحيح وباقى العناصر أصفار ومضروبة فى عدد حقيقى.

---

٣ إذا كانت : $س + ٢ ص = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $س + ص = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفتين : س ، ص

---

٤ إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ ، وكان : $(س - س^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} هـ & و \\ م & ن \end{pmatrix}$

أوجد قيمة : هـ + و + م + ن «صفر»

---

٥ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : $٣ أ - ٢ ب^{مد} + ٢ س = ب - س^{مد}$

الدرس 3

ضرب المصفوفات

مثال تمهيدى

إذا كانت المصفوفة أ تعبر عن نتائج ٢٠ مباراة لفريقى الأهلى والزمالك فى الدورى العام

لكرة القدم حيث : $$أ = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{فوز} & \text{تعادل} & \text{هزيمة} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} ١٢ & ٦ & ٢ \\ ١١ & ٤ & ٥ \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{الأهلى} \\ \leftarrow \text{الزمالك} \end{array} \end{array}$$

وكانت المصفوفة ب تعبر عن عدد النقاط التى يحصل عليها كل فريق فى حالة الفوز

والتعادل والهزيمة حيث : $$ب = \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{فوز} \\ \leftarrow \text{تعادل} \\ \leftarrow \text{هزيمة} \end{array}$$

فإن : مجموع النقاط التى حصل عليها فريق الأهلى = ١٢ × ٣ + ٦ × ١ + ٢ × ٠ = ٤٢ نقطة

، مجموع النقاط التى حصل عليها فريق الزمالك = ١١ × ٣ + ٤ × ١ + ٥ × ٠ = ٣٧ نقطة

ويمكن التعبير عن مجموع النقاط التى حصل عليها كل فريق بالمصفوفة ج = $\begin{pmatrix} ٤٢ \\ ٣٧ \end{pmatrix}$

ونلاحظ أن

٤٢ هى ناتج جمع حواصل ضرب عناصر الصف الأول من أ فى عناصر عمود ب

، ٣٧ هى ناتج جمع حواصل ضرب عناصر الصف الثانى من أ فى عناصر عمود ب

- المصفوفة ج هى ناتج ضرب المصفوفة أ × المصفوفة ب

أى أن ج = أ ب = $\begin{pmatrix} ١٢ & ٦ & ٢ \\ ١١ & ٤ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \times ٣ + ٦ \times ١ + ٢ \times ٠ \\ ١١ \times ٣ + ٤ \times ١ + ٥ \times ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٢ \\ ٣٧ \end{pmatrix}$

ضرب المصفوفات

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم م × ل ، ب مصفوفة على النظم ر × ن فإن :

- حاصل ضربهما ج = أ ب يكون معرفًا إذا وفقط إذا كان : $\boxed{\text{ل} = \text{ر}}$

أى عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب

- المصفوفة ج = أ ب تكون على النظم م × ن

$$\underset{\text{م} \times \boxed{\text{ل}}}{\text{أ}} \;\; \underset{\boxed{\text{ر}} \times \text{ن}}{\text{ب}} \quad (\text{متساويان}) \quad = \quad \underset{\text{م} \times \text{ن}}{(\text{أب})}$$

- كل عنصر $\text{ح}_{\text{ص ع}}$ فى المصفوفة ج = أ ب يساوى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف ص من أ فى عناصر العمود ع من ب عنصرًا بعنصر كلًا بنظيره.

ولتوضيح مفهوم عملية ضرب المصفوفات :

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{21} & \text{ب}_{22} \end{pmatrix}$

فإن : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢

وحيث إن : عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٢

فإن : $\underset{3 \times \boxed{2}}{\text{أ}} \;\; \underset{\boxed{2} \times 2}{\text{ب}} \quad (\text{متساويان}) \quad = \quad \underset{3 \times 2}{(\text{أب})}$

أى أن عملية ضرب المصفوفة أ فى المصفوفة ب تكون معرفة

وينتج مصفوفة أ ب على النظم ٣ × ٢ ونحصل عليها كالآتى :

* نضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول فى المصفوفة أ بالعنصر المناظر فى العمود الأول فى المصفوفة ب ونجمع حواصل الضرب فنحصل على العنصر الموجود فى (الصف الأول والعمود الأول) فى المصفوفة (أب) كما يلى :

$$\begin{pmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{ب}_{11} & \cdots \\ \text{ب}_{21} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{11}\text{ب}_{11} + \text{أ}_{12}\text{ب}_{21} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

* ثم نضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول فى المصفوفة أ بالعنصر المناظر فى العمود الثانى فى المصفوفة ب ونجمع حواصل الضرب فنحصل على العنصر الموجود فى (الصف الأول والعمود الثانى) فى المصفوفة (أ ب) كما يلى :

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots & ب_{٢١} \\ \cdots & ب_{٢٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots & أ_{١١}ب_{٢١} + أ_{٢١}ب_{٢٢} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$$

* وهكذا حتى نحصل على جميع عناصر المصفوفة (أ ب) كما يلى :

$$أب = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_{١١}ب_{١١} + أ_{٢١}ب_{١٢} & أ_{١١}ب_{٢١} + أ_{٢١}ب_{٢٢} \\ أ_{١٢}ب_{١١} + أ_{٢٢}ب_{١٢} & أ_{١٢}ب_{٢١} + أ_{٢٢}ب_{٢٢} \\ أ_{١٣}ب_{١١} + أ_{٢٣}ب_{١٢} & أ_{١٣}ب_{٢١} + أ_{٢٣}ب_{٢٢} \end{pmatrix}$$

لاحظ أن عملية ضرب المصفوفة ب فى المصفوفة أ تكون غير معرفة.

أى أن ب أ غير معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة ب $\neq$ عدد صفوف المصفوفة أ

مثال ١

أوجد أ ب إن أمكن فى كل مما يأتى :

١ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix}$

٢ $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

٣ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix}$

الحل

١ ∵ أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٢

∴ أ ب معرفة وتكون على النظم ٣ × ٢

$$أب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٢)(-١) + (١)(٠) & (٢)(٢) + (١)(-٣) \\ (٣)(-١) + (-١)(٠) & (٣)(٢) + (-١)(-٣) \\ (٠)(-١) + (٤)(٠) & (٠)(٢) + (٤)(-٣) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٠ & -١٢ \end{pmatrix}$$

٢ ∵ أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٣

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ $\neq$ عدد صفوف المصفوفة ب ∴ أ ب غير معرفة.

٣ ∵ أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٣ × ١

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٣ ∴ أب معرفة وتكون على النظم ١ × ١

$$\therefore \text{أب} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix} = \Big((٢)(-٢) + (-١)(١) + (٣)(٤) \Big) = (٧)$$

مثال ٢

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ **أوجد :** أ $\text{ب}^{\text{مد}}$ إن أمكن.

الحل

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ ، $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٢

∵ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة $\text{ب}^{\text{مد}}$ ∴ أ $\text{ب}^{\text{مد}}$ معرفة على النظم ٢ × ٢

$$\therefore \text{أ}\,\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠ & -٩ \\ -٥ & ٧ \end{pmatrix}$$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ **فأوجد إن أمكن :** أب ، أ $\text{ب}^{\text{مد}}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}}$ ب

خواص عملية ضرب المصفوفات

إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات ، I هى مصفوفة الوحدة فإن الخواص الآتية تتحقق :

١ خاصية الدمج (التنسيق)

$\boxed{(\text{أب})\,\text{ج} = \text{أ}\,(\text{ب ج})}$ حيث عمليات الضرب معرفة

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٤ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ -١ \end{pmatrix}$

فإن : $\text{أب} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٤ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & -٢٣ \\ ٥ & -١ & ٢٤ \end{pmatrix}$

$$\therefore (\text{أ}\text{ب})\,\text{ج} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -23 \\ 5 & -1 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -17 \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{ب}\,\text{ج} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}\,(\text{ب}\,\text{ج}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -17 \end{pmatrix}$$

أى أن $(\text{أ}\text{ب})\,\text{ج} = \text{أ}\,(\text{ب}\,\text{ج})$

٢ خاصية وجود المحايد الضربى

مصفوفة الوحدة I هى المحايد الضربى.

أى أن $\text{أ}\, I = I\, \text{أ} = \text{أ}$ حيث أ مصفوفة مربعة لها نفس نظم I

فمثلًا

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

٣ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها

$\text{أ}\,(\text{ب} + \text{ج}) = \text{أ}\text{ب} + \text{أ}\text{ج}$ ، $(\text{أ} + \text{ب})\,\text{ج} = \text{أ}\text{ج} + \text{ب}\,\text{ج}$ حيث عمليات الضرب والجمع معرفة.

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

فإن : $\text{ب} + \text{ج} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \text{أ}\,(\text{ب} + \text{ج}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$، \because \text{أ}\text{ب} + \text{أ}\text{ج} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -9 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 6 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$\therefore$ من (١) ، (٢) ينتج أن : $\text{أ}\,(\text{ب} + \text{ج}) = \text{أ}\text{ب} + \text{أ}\text{ج}$

ملاحظة

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين قابلتين للضرب على أى صورة بمعنى أن أب مُعَرَّفة ، ب أ مُعَرَّفة أيضًا.

فإنه ليس من الضرورى أن يكون $\text{أ}\text{ب} = \text{ب}\text{أ}$

وهذا يعنى أن **ضرب المصفوفات ليس عملية إبدالية**

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix}٤ & -٣\\ ٢ & -١\end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix}-٢ & ١\\ ٥ & ٦\end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix}-٢ & ٠\\ ٠ & -٢\end{pmatrix}$

فإن :

١ $أ ب = \begin{pmatrix}٤ & -٣\\ ٢ & -١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-٢ & ١\\ ٥ & ٦\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-٢٣ & -١٤\\ -٩ & -٤\end{pmatrix}$

، $ب أ = \begin{pmatrix}-٢ & ١\\ ٥ & ٦\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٤ & -٣\\ ٢ & -١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-٦ & ٥\\ ٣٢ & -٢١\end{pmatrix}$ **أى أن** $أ ب \neq ب أ$

٢ $أ ج = \begin{pmatrix}٤ & -٣\\ ٢ & -١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-٢ & ٠\\ ٠ & -٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-٨ & ٦\\ -٤ & ٢\end{pmatrix}$

، $ج أ = \begin{pmatrix}-٢ & ٠\\ ٠ & -٢\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٤ & -٣\\ ٢ & -١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-٨ & ٦\\ -٤ & ٢\end{pmatrix}$ **أى أن** $أ ج = ج أ$

> **لاحظ أنه**
> يمكن ضرب أى مصفوفتين مربعتين على نفس النظم.

مثال ٣

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix}٣ & ٢\\ -١ & ١\end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة كل من :** $أ^٢$ ، $أ^٣$

الحل

$أ^٢ = أ \times أ = \begin{pmatrix}٣ & ٢\\ -١ & ١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٣ & ٢\\ -١ & ١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٧ & ٨\\ -٤ & -١\end{pmatrix}$

، $أ^٣ = أ^٢ \times أ = \begin{pmatrix}٧ & ٨\\ -٤ & -١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٣ & ٢\\ -١ & ١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١٣ & ٢٢\\ -١١ & -٩\end{pmatrix}$

> **لاحظ أنه**
> إذا كانت أ مصفوفة غير مربعة فإن $أ^٢$ غير معرفة.

مثال ٤

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix}-١ & ٢\\ ٠ & ٣\end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $أ^٢ - ٢ أ - ٣ I = \boxed{}$

الحل

$أ^٢ - ٢ أ - ٣ I = \begin{pmatrix}-١ & ٢\\ ٠ & ٣\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-١ & ٢\\ ٠ & ٣\end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix}-١ & ٢\\ ٠ & ٣\end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}١ & ٤\\ ٠ & ٩\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-٢ & ٤\\ ٠ & ٦\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٣ & ٠\\ ٠ & ٣\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٠ & ٠\\ ٠ & ٠\end{pmatrix} = \boxed{}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix}٢ & -١\\ -٤ & ٣\end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $أ^٢ - ٥ أ + ٢ I = \boxed{}$

تفكير ناقد

١ إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين ، وكان : أ ب = □

فهل هذا يعنى دائمًا أن : أ = □ أو ب = □ ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا أ = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ فإن : أ ب = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

، ∵ أ ≠ □ ، ب ≠ □

أى أنه إذا كانت : أ ب = □

فهذا لا يعنى دائمًا أن : أ = □ أو ب = □

٢ إذا كانت : أ مصفوفة مربعة وكان أ^{2} = I فهل هذا يعنى دائمًا أن أ = I ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا أ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ فإن : أ^{2} = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

أى أن إذا كانت : أ^{2} = I فهذا لا يعنى دائمًا أن : أ = I

٣ إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين وكان : أ × ب = أ

فهل هذا يعنى دائمًا أن : ب = I ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا أ = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

فإن : أ × ب = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ = أ

أى أن إذا كانت : أ × ب = أ فهذا لا يعنى دائمًا أن : ب = I

مدور حاصل ضرب مصفوفتين

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين وكانت أ ب معرفة فإن : (أ ب)$^{\text{مد}}$ = ب$^{\text{مد}}$ أ$^{\text{مد}}$

وبصفة عامة : (أ ب جـ … هـ)$^{\text{مد}}$ = هـ$^{\text{مد}}$ … جـ$^{\text{مد}}$ ب$^{\text{مد}}$ أ$^{\text{مد}}$

بشرط أن تكون عمليات الضرب معرفة.

مثال ٥

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٢ & -٨ \end{pmatrix}$ **فحقق أن :** $(\text{أ}\,\text{ب})^{\text{مد}} = \text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}}$

الحل

$\because \text{أ}\,\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٢ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٣ & -٣٩ \\ ١٧ & -٨ \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}\,\text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢٣ & ١٧ \\ -٣٩ & -٨ \end{pmatrix}$ (١)

، $\because \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٩ & -٨ \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٩ & -٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٣ & ١٧ \\ -٣٩ & -٨ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore (\text{أ}\,\text{ب})^{\text{مد}} = \text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}}$

مثال ٦

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٦ \\ ٥ & -٧ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : $١٥\,\text{س}^{\text{مد}} = \text{أ}^{٢} + (\text{ب}\,\text{ج})^{\text{مد}}$

الحل

$\because \text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٧ \\ -٢١ & ٢٨ \end{pmatrix}$

، $\text{ب}\,\text{ج} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٦ \\ ٥ & -٧ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣٦ \\ ٥٢ & -١٣ \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{ب}\,\text{ج})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & ٥٢ \\ ٣٦ & -١٣ \end{pmatrix}$

$\therefore ١٥\,\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٧ & -٧ \\ -٢١ & ٢٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٥٢ \\ ٣٦ & -١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٤٥ \\ ١٥ & ١٥ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{١٥} & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \text{س} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{١٥} & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

مثال ٧

أوجد قيم أ ، ب ، حـ إذا كان : $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{٢} & \text{٤} \\ \text{٥} & \text{١-} & \text{ب} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{١-} & \text{٠} & \text{٢} \\ \text{٧} & \text{٦} & \text{٤} \\ \text{٢-} & \text{٣} & \text{٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{١٩-} & \text{٦-} & \text{٤} \\ \text{٦} & \text{حـ} & \text{٢٨} \\ \text{٢٤-} & \text{١٢} & \text{٣٦} \end{pmatrix}$

الحل

يمكن إيجاد قيم أ ، ب ، حـ دون إجراء عملية الضرب كاملة كالتالى :

نضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

∴ ١ × -١ + أ × ٧ + ٢ × -٢ = -١٩   ∴ أ = -٢

، نضرب عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

∴ ٥ × -١ - ١ × ٧ + ب × -٢ = -٢٤   ∴ ب = ٦

، نضرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الثانى من المصفوفة الثانية

∴ ٠ × ٠ + ٢ × ٦ + ٤ × ٣ = حـ   ∴ حـ = ٢٤

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى ضرب المصفوفات وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن ، ب مصفوفة على النظم ں × ل

فإن حاصل الضرب أ ب يكون معرفًا إذا كانت ....

(أ) م = ں (ب) ن = ں (جـ) ن = ل (د) م = ل

(٢) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ١ ، ب مصفوفة على النظم ١ × ٣

فإن أ ب مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ١ × ١ (جـ) ٣ × ٣ (د) ١ × ٣

(٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، أ ب مصفوفة على النظم ٢ × ١

فإن ب مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٢ × ١ (جـ) ٣ × ١ (د) ٢ × ٢

(٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣

فإن المصفوفة أ ب تكون على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ٢ × ١ (جـ) ٣ × ٢ (د) ١ × ٣

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣ فإنه يمكن إجراء أى من العمليات الآتية ؟

(أ) أ + ب (ب) $ب^{مد}$ + $أ^{مد}$ (جـ) أ $ب^{مد}$ (د) أ ب

(٦) $\begin{pmatrix}٢ & ٠\\ ١ & ٠\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٠ & ١\\ ٠ & ٢\end{pmatrix} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix}٠ & ٠\\ ١ & ٢\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}٢ & ٠\\ ١ & ٠\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}٠ & ٢\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}١ & ٢\\ ٠ & ٠\end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix}٠ & ٠\\ ٠ & ٠\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١\\ ٣\\ ٢\end{pmatrix} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix}٠ & ٠\\ ٠ & ٠\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}٠\\ ٠\\ ٠\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}٠\\ ٠\end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٨) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ -٦ \\ ٨ \end{pmatrix} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٢٠ & -١٢ & -٨ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢٠ \\ -١٢ \\ -٨ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٩) إذا كانت : $\underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ ، $\underset{\sim}{ص} = \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\underset{\sim}{ص}\,\underset{\sim}{س} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} -٩ \\ ١٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٩ & ١٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٩ & ١٥ \\ ٦ & ١٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين حيث $أ\,ب = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $ب^{مد}\,أ^{مد} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

(١١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $(ب\,أ)^{مد} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ١٥ \\ -٤ & -١٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ١٥ & -١٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ \end{pmatrix}$

(١٢) إذا كانت : I هى مصفوفة الوحدة فإن : $I^{ن} =$ .... (حيث ن عدد صحيح موجب)

(أ) $I^{مد}$ (ب) $I^{٢}$

(جـ) $I^{٣}$ (د) جميع ما سبق صحيح.

(١٣) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\boxed{}_{١ \times ١}$ (د) $\boxed{}_{٢ \times ٢}$

(١٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ -١ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٤} =$ ....

(أ) أ (ب) ٢ أ (جـ) ٤ أ (د) ٨ أ

(١٥) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} س & ٠ \\ ١ & ص \end{pmatrix}$ ، $أ \times ب = \begin{pmatrix} ٩ & ٦ \end{pmatrix}$

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(١٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١٧ & ل \end{pmatrix}$ فإن : ل = ...

(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) ٩ (د) -٩

(١٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س & ٧ \\ ٣ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١١ & ١٨ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) -٢ (د) -١

(١٨) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^٢ - أ =$ ....

(أ) I (ب) $\boxed{}$ (جـ) $٣\,I$ (د) $٥\,I$

(١٩) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : $س^٢ + ٣\,س =$ ....

(أ) $١٢\,I$ (ب) $١٨\,I$ (جـ) $٩\,س$ (د) $١٢\,س$

(٢٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & س \end{pmatrix} = I$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) −٣ (د) −٤

(٢١) إذا كانت س مصفوفة بحيث $س \times \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & س \\ ٤ & ٥ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \\ ص & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & -١ \\ ١٩ & -٢ \end{pmatrix}$ فإن : س − ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) −٥ (د) −٣

(٢٣) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & -٥ & ٤ \end{pmatrix}$ وكان : $أ\,ب^{مد} + س = \begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$

فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٦ & ١٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

(٢٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : أ ج ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١٠ & -١٨ \\ ١٥ & -٢٧ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢١ & -٧ \\ ١٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٦ & -٦ \\ ١٨ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٢٥) $\begin{pmatrix} ت^٣ & ٠ \\ -ت & ت \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ت & -ت \\ ٠ & ت \end{pmatrix} =$ .... (حيث $ت^٢ = -١$)

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٢٦) $\begin{pmatrix} حا\,\theta & حتا\,\theta \\ -حتا\,\theta & حا\,\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} حا\,\theta & حتا\,\theta \\ حتا\,\theta & -حا\,\theta \end{pmatrix} =$ ....

(أ) I (ب) $-I$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٧) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣- \end{pmatrix}$ فإن مجموع عناصر المصفوفة (س س^مد) يساوى ....

(أ) ١٣ (ب) ٢٩ (جـ) ٤٧ (د) ٦٥

(٢٨) إذا كانت المصفوفة ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ \text{ب} & \text{أ} \end{pmatrix}$ وكان ج² = $\boxed{}$ فإن : أ ب = ...

(أ) صفر (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ١٦

(٢٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & \text{س} \\ \text{ص} & ٠ \end{pmatrix}$ وكان : أ ب = ب أ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س = ٢ ص (جـ) س = ٣ ص (د) س = $\frac{١}{٢}$ ص

(٣٠) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & \text{س} \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن قيمة س التى تجعل أ² = ب هى ....

(أ) ٤ (ب) ١

(جـ) -١ (د) لا توجد قيمة لـ س تحقق أ² = ب

(٣١) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & \text{س} \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ وكانت : أ² = ٩ I فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣

(جـ) -٣ (د) لا توجد قيمة لـ س تحقق أ² = ٩ I

(٣٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٢ & \text{س}- \end{pmatrix}$ ، أ² = $\begin{pmatrix} ١٢ & ٥- \\ ٥- & ١٢- \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ٤ (د) صفر

(٣٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٧ & ١- \end{pmatrix}$ ، أ² = ٨ أ + ك I حيث ك عدد صحيح فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) -٧ (د) ٧

(٣٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \text{ك} & ٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١١ & ١٣ \\ ١٧ & ١١ \end{pmatrix}$ وكان : أ × أ^مد = ب فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & \text{ب} & \text{أ} \end{pmatrix}$ فإن : أ² = ...

(أ) I (ب) $\boxed{}$ (جـ) أ (د) -أ

(٣٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : أ² = ...

(أ) أ (ب) ٣ أ (جـ) ٤ أ (د) ٥ أ

(٣٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٥}$ = ...

(أ) ٥ أ (ب) ١٠ أ (جـ) ١٦ أ (د) ٣٢ أ

(٣٨) فى محل للكشرى كانت أ مصفوفة تمثل عدد الأطباق المباعة فى ثلاث أيام متتالية (الأحد والأثنين والثلاثاء) ، ب مصفوفة تمثل سعر كل طبق حسب حجمه (صغير – وسط – كبير) ، ج مصفوفة تمثل مجموع أثمان كل نوع من الأطباق المباعة خلال الثلاث أيام حيث :

$$أ = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{صغير} & \text{وسط} & \text{كبير} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{الأحد} \\ \text{الأثنين} \\ \text{الثلاثاء} \end{array} & \begin{pmatrix} ٢٠٠ & ٣٠٠ & ١٥٠ \\ ٢٥٠ & ٤٠٠ & ١٠٠ \\ ٣٠٠ & ٤٠٠ & ٣٠٠ \end{pmatrix} \end{array} \quad ، \quad ب = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} ١٥ \\ ٢٠ \\ ٢٥ \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{صغير} \\ \text{وسط} \\ \text{كبير} \end{array} \end{array}$$

فإن : ج = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١٢٧٥٠ \\ ١٤٢٥٠ \\ ٢٠٠٠٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١٢٧٥٠ \\ ٢٠٠٠٠ \\ ١٤٢٥٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١٤٢٥٠ \\ ١٢٧٥٠ \\ ٢٠٠٠٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢٠٠٠٠ \\ ١٤٢٥٠ \\ ١٢٧٥٠ \end{pmatrix}$

(٣٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \\ س \end{pmatrix} = \boxed{}$ فإن : س = ...

(أ) –٤ (ب) –١ (جـ) ١ (د) ٤

(٤٠) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$ وكان : أ × ب = أ – ب فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٥ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$

(٤١) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \end{pmatrix}$ وكان : أ × س = ب + س

فإن المصفوفة س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٨ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -٤ \end{pmatrix}$

(٤٢) إذا كانت : أ = (طا س جا س جتا س) وكان : أ $أ^{مد}$ = (٢) فإن : س = ...

حيث س ∈] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [

(أ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٤٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} قا\,\theta & طا\,\theta \\ طا\,\theta & -قا\,\theta \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢}$ = ...

(أ) I (ب) ٢ $طا^{٢}$ θ × I

(جـ) ($طا^{٢}$ θ + ١) × I (د) (٢ $طا^{٢}$ θ + ١) × I

(٤٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢٠٢٢}$ = ...

(أ) أ　　(ب) $أ^٢$　　(جـ) $أ^{٢٠٢١}$　　(د) ٢٠٢٢ أ

(٤٥) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٦- & ٧ \\ ٧- & ٨ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢٠٢١}$ = ...

(أ) I　　(ب) أ　　(جـ) $\frac{١}{٢} أ^٢$　　(د) ٢ I

(٤٦) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ظا\,\theta & ٠ \\ ٠ & ظا\,\theta \end{pmatrix}$ حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ وكانت $س^٢ = \frac{١}{٢} I$

فإن قيمة θ التى تحقق ذلك = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$　　(ب) $\frac{\pi}{٦}$　　(جـ) $\frac{\pi}{٤}$　　(د) $\frac{\pi}{٣}$

(٤٧) المصفوفتان : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤- & ١ \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}$ يستخدمان لإثبات أن : ....

(أ) أ ب = ب أ　　(ب) $أ^٢ = أ$

(جـ) أ ب = I　　(د) أ ب = $\boxed{}$ بالرغم من أ ≠ $\boxed{}$ ، ب ≠ $\boxed{}$

(٤٨) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات مربعة من نفس النظم :

(١) إذا كان : أ = ب　　فإن : أ جـ = ب جـ

(٢) إذا كان : أ جـ = ب جـ　　فإن : أ = ب

أى الخيارات الآتية صحيحة ؟

(أ) (١) صحيح بينما (٢) خطأ.　　(ب) (١) خطأ بينما (٢) صحيح.

(جـ) كل من (١) ، (٢) صحيح.　　(د) كل من (١) ، (٢) خطأ.

(٤٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ وكانت الدالة د معرفة على مجموعة المصفوفات المربعة حيث

د (س) = (س + I) (س − I)　　فإن : د (أ) = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٢- & ٢ \end{pmatrix}$　　(ب) $\begin{pmatrix} ٢- & ٢ \\ ٢- & ٢ \end{pmatrix}$　　(جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١- & ١ \end{pmatrix}$　　(د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢- \end{pmatrix}$

(٥٠) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث كان : $أ^٢ - أ = I$　　فإن : $أ^٣$ = ...

(أ) أ + ٢ I　　(ب) ٢ أ + I　　(جـ) ٣ أ + I　　(د) أ + ٣ I

(٥١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة حيث : $أ^٢ = أ$　　فإن : $(I + أ)^٢$ = ...

(أ) أ + ٢ I　　(ب) I + ٢ أ　　(جـ) ٣ أ + I　　(د) ٣ I + أ

(٥٢) إذا كان أ ، ب ثابتين ، I مصفوفة الوحدة على النظم ٢ × ٢ وكان : س = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

فإن : $(أ I + ب س)^٢ = $ ....

(أ) $أ^٢ I + أ ب س$ (ب) $أ^٢ I + ٢ أ ب س$

(جـ) $أ^٢ I + ب^٢ س$ (د) $٢ أ^٢ I + ب^٢ س$

(٥٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان على النظم ٢ × ٢ أى مما يأتى يكون صحيح دائمًا ؟

(أ) $(أ + ب)(أ - ب) = أ^٢ - ب^٢$ (ب) $(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢$

(جـ) $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$ (د) $(أ ب)^{مد} = أ^{مد} ب^{مد}$

(٥٤) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث $أ^٢ = أ$ فإن لكل م عدد طبيعى يكون $أ^{م + ١} = $ ....

(أ) I (ب) $\boxed{}$ (جـ) أ (د) − أ

(٥٥) إذا كانت أ مصفوفة مربعة حيث $أ^٢ = I$ فإن : $أ^م = أ$ عندما م عدد ....

(أ) طبيعى. (ب) طبيعى زوجى.

(جـ) طبيعى فردى. (د) طبيعى يقبل القسمة على ٣

(٥٦) إذا كانت أ مصفوفة وكان : $ب = أ أ^{مد}$ فإن ب تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة.

(جـ) مصفوفة الوحدة I (د) المصفوفة الصفرية $\boxed{}$

(٥٧) إذا كانت كل من أ ، ب مصفوفة متماثلة فإن المصفوفة (أ ب أ) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) مثلثية.

(٥٨) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان متماثلتان فإن المصفوفة (أ ب − ب أ) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) صفرية.

(٥٩) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين متماثلتين فإن (أ ب) مصفوفة متماثلة إذا كان ....

(أ) أ ب = I (ب) أ = ب (جـ) أ ب = ب أ (د) جميع ماسبق.

(٦٠) إذا كانت المصفوفة $(أ^{مد} ب أ)$ متماثلة فإن ذلك يشترط أن تكون ....

(أ) أ متماثلة. (ب) أ شبه متماثلة.

(جـ) ب متماثلة. (د) ب شبه متماثلة.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مصفوفة حاصل الضرب فى كل مما يأتى (إن أمكن) مبينًا نظم المصفوفة الناتجة :

(١) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(٥) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(٦) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(٨) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(٩) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

(١٠) $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(١١) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(١٢) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

---

٢ إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ **فأوجد كلًا مما يأتى :**

(١) أ ب (٢) ب أ (٣) (أ + ب) أ

---

٣ إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ **فأوجد :**

أ ب ، ب أ ، أ^{2} ، ب^{2} ، أ^{مد} ب ، أ ب^{مد}

---

٤ إذا كانت : س $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ، ص $= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة :** س^{2} − ص^{2}

---

٥ إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 10 & -5 & 5 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

فأثبت أن : أ ب $= 10\ I$

٦ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ & ١- \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ حقق أن : $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

---

٧ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٣- & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & ١- \\ ٣- & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

فحقق أن : $أ (ب + ج) = أ ب + أ ج$

---

٨ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ٢ & ٠ \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٤ \\ ١- & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

فحقق كلاً مما يأتى : (١) $(أ ب) ج = أ (ب ج)$ (٢) $ب I = I ب = ب$

---

٩ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ ، $(أ + ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$ فأوجد : $(أ^{مد} ب)^{مد}$

---

١٠ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١- & ١ & ١ \\ ٤ & ٣- & ٢ \\ ٣ & ٢- & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١- & ٢- & ١- \\ ٦ & ١٢ & ٦ \\ ٥ & ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

فبيّن أن : $أ ب = \boxed{}$ بينما $ب أ \neq \boxed{}$

---

١١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

حقق أن : $(أ ب ج)^{مد} = ج^{مد} ب^{مد} أ^{مد}$

---

١٢ إذا كانت : $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٤- & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^{٢} - ٥ أ + ٢٢ I = \boxed{}$

---

١٣ أوجد س ، ص ، ع التى تحقق : $\begin{pmatrix} س & ١- \\ ١ & ص \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣- & ٢ & ١ \\ ٤ & ١- & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٣- & ع & ١ \\ ٥ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ «٣ ، ٢ ، ٧»

---

١٤ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ص & س \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من س ، ص التى تجعل : $أ ب = ب أ$ «٠ ، ٢»

---

١٥ إذا كانت : $م = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة كل من س ، ص التى تحقق المعادلة :

$م^{٢} - س م + ص I = \boxed{}$ «٤ ، ٣»

---

١٦ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٧ & ١٣ \\ ٨ & ١- \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣- \\ ٧ & ٠ & ٩ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : $٢ س^{مد} = أ^{٢} + (ب ج)^{مد}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} جتا\,\theta \\ جا\,\theta \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} جا\,\theta \\ -جتا\,\theta \end{pmatrix}$ فإن : $س\,س^{مد} + ص\,ص^{مد} = $ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ وكان : $أ^{٢٧} = \begin{pmatrix} ب & أ \\ ء & حـ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب + حـ + ء = ...

(أ) ١٩ (ب) ٢٧ (جـ) ٢٩ (د) ٣٦

(٣) إذا كانت ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} - ٣س + ١ = ٠$

فإن : $\begin{pmatrix} ل & ٣ \\ ٢ & ل \end{pmatrix}\begin{pmatrix} م & ٢ \\ ٣ & م \end{pmatrix} = $ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٩ & ٧ \\ ٧ & ٦ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٣- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت كل من المصفوفتين أ ، ب ليست مصفوفة صف أو مصفوفة عمود وكان عدد عناصر المصفوفة أ = ١٠ وعدد عناصر المصفوفة ب = ٦ وكان : أ ب معرف فإن عدد عناصر المصفوفة (أ ب) يساوى ....

(أ) ٦٠ (ب) ١٦ (جـ) ١٥ (د) ٦

(٥) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النظم فإن : $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢\,أ\,ب + ب^{٢}$ إذا كان ....

(أ) أ ب = ب أ (ب) أ = − ب (جـ) $أ = ب^{مد}$ (د) ٢ أ = − ب

(٦) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ك & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{ن} = $ .... حيث ن عدد صحيح موجب.

(أ) $\begin{pmatrix} ن\,ك & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ن\,ك & ن \\ ن & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ك^{ن} & ن \\ ن & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ك^{ن} & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٧) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ت \\ ت & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ن \in ط$ فإن : $أ^{٤ن} = $ ....

(أ) I (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ت \\ ت & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ت & ٠ \\ ٠ & ت \end{pmatrix}$ (د) $\boxed{}$

(٨) إذا كان : أب = $\boxed{}$ فإن : ....

(أ) أ = $\boxed{}$ أ، ب = $\boxed{}$ (ب) أ = $\boxed{}$ وب = $\boxed{}$

(جـ) ليس من الضرورى أن يكون أ = $\boxed{}$ أ، ب = $\boxed{}$ (د) جميع ما سبق خطأ

(٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان : أ^{س} = $\begin{pmatrix} ٣٢ & ٣٢ \\ ٣٢ & ٣٢ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٠) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : أ^{٢} = ٣ أ + ٢ I ، أ^{٣} = م أ + ل I

فإن : م + ل = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٧ (جـ) ١١ (د) ٦

(١١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ ، أ × $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤ \\ -٣ \end{pmatrix}$ ، أ × $\begin{pmatrix} -١ \\ ١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ \\ -٣ \end{pmatrix}$

فإن : أ × $\begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ ٧ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٧ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٤ \end{pmatrix}$

(١٢) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : أ $\begin{pmatrix} ١ \\ -١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ ، أ^{٢} $\begin{pmatrix} ١ \\ -١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

فإن مجموع عناصر أ يساوى ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٥

(١٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من نفس النظم بحيث أب = ب ، ب أ = أ

فإن : (أ^{٢} + ب^{٢}) من المؤكد تساوى ....

(أ) أ + ب (ب) ٢ أب (جـ) ٢ ب أ (د) ٢ I

(١٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : أ^{ن} + (ن − ١) I = ...

(أ) ٢$^{ن-١}$ أ (ب) − ن أ (جـ) ن أ (د) (ن + ١) أ

(١٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{pmatrix}$ فإن : (I + ٢ أ + ٣ أ^{٢} + ٤ أ^{٣} + ...) يساوى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & -٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & -٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ -٣ & -٨ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ -٨ & -٣ \end{pmatrix}$

(١٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : أ^{٦٠} = ...

(أ) ٢^{٣٠} I (ب) ٢^{٦٠} I (جـ) ٢^{٩٠} I (د) ٢^{١٢٠} I

(١٧) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} حتا \theta & حا \theta \\ حا \theta & -حتا \theta \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢٠١٩}$ = ...

(أ) أ　　(ب) $أ^٢$　　(جـ) ٢٠١٩ $أ^٢$　　(د) ٢٠١٩ I

---

٢ إذا كان : $ب^{مد} + جـ^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $أ = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق أن : س = $(أ ب + أ جـ)^{مد}$

---

٣ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ١ & ب \end{pmatrix}$ **أوجد أ ، ب إذا كان : س^٢ + س =** $\boxed{}$

---

٤ إذا كانت : س ، ص ، ع مصفوفات غير صفرية مربعة وكان : ع = ص^{مد} س^{مد} + س ص

فأثبت أن : ع مصفوفة متماثلة.

---

٥ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن : س^{٢٠١٤} = I**

تطبيقات حياتية

١ **الربط بالسياحة :** يستهلك أحد الفنادق في مدينة الغردقة السياحية الكميات الموضحة من اللحوم والخضروات والفاكهة بالكيلو جرام في وجبتى الغداء والعشاء

	لحوم	خضروات	فاكهة
وجبة الغداء	٢٠٠	١٠٠	١٥٠
وجبة العشاء	١٢٠	٨٠	١٠٠

، وذلك تبعًا للجدول المقابل ، فإذا كان متوسط سعر الكيلو جرام من اللحوم ٦٥ جنيهًا ومتوسط سعر الكيلو جرام من الخضروات أربعة جنيهات ومتوسط سعر الكيلو جرام من الفاكهة هو خمسة جنيهات ، فأوجد باستخدام ضرب المصفوفات التكاليف الكلية للوجبتين. «١٤١٥٠ ، ٨٦٢٠»

---

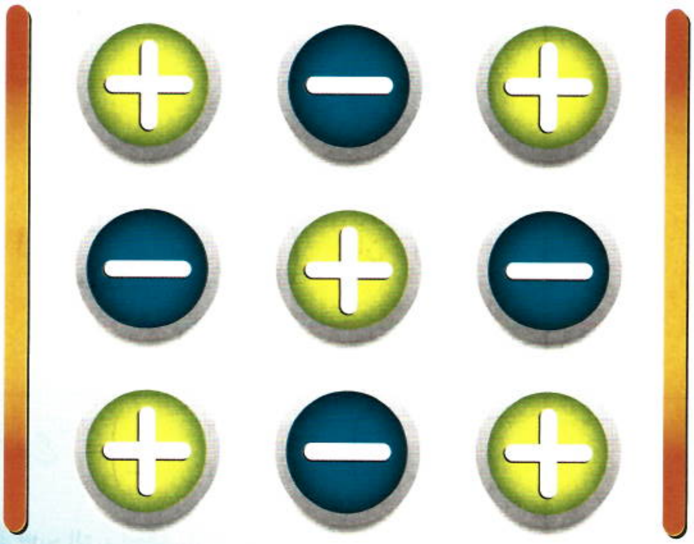
٢ **الربط بالسياحة :** لدى شركة سياحية ٣ فنادق بمدينة الغردقة ، يبين الجدول المقابل عدد الغرف المختلفة في كل فندق ، فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحتوي على سرير واحد ٢٥٠ جنيهًا ، وللغرفة التي تحتوي على سريرين ٤٥٠ جنيهًا ، وللجناح ٦٠٠ جنيه.

الفندق	غرفة بسرير	غرفة بسريرين	جناح
الزهرة	٢٨	٦٤	٨
اللؤلؤة	٣٥	٩٥	٢٠
الماسة	٢٠	٨٠	١٥

(١) اكتب مصفوفة تمثل عدد الغرف المختلفة في الثلاثة فنادق ، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

(٢) اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للشركة ، على فرض أن جميع الغرف تم شغلها.

(٣) ما الدخل اليومي للشركة على فرض أن جميع الغرف تم شغلها ؟ «١٥٤١٠٠»



الدرس 4 المحـــــددات

محدد الرتبة الثانية

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث أ = $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$

فإن : محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ|

ويسمى بمحدد الرتبة الثانية وهو العدد المعرف كالآتى : $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = \text{أء} - \text{حـب}$

أى أن : قيمة محدد الرتبة الثانية تساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى مطروحًا منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر.

مثال ١

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

١) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix}$ ٢) $\begin{vmatrix} ٤ & ٧- \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ ٣) $\begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ ٨- & ٤- \end{vmatrix}$ ٤) $\begin{vmatrix} \text{جا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \\ -\text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \end{vmatrix}$

الحـل

١) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix} = ٢ \times ٨ - ٣ \times ٥ = ١٦ - ١٥ = ١$

٢) $\begin{vmatrix} ٤ & ٧- \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٤ \times ٦ - ٢ \times (٧-) = ٢٤ + ١٤ = ٣٨$

٣) $\begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ ٨- & ٤- \end{vmatrix} = ٦ \times (٤-) - (٨-) \times ٣ = ٢٤- + ٢٤ = $ صفر

٤) $\begin{vmatrix} \text{جا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \\ -\text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \end{vmatrix} = \text{جا}\,\theta \times \text{جا}\,\theta - (-\text{جتا}\,\theta) \times \text{جتا}\,\theta = \text{جا}^٢\,\theta + \text{جتا}^٢\,\theta = ١$

حاول بنفسك

أوجد قيمة كل محدد مما يلى : ١ $\begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ٠ & -٤ \end{vmatrix}$ ٢ $\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ -٥ & -٢ \end{vmatrix}$

مثــال ٢

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلتين الآتيتين :

١ $\begin{vmatrix} س^٢ - ٤ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر ٢ $\begin{vmatrix} س + ٢ & ٣ \\ -٢ & س - ٢ \end{vmatrix} = ١$

الحــل

١ ∵ $\begin{vmatrix} س^٢ - ٤ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = (س^٢ - ٤) \times ١ - ٠ \times ١ = س^٢ - ٤$

∴ $س^٢ - ٤ = ٠$ ∴ $س^٢ = ٤$ ∴ $س = \pm \sqrt{٤} = \pm ٢$

٢ ∵ $\begin{vmatrix} س + ٢ & ٣ \\ -٢ & س - ٢ \end{vmatrix} = (س + ٢)(س - ٢) - (-٢) \times ٣$

$= س^٢ - ٤ + ٦ = س^٢ + ٢$

∴ $س^٢ + ٢ = ١$ ∴ $س^٢ = -١$ ∴ $س = \pm \sqrt{-١}$

∴ س = ت أ، س = − ت (حيث : $ت^٢ = -١$)

حاول بنفسك

أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢س & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٦$

محدد الرتبة الثالثة

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$

فإن : محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز | أ |

ويُسمى بمحدد الرتبة الثالثة حيث : | أ | = $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

وقبل التعرف على كيفية فك محدد الرتبة الثالثة سنتعرف أولاً على «**المحدد الأصغر**» المناظر لأى عنصر فى المصفوفة أ وكيفية تحديد إشارته.

لكل عنصر فى المصفوفة أ محدد أصغر يمكن الحصول عليه بحذف الصف والعمود المتقاطعين على هذا العنصر.

فمثلًا يمكن الحصول على المحدد الأصغر المناظر لكل عنصر من عناصر الصف الأول كما يلى :

للحصول على المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{١١}$ ويُرمز له بالرمز $\|أ_{١١}\|$	$\begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$
للحصول على المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{٢١}$ ويُرمز له بالرمز $\|أ_{٢١}\|$	$\begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$
للحصول على المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{٣١}$ ويُرمز له بالرمز $\|أ_{٣١}\|$	$\begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$

- ويمكن تحديد إشارة أى محدد أصغر لعنصر ما فى المصفوفة بأن :

نجمع رتبة الصف ورتبة العمود الذين يتقاطعان عند هذا العنصر فإذا كان مجموع الرتبتين :

– **زوجيًا** : كانت الإشارة موجبة. – **فرديًا** : كانت الإشارة سالبة.

فمثلًا

– إشارة $|أ_{١١}|$ موجبة لأن : ١ + ١ = ٢ (زوجى)

– إشارة $|أ_{٢١}|$ سالبة لأن : ١ + ٢ = ٣ (فردى)

– إشارة $|أ_{٣١}|$ موجبة لأن : ١ + ٣ = ٤ (زوجى)

- وعلى هذا يمكن كتابة قاعدة الإشارات للمحدد الأصغر كما بالشكل المقابل :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

لاحظ أن

إشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{ص\,ع}$ تتعين بالقاعدة : $(-1)^{ص + ع}$

فك محدد الرتبة الثالثة

يمكن فك محدد الرتبة الثالثة بدلالة عناصر أى صف أو أى عمود ومحدداتها الصغرى وباستخدام قاعدة الإشارات السابق ذكرها.

فمثلًا إذا كان : $|أ| = \begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$ فإن :

- $|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$ (باستخدام عناصر الصف الأول)
- $|أ| = - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} + أ_{٢٢} \begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} - أ_{٢٣} \begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix}$ (باستخدام عناصر العمود الثانى)

مثال ٣

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & ٠ & ٤ \\ ١ & ١ & -٣ \end{vmatrix}$

الحل

باستخدام عناصر الصف الأول نجد أن :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & ٠ & ٤ \\ ١ & ١ & -٣ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} + (-١) \begin{vmatrix} -٢ & ٠ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \left(٠ \times (-٣) - ١ \times ٤\right) - ٣ \left(-٢ \times (-٣) - ١ \times ٤\right) - \left(-٢ \times ١ - ١ \times ٠\right)$$

$$= ٢ \left(٠ - ٤\right) - ٣ \left(٦ - ٤\right) - \left(-٢ - ٠\right) = ٢ \times (-٤) - ٣ \times ٢ + ٢ = -١٢$$

ملاحظة

يمكن فك المحدد باستخدام أى صف أو أى عمود كما ذكرنا وسوف نقوم هنا بفكه مرة أخرى باستخدام عناصر العمود الثانى مع مراعاة قاعدة الإشارات.

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & ٠ & ٤ \\ ١ & ١ & -٣ \end{vmatrix} = -٣ \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} + \text{صفر} \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= -٣ \left(-٢ \times (-٣) - ١ \times ٤\right) + \text{صفر} - \left(٢ \times ٤ - (-٢) \times (-١)\right)$$

$$= -٣ \left(٦ - ٤\right) - \left(٨ - ٢\right) = -٣ \times ٢ - ٦ = -١٢$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها سابقًا (حاول بنفسك استخدام أى صف أو أى عمود آخر)

مثال ٤

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٤ & -١ & ٣ \\ ٠ & ٥ & -٢ \\ ٠ & -٣ & -١ \end{vmatrix}$

الحل

يفضل فك هذا المحدد بدلالة عناصر العمود الأول لوجود أكبر عدد من الأصفار

$$\therefore \text{قيمة المحدد} = ٤ \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & -١ \end{vmatrix} - \text{صفر} \begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ -٣ & -١ \end{vmatrix} + \text{صفر} \begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ \left(٥ \times (-١) - (-٣) \times (-٢)\right) - \text{صفر} + \text{صفر} = ٤ \left(-٥ - ٦\right) = ٤ \times (-١١) = -٤٤$$

حاول بنفسك

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & -٥ \\ -٢ & ٤ & ١ \\ ٧ & -٣ & ٦ \end{vmatrix}$

محدد المصفوفة المثلثة

المصفوفة المثلثة

هى مصفوفة جميع عناصرها التى تحت القطر الرئيسى (أو فوقه) أصفار.

مثل : $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & -٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٧ \end{pmatrix}$

قيمة محدد المصفوفة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى.

أى أن $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}$ ، $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{٣٣}$

الإثبات $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢} - ٠ \times \text{أ}_{٢١} = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢} - ٠ = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}$

، $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{صفر} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{صفر} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الأول

$= \text{أ}_{١١}\,(\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{٣٣} - \text{أ}_{٣٢} \times ٠) = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{٣٣}$

وعلى هذا فإن : $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & -٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ٢ \times (-٣) \times ٧ = -٤٢$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{vmatrix}$

مثال ٥

حل المعادلة الآتية : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & ١ \\ ٨ & ١ - \text{س} & -\text{س} \\ \text{س} & -١ & ١ + \text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحل

بفك المحدد :

$\therefore \text{س} \begin{vmatrix} ١ - \text{س} & -\text{س} \\ -١ & ١ + \text{س} \end{vmatrix} - \text{صفر} \begin{vmatrix} ٨ & -\text{س} \\ \text{س} & ١ + \text{س} \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٨ & ١ - \text{س} \\ \text{س} & -١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

$\therefore \text{س} \left[(١ - \text{س})(١ + \text{س}) - (-\text{س} \times -١)\right] - \text{صفر} + ١ \left[٨ \times -١ - (١ - \text{س}) \times \text{س}\right] = \text{صفر}$

$\therefore$ س (١ − س٢ − س) + ١ (−٨ − س + س٢) = صفر

$\therefore$ س − س٣ − س٢ − ٨ − س + س٢ = صفر

$\therefore$ − س٣ − ٨ = صفر $\therefore$ س٣ = −٨ $\therefore$ $\boxed{\text{س} = -2}$

حاول بنفسك

حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٢ & -٢ \\ ٢ & \text{س} & -٢ \\ -٢ & ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = ٠$

مثال ٦

إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ | = ٧ **أوجد :** | ٣ أ |

الحل

نفرض أن : أ = $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{pmatrix}$ $\therefore$ | أ | = س ل − ص ع = ٧ (١)

، ٣ أ = ٣ $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣\text{س} & ٣\text{ص} \\ ٣\text{ع} & ٣\text{ل} \end{pmatrix}$

$\therefore$ | ٣ أ | = $\begin{vmatrix} ٣\text{س} & ٣\text{ص} \\ ٣\text{ع} & ٣\text{ل} \end{vmatrix}$ = ٩ س ل − ٩ ص ع = ٩ (س ل − ص ع) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : | ٣ أ | = ٩ × ٧ = ٦٣

- **من المثال السابق يمكن استنتاج الملاحظات التالية :**

ملاحظات

١ إذا كان : أ مصفوفة على النظم ن × ن ، ك ∈ ح فإن : | ك أ | = كن | أ |

فمثلاً :

* إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ | = ٣
فإن : | ٥ أ | = ٥٢ × | أ | = ٢٥ × ٣ = ٧٥

* إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان : | أ | = ٥
فإن : | ٢ أ | = ٢٣ × | أ | = ٨ × ٥ = ٤٠

٢ إذا كان : أ مصفوفة مربعة فإن : | أ | = | أمد |

٣ إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث : أ ب موجودة فإن : | أ ب | = | أ | × | ب |

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

يمكن استخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح مثلث باستخدام إحداثيات رؤوسه كما يلى :

إذا كان : س ص ع مثلثًا **حيث :** س (أ ، ب) ، ص (حـ ، ء) ، ع (هـ ، و)

فإن : مساحة سطح Δ س ص ع هى | مـ |

حيث : $\text{مـ} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{حـ} & \text{ء} & 1 \\ \text{هـ} & \text{و} & 1 \end{vmatrix}$

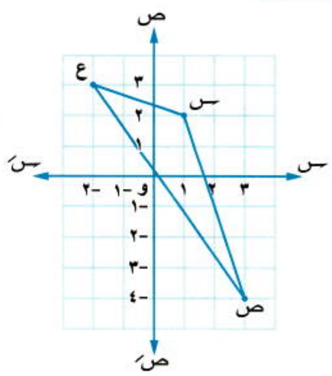
الإحداثيات السينية لرؤوس المثلث — الإحداثيات الصادية لرؤوس المثلث

تذكر أن
| مـ | تعنى مقياس مـ
(أى قيمة مـ الموجبة فقط).

وسوف نعرض فى نهاية هذا الدرس إثبات القانون السابق كنشاط إثرائى.

مثال ٧

أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث المقابل الذى إحداثيات رؤوسه س (١ ، ٢) ، ص (٣ ، −٤) ، ع (−٢ ، ٣)



الحل

$\because \text{مـ} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

وباستخدام عناصر العمود الثالث :

$\therefore \text{مـ} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(9 - 8) - (3 + 4) + (-4 - 6)\right] = \frac{1}{2}(1 - 7 - 10) = -8$

$\therefore$ مساحة Δ س ص ع = | مـ | = | −٨ | = ٨ وحدة مربعة

لاحظ أننا استخدمنا عناصر العمود الثالث فى فك المحدد لأنها الأسهل فى إجراء العمليات الحسابية لوجود الواحد الصحيح.

حاول بنفسك

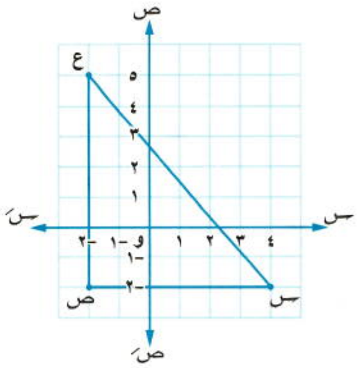
فى الشكل المقابل :

س ص ع مثلث حيث : س (٤ ، −٢)

، ص (−٢ ، −٢) ، ع (−٢ ، ٥)

أوجد باستخدام المحددات مساحة سطح Δ س ص ع

وتأكد من صحة الحل باستخدام قانون حساب مساحة المثلث.



ملاحظة

لإثبات أن ثلاث نقاط س (أ ، ب) ، ص (حـ ، ء) ، ع (هـ ، و) تقع على استقامة واحدة

باستخدام المحددات نثبت أن : $\begin{vmatrix} أ & ب & ١ \\ حـ & ء & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix}$ = صفر

مثال ٨

أثبت باستخدام المحددات أن : النقط (−٢ ، ٤) ، (٣ ، ٠) ، (٨ ، −٤) تقع على استقامة واحدة.

الحل

$\because \begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٨ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ ٨ & -٤ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٨ & -٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix}$

= (−١٢ − ٠) − (٨ − ٣٢) + (٠ − ١٢) = −١٢ + ٢٤ − ١٢ = صفر

∴ النقط (−٢ ، ٤) ، (٣ ، ٠) ، (٨ ، −٤) تقع على استقامة واحدة.

حاول بنفسك

أثبت باستخدام المحددات أن النقط : (٤ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (−٢ ، −٥) تقع على استقامة واحدة.

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

أولًا حل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين

- حل نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين يُقصد به إيجاد قيم المجهولين الذين يحققان المعادلتين معًا.
- إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين كالتالى :

أ س + ب ص = م

حـ س + ء ص = ن

فإنه لحل هذا النظام نتبع ما يأتى :

١ نوجد قيم ثلاثة محددات وذلك بعد وضع المعادلتين على الصورة السابقة ، وهذه المحددات هى :

$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$

- يسمى محدد مصفوفة المعاملات ويُرمز له بالرمز Δ ويُقرأ (دلتا)
- نحصل عليه بوضع معاملى س فى المعادلتين فى العمود الأول ، ومعاملى ص فى المعادلتين فى العمود الثانى.

$\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ \text{ن} & \text{ء} \end{vmatrix}$

- يسمى محدد المجهول س ويُرمز له بالرمز $\Delta_{\text{س}}$ ويُقرأ (دلتا س)
- نحصل عليه من محدد المعاملات Δ وذلك بتغيير عنصرى العمود الأول (معاملى س) بالثابتين م ، ن

$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{م} \\ \text{حـ} & \text{ن} \end{vmatrix}$

- يسمى محدد المجهول ص ويُرمز له بالرمز $\Delta_{\text{ص}}$ ويُقرأ (دلتا ص)
- نحصل عليه من محدد المعاملات Δ وذلك بتغيير عنصرى العمود الثانى (معاملى ص) بالثابتين م ، ن

٢ نوجد قيمة س ، وقيمة ص كما يأتى (بفرض أن : $\Delta \neq 0$) :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ \text{ن} & \text{ء} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix}} = \frac{\text{م ء} - \text{ن ب}}{\text{أ ء} - \text{حـ ب}}$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{م} \\ \text{حـ} & \text{ن} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix}} = \frac{\text{أ ن} - \text{حـ م}}{\text{أ ء} - \text{حـ ب}}$$

لاحظ أنه إذا كان : $\Delta \neq$ صفر فإن للنظام حلًا وحيدًا

أما إذا كان : $\Delta =$ صفر فإن للنظام عدد لانهائى من الحلول أو ليس له حل

والمثال التالى يوضح الخطوات السابق ذكرها.

مثال ٩

حل بطريقة كرامر المعادلتين الآتيتين : ٦ س − ٥ ص = −٢٣ ، ٣ س + ٣ ص = ١٦

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٦ & -٥ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ \times ٣ - ٣ \times (-٥) = ١٨ + ١٥ = ٣٣$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٢٣ & -٥ \\ ١٦ & ٣ \end{vmatrix} = -٢٣ \times ٣ - ١٦ \times (-٥) = -٦٩ + ٨٠ = ١١$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٦ & -٢٣ \\ ٣ & ١٦ \end{vmatrix} = ٦ \times ١٦ - ٣ \times (-٢٣) = ٩٦ + ٦٩ = ١٦٥$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{١١}{٣٣} = \frac{١}{٣} \text{ ، } \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{١٦٥}{٣٣} = ٥$$

وتكون مجموعة الحل = $\left\{\left(\frac{١}{٣} \text{ ، } ٥\right)\right\}$

ملاحظة

يمكنك التأكد من صحة الحل بالتعويض في كل من المعادلتين بقيمة س ، وقيمة ص

حاول بنفسك

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام طريقة كرامر : ٤ س + ٣ ص = −٤ ، ٣ س − ص = −٣

ثانيًا حل أنظمة المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل كالآتي :

[١] $\text{أ}_١ \text{س} + \text{ب}_١ \text{ص} + \text{حـ}_١ \text{ع} = \text{م}$ | [٢] $\text{أ}_٢ \text{س} + \text{ب}_٢ \text{ص} + \text{حـ}_٢ \text{ع} = \text{ن}$

[٣] $\text{أ}_٣ \text{س} + \text{ب}_٣ \text{ص} + \text{حـ}_٣ \text{ع} = \text{ك}$

فإنه بطريقة مماثلة لما فعلناه في حالة نظام معادلتين خطيتين في مجهولين يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{حـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{حـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{حـ}_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المعاملات}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب}_١ & \text{حـ}_١ \\ \text{ن} & \text{ب}_٢ & \text{حـ}_٢ \\ \text{ك} & \text{ب}_٣ & \text{حـ}_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول س}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م ، ن ، ك

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{م} & \text{حـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ن} & \text{حـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ك} & \text{حـ}_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ص}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثاني (معاملات ص) بالثوابت م ، ن ، ك

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{م} \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{ن} \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{ك} \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ع}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثالث (معاملات ع) بالثوابت م ، ن ، ك

وبفرض أن $\Delta \neq$ صفر فإن : $\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، $\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ ، $\text{ع} = \dfrac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$

والمثال التالى يوضح الخطوات السابقة.

مثال ١٠

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

٣ ص + ٢ س = ع + ١ ، ٣ س + ٢ ع = ٨ − ٥ ص ، ٣ ع − ١ = س − ٢ ص

الحل

١ نضع نظام المعادلات على الصورة : أ س + ب ص + حـ ع = م كالتالى :

٢ س + ٣ ص − ع = ١ ، ٣ س + ٥ ص + ٢ ع = ٨ ، س − ٢ ص − ٣ ع = −١

٢ نوجد كلاً من : Δ ، $\Delta_{\text{س}}$ ، $\Delta_{\text{ص}}$ ، $\Delta_{\text{ع}}$ كالتالى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-15+4) - 3(-9-2) + (-1)(-6-5)$$
$$= -22 + 33 + 11 = 22$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1(-15+4) - 3(-24+2) + (-1)(-16+5)$$
$$= -11 + 66 + 11 = 66$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-24+2) - 1(-9-2) + (-1)(-3-8)$$
$$= -44 + 11 + 11 = -22$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-5+16) - 3(-3-8) + 1(-6-5)$$
$$= 22 + 33 - 11 = 44$$

٣ نوجد قيم المجاهيل س ، ص ، ع كالتالى :

$\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \dfrac{66}{22} = 3$ ، $\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \dfrac{-22}{22} = -1$ ، $\text{ع} = \dfrac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \dfrac{44}{22} = 2$

وتكون مجموعة الحل = {(٣ ، −١ ، ٢)}

ملاحظتان

- يمكنك التأكد من صحة الحل بالتعويض عن المجاهيل الثلاثة فى كل معادلة.
- يُسمى (٣ ، −١ ، ٢) ثلاثى مرتب.

حاول بنفسك

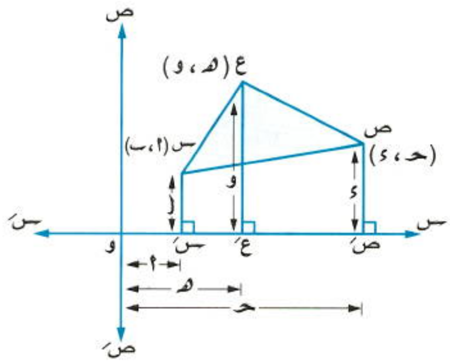
حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

٢ س + ص − ع = ٣ ، س + ص = ١ − ع ، س = ٢ ص + ٣ ع + ٤

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى إيجاد قيمة المحدد وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

نشاط طريقة لإثبات قانون إيجاد مساحة المثلث باستخدام المحددات



بفرض أن س ص ع مثلث حيث :

س (أ ، ب) ، ص (حـ ، ء) ، ع (هـ ، و) فإن :

مساحة Δ س ص ع

= مساحة شبه المنحرف س سَ عَ ع

+ مساحة شبه المنحرف ع عَ صَ ص

− مساحة شبه المنحرف س سَ صَ ص

$$= \frac{\text{ب}+\text{و}}{2}(\text{هـ}-\text{أ}) + \frac{\text{و}+\text{ء}}{2}(\text{حـ}-\text{هـ}) - \frac{\text{ب}+\text{ء}}{2}(\text{حـ}-\text{أ})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\text{ب}+\text{و})(\text{هـ}-\text{أ}) + (\text{و}+\text{ء})(\text{حـ}-\text{هـ}) - (\text{ب}+\text{ء})(\text{حـ}-\text{أ})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{ب هـ} - \cancel{\text{ب أ}} + \cancel{\text{و هـ}} - \text{و أ} + \text{و حـ} - \cancel{\text{و هـ}} + \cancel{\text{ء حـ}} - \text{ء هـ} - \text{ب حـ} + \cancel{\text{ب أ}} - \cancel{\text{ء حـ}} + \text{ء أ}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{ب هـ} - \text{و أ} + \text{و حـ} - \text{ء هـ} - \text{ب حـ} + \text{ء أ}\right] \qquad (1)$$

وبفك المحدد $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{حـ} & \text{ء} & 1 \\ \text{هـ} & \text{و} & 1 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الثالث نجد أن :

$$\text{المحدد} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ء} \\ \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{حـ و} - \text{هـ ء} - \text{أ و} + \text{هـ ب} + \text{أ ء} - \text{ب حـ}\right] \qquad (2)$$

وبمقارنة الناتج الذى حصلنا عليه فى (١) ، والناتج الذى حصلنا عليه فى (٢) نجد أن :

$$\text{مساحة } \Delta \text{ س ص ع} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{حـ} & \text{ء} & 1 \\ \text{هـ} & \text{و} & 1 \end{vmatrix}$$ (بشرط أخذ القيمة المطلقة للناتج)

تمارين 4 على المحددات

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ٢٩ (ب) ١ (جـ) −١ (د) ١١

(٢) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) صفر (د) ١٠

(٣) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٥ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٣٠ (جـ) ١٥ (د) ٥

(٤) إذا كانت المصفوفة أ $= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -٥ \end{pmatrix}$ فإن : |أ| = ...

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) ٢٠ (د) −٢٠

(٥) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٠ & ٤٢ & ٣ \\ ٢ & ١٨ & ٧ \\ ٠ & ٢٨ & ٣ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٨٤ (جـ) ٤٨ (د) −٨٤

(٦) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٥ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix}^{٢} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) −٢٩

(٧) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $\dfrac{|٢ أ|}{٢ |أ|} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & س \end{vmatrix} = ٠$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} & ٥ \\ ٣ & \text{س} \end{vmatrix} = ١٢$ فإن : س = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣ (جـ) ١٢ (د) ٢٧

(١٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢\text{س} & ٥ \\ ٦ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = ١١$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(١١) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & ١٢ \\ ٣ & \text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١٠ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ± ٦

(١٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & -١ \\ ٢ & \text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٣ أ، −٢ (ب) −٣ أ، ٢ (جـ) ٣ أ، ٢ (د) −٣ أ، −٢

(١٣) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & ٠ \\ ٥ & ٣ & ٠ \\ ٤ & -١ & ٢\text{س} \end{vmatrix} = ٦$ هى ....

(أ) {٣} (ب) {٦} (جـ) {١ ، −١} (د) {٦ ، −٦}

(١٤) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٠ & ٠ \\ ١ & ٣\text{س} & ٠ \\ ٢ & ٤ & -\text{س} \end{vmatrix} = ٤٨$ فإن : قيمة س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) صفر

(١٥) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} & -٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر فى ك هى ....

(أ) ∅ (ب) {−٢ ، ٢} (جـ) {−٢ت ، ٢ت} (د) {−ت ، ت}

(١٦) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} + ٢ & ٢ \\ \text{س} & \text{س} - ٣ \end{vmatrix} = ٤$ هى ....

(أ) {٣ ، −٢} (ب) {٢ ، −٣} (جـ) {٥ ، −٢} (د) {٢ ، −٥}

(١٧) قيمة أ الممكنة التى تجعل المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & \text{أ} & ١ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{vmatrix} = ٠$ هى ....

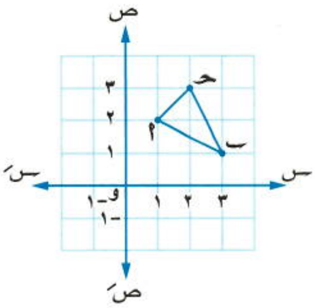
(أ) ٥ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) ٣

(١٨) إذا كانت : أ (٣ ، ٥) ، ب (٢ ، ٠) ، حـ (−٣ ، ٣)

فإن مساحة سطح المثلث أ ب حـ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٨ (ب) ١٤ (جـ) ٧ (د) ٢

(١٩) مساحة Δ أ ب جـ = ... وحدة مساحة.



(أ) −٣

(ب) −١,٥

(جـ) ١,٥

(د) ٣

(٢٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} ب & أ \\ ء & جـ \end{vmatrix}$ = ٦ وكان $\begin{vmatrix} كجـ & أك \\ ء & ب \end{vmatrix}$ = −٢٤ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) −٤

(٢١) إذا كان : $\begin{vmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{vmatrix}$ = ٤ فإن : $\begin{vmatrix} ٤\,ص & س - ص \\ ٤\,ل & ع - ل \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(٢٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} ب & أ \\ ء & جـ \end{vmatrix}$ = ٥ وكان ء − جـ = ٧ فإن : $\begin{vmatrix} ب + ٢ & أ + ٢ \\ ء & جـ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٤ (جـ) −٩ (د) ١٩

(٢٣) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢\,ص & س \\ ع & ٠ \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}^{مد}$ فإن : س × ص × ع = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : | أ − م I | = صفر فإن : م = ...

(أ) ١ أ، ٤ (ب) −١ أ، ٤ (جـ) −٤ أ، ١ (د) −٤ أ، −١

(٢٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ وكان : م^{٢} − ٥ م = ٧ فإن : | أ − م I | = ...

(أ) صفر (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٢٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ك - ١ \\ ك + ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٢ ك^{٢} + ١ فإن : قيمة ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١- & ٢ & ل \\ ٣ & م & س - ٢ \\ ن & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = ل م ن حيث ل ، م ، ن أعداد غير صفرية

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) ل م

(٢٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & ٥ \\ ٥ & \text{ب} \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} \text{ب} & ٢ \\ ٢ & \text{حـ} \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} \text{أ} & ١ \\ ١ & \text{حـ} \end{vmatrix} = ٠$

فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & ٠ & ٠ \\ ١- & \text{ب} & ٠ \\ ٢ & ٥ & \text{حـ} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ± ١٠ (ب) ± ٥٠ (جـ) ± ١٠٠ (د) ± ٢٠

(٢٩) إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & \text{س} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & \text{س} \\ ٢ & \text{ص} \end{pmatrix}$ وكان |ب| = ٣ ، |أ + ب| = ٥

فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ١٥ (جـ) ٩ (د) ٢١

(٣٠) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث : |أ| = ٢ فإن : $|\text{أ}^{\text{مد}}|$ = ...

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٣١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ٧ فإن : $|\text{أ}^{٢}|$ = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ٤٩ (د) ٥٦

(٣٢) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ١٥ فإن : |٢ أ| = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(٣٣) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ وكان : |ب| = ١٢ فإن : |أب| = ...

(أ) -٢٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٣

(٣٤) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان على النظم ٣ × ٣ بحيث كان : |أ| = ٢ ، |ب| = -١

فإن : |٣ أب| = ...

(أ) -٦ (ب) -١٨ (جـ) ٥٤ (د) -٥٤

(٣٥) إذا كانت أ مصفوفة مربعة تحقق العلاقة : $\text{أ}\,\text{أ}^{\text{مد}} = I$ فإن : |أ| = ...

(أ) صفر فقط. (ب) ١ فقط. (جـ) -١ فقط. (د) ± ١

(٣٦) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٢ & \text{س} \end{pmatrix}$ وكان : $|\text{أ}^{٣}| = ١٢٥$ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ± ٢ (جـ) ± ٣ (د) ± ٥

(٣٧) إذا كانت : $\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١٤ \end{pmatrix}$ فإن : |أ| = ...

(أ) ٨ (ب) -٨ (جـ) ٢ (د) -٢

(٣٨) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ | = ٥ فإن : | − أ | = ...

(أ) −٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢٥

(٣٩) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان : | أ | = ٥ فإن : | − أ | = ...

(أ) −٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢٥

(٤٠) إذا كانت : أ = − أ^{مد} حيث : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ فإن : | أ | = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٤١) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم م × م حيث م عدد زوجى فإن : | أ | = ...

(أ) صفر فقط. (ب) ١ فقط. (جـ) −١ فقط. (د) أى عدد حقيقى.

(٤٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ وكان : | ٢ أ | = ٨ فإن : | ٣ أ | = ...

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٤٣) فى نظام المعادلات $أ_١$ س + $ب_١$ ص = $حـ_١$ ، $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = $حـ_٢$

إذا كان : $\begin{vmatrix} ب_١ & أ_١ \\ ب_٢ & أ_٢ \end{vmatrix} = ٥$ ، $\begin{vmatrix} ب_١ & حـ_١ \\ ب_٢ & حـ_٢ \end{vmatrix} = -١٠$ ، $\begin{vmatrix} حـ_١ & أ_١ \\ حـ_٢ & أ_٢ \end{vmatrix} = ١٥$

فإن : (س ، ص) = ...

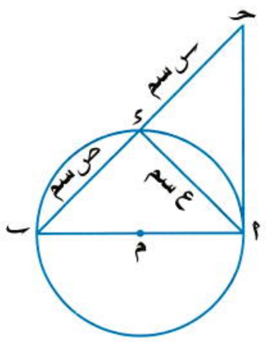
(أ) (−٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (−٥٠ ، ٧٥) (د) (٧٥ ، −٥٠)

(٤٤) عند حل نظام المعادلات : ٢ س + ٣ ص − ع = ١ ، ٣ س + ٥ ص + ٢ ع = ٨

، س − ٢ ص − ٣ ع = −١ يكون $\frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٣

(٤٥) **فى الشكل المقابل :**



أحـ قطعة مماسة للدائرة م ، أب قطر فى الدائرة

فإن قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٥ \\ ص & ع & ٣ \\ ع & س & ٢ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣

(جـ) صفر (د) ٢

(٤٦) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & س - ٢ \\ ٠ & س - ٣ & ٣ \\ س & -١ & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر هى ....

(أ) {٠} (ب) {٣ ، ٤ ، −١} (جـ) {٢ ، ٣} (د) {٠ ، ٢ ، ٣}

(٤٧) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & س - ٢ \\ ٠ & ١ & ١ \\ س + ٢ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥$ هي ....

(أ) $\{٢ ، -٢\}$ (ب) $\{٣ ، -٣\}$ (جـ) $\{٣ ، ٢\}$ (د) $\{١ ، -١\}$

(٤٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & حا\,\theta \\ ٠ & قتا\,\theta & ٢ \\ س & ٣ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} حتا\,\theta & حا\,\theta \\ حا\,\theta & -حتا\,\theta \end{vmatrix} = ٠$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) حا θ

(٤٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & س \\ ٥ & ٢س & ٠ \\ س & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٨$ س فإن مجموعة حل المعادلة هي ....

(أ) $\{٢ ، -٢\}$ (ب) $\{٠ ، -٢ ، ٢\}$

(جـ) $\{\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢}\}$ (د) $\{٠ ، \frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}\}$

(٥٠) إذا كانت : $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} حتا\,\theta & طا\,\theta \\ ظتا\,\theta & حتا\,\theta \end{vmatrix} = \frac{٣}{٤}$ هي ....

(أ) $\{\frac{\pi}{٣}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{٤}\}$ (جـ) $\{\frac{\pi}{٦}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{١٢}\}$

(٥١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٤س - ١٠ = ٠$ فإن : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -١ & ٢ل \\ م & ٣ \end{vmatrix}$

تساوي ....

(أ) −١٧ (ب) −١٢ (جـ) −٨ (د) −٦

(٥٢) إذا كانت النقط (١ ، −٢) ، (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٣) منتصفات أضلاع Δ أ ب جـ

فإن مساحة Δ أ ب جـ تساوي .... وحدة مساحة.

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٥٣) إذا كان : أ (ك ، ك + ١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٣ ، ١) هي رؤوس المثلث أ ب جـ

وكانت مساحة Δ أ ب جـ تساوي ١,٥ وحدة مساحة فإن : ك = ...

(أ) ١ فقط. (ب) ٢ فقط. (جـ) ١ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٣

(٥٤) إذا كانت مساحة Δ أ ب جـ = ٥ وحدة مساحة حيث أ (١ ، −١) ، ب (٠ ، ٢) ، جـ $(س_١ ، ص_١)$

وكانت جـ تقع على المستقيم ٣ س + ص − ٤ ك = ٠ فإن : ك $\in$ ....

(أ) $\{-٣ ، -٢\}$ (ب) $\{-٣ ، ٢\}$ (جـ) $\{٣ ، -٢\}$ (د) $\{٣ ، ٢\}$

(٥٥) إذا كان : أ(١ ، ٢) ، ب(٢ ، ١) ، حـ(٣ ، ٤) ، و(٠ ، ٠)

فإن مساحة الشكل الرباعي أ و ب حـ = ... وحدة مساحة.

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣,٥ (د) ٢,٥

(٥٦) مساحة المثلث المحصور بين المستقيمات ل_{1} : س + ص = ٣ ، ل_{2} : ٢ س + ص = −٥

، ومحور السينات يساوي .... وحدة مساحة.

(أ) ٣٠ (ب) $\frac{١٢١}{٤}$ (جـ) $\frac{١٢٥}{٤}$ (د) $\frac{١٢٧}{٧}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$

(٢) $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ -١ & ٧ \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} \frac{٢}{٣} & -\frac{٣}{٤} \\ \frac{٨}{٩} & -١ \end{vmatrix}$

(٤) $\begin{vmatrix} -٢ & \text{س} \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix}$

(٥) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} + \text{س} \\ \text{ب} & \text{ب} + \text{ص} \end{vmatrix}$

(٦) $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} + ١ & \text{س} + ١ \\ \text{ص}^{٢} + ١ & \text{ص} + ١ \end{vmatrix}$

(٧) $\begin{vmatrix} \text{قا}\,\theta & ١ \\ \text{ظا}^{٢}\,\theta & \text{قا}\,\theta \end{vmatrix}$

(٨) $\begin{vmatrix} ١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta & \frac{١}{\text{حتا}\,\theta} \\ \frac{١}{\text{حتا}\,\theta} & ١ \end{vmatrix}$

---

٢ أثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} ١٣ & ٣ \\ -٧ & -٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦\text{س} & ٣ \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -١ & ٢\text{س} \\ ٣\text{س} & ٢ \end{vmatrix}$

(٢) $١ = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ -٧ & ٥ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ظا}^{٢}\,\theta & \text{قا}\,\theta \\ \text{قا}\,\theta & ١ \end{vmatrix}$

---

٣ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{vmatrix} = ٣$ **فاحسب قيمة كل من :**

(١) $\begin{vmatrix} ٥\text{ص} & ٢\text{س} \\ ٥\text{ل} & ٢\text{ع} \end{vmatrix}$

(٢) $\begin{vmatrix} ٤\text{ص} & \text{س} - \text{ص} \\ ٤\text{ل} & \text{ع} - \text{ل} \end{vmatrix}$

٤ أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$

(٢) $\begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$

(٤) $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٠ \\ ٥ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$

(٥) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -٧ \\ ٠ & -١ & ١٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

(٦) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ + \text{ت} \\ ٠ & ١ & \text{ت} \\ ١ - \text{ت} & - \text{ت} & ١ \end{vmatrix}$ (حيث $\text{ت}^{٢} = -١$)

---

٥ أثبت أن : $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٥ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} = -١$

---

٦ حل كلًا من المعادلات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ٣\text{س} & -٤ \\ ٢ & ٢ - \text{س} \end{vmatrix} = -١$ «-١ أو ٣»

(٢) $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} - ١ & \text{س} + ١ \\ \text{س} + ١ & \text{س}^{٢} - ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$ «-١ أو صفر أو ٢»

(٣) $\begin{vmatrix} ٠ & -١ & \text{س} \\ \text{س} & ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$ «٨ أو -٢»

(٤) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & \text{س} \\ \text{س} & ١ & ٠ \\ ١ & \text{س} + ٣ & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$ «-٥ أو ٠ أو ٢»

(٥) $\begin{vmatrix} \text{جا } ٢٠^{\circ} & \text{جا } ٧٠^{\circ} \\ -\text{جتا } ٢٠^{\circ} & \text{جتا } ٧٠^{\circ} \end{vmatrix} = ٢\text{س} - ٣$ «٢»

---

٧ أوجد قيمة س التي تجعل :

$\begin{vmatrix} ٣\text{س} & ١ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ يساوى ثلاثة أمثال $\begin{vmatrix} -١ & -٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٥ \\ -١ & \text{س} & ٧ \end{vmatrix}$ « $\frac{-١١}{٣}$ »

---

٨ إذا كان : $\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣} + \text{ع}^{٣} = ٢٠$ ، $\text{س ص ع} = ٤$

فأوجد القيمة العددية للمحدد : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ع} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ «٨»

٩ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث :

(١) أ (٢ ، ٤) ، ب (−٢ ، ٤) ، حـ (٠ ، −٢) «١٢ وحدة مربعة»

(٢) س (٣ ، ٣) ، ص (−٤ ، ٢) ، ع (١ ، −٤) «$23\frac{1}{2}$ وحدة مربعة»

(٣) أ (−١ ، −٣) ، ب (٢ ، ٤) ، حـ (−٣ ، ٥) «١٩ وحدة مربعة»

---

١٠ باستخدام المحددات أثبت أن كلًا من النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

(١) (٣ ، ٥) ، (٤ ، −١) ، (٥ ، −٧)

(٢) (٣ ، ٢) ، (−١ ، ٠) ، (−٥ ، −٢)

---

١١ حل كل نظام من المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر :

(١) ٢ س − ٣ ص = ٥ ، ٣ س + ٤ ص = −١ «١ ، −١»

(٢) س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + ٥ ص = ٨ «−١ ، ٢»

(٣) س + ٢ ص = ٠ ، ٢ س − ٣ ص = ١ «$\frac{2}{7}$ ، $\frac{-1}{7}$»

(٤) ٣ س = ١ − ٤ ص ، ٥ س + ١٢ = ٧ ص «−١ ، ١»

---

١٢ حل كل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر :

(١) ٢ س + ص − ٢ ع = ١٠ ، ٣ س + ٢ ص + ٢ ع = ١
، ٥ س + ٤ ص + ٣ ع = ٤ «١ ، ٢ ، −٣»

(٢) س + ٢ ص − ٣ ع = ٦ ، ٢ س − ص − ٤ ع = ٢
، ٤ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٤ «٢ ، ٢ ، صفر»

(٣) ص + ٢ س + ٣ ع = ٦ ، ٢ س − ص + ع = −٣
، س − ٢ ص + ٢ ع = −١١ «$\frac{5}{3}$ ، $\frac{65}{12}$ ، $\frac{-11}{12}$»

(٤) س + ٢ ص + ٣ ع = ٤ ، ٢ س + ٥ ص = ٣ ، ٣ ص + ع = ٤ «−١ ، ١ ، ١»

(٥) س − ص = ٥ ، ع − ص = ٨ ، س + ص + ع = ٤ «٢ ، −٣ ، ٥»

(٦) ٣ س + ع = ٧ − ٢ ص ، ٥ ص + ٣ ع = ٤ − س ، س = ٢ ص − ع − ١ «٢ ، ١ ، −١»

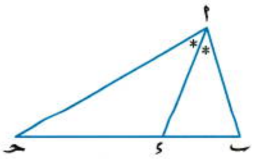
(٧) س + ص = ٥ − ٣ ع ، ص = ع ، ٢ س − ٤ ع = −٢ «١ ، ١ ، ١»

---

١٣ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

أوجد قيمة : $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٥ \\ \text{أحـ} & \text{أب} & ٦ \\ \text{ءحـ} & \text{بء} & ٧ \end{vmatrix}$



«صفر»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{جا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & \text{جتا}\,\theta \\ ١ & \text{جا}\,\theta \end{pmatrix}$ حيث $\theta \in [\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$

وكان $|\text{أ} \times \text{ب}| = \frac{١}{٢}$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ٣ + \text{جا}\,\theta \\ \text{جا}\,\theta & ٤ \end{vmatrix} = ٠$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

(٣) حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & \text{جاس} \\ ٠ & \text{قتاس} & \text{جتاس} \\ \text{ظاس} & \text{ظتاس} & \text{قاس} \end{vmatrix} = ١$ حيث $\text{س} \in [\,٠^\circ ، ٣٦٠^\circ\,]$ هو ....

(أ) ٤٥° أ، ١٣٥° (ب) ١٣٥° أ، ٢٢٥° (جـ) ٤٥° أ، ٢٢٥° (د) ٤٥° أ، ٣١٥°

(٤) النقط أ (−١ ، ٥) ، ب (٢ ، ٢) ، جـ (٣ ، ١) ....

(أ) رؤوس مثلث قائم الزاوية مساحته ٥ وحدات مربعة.

(ب) رؤوس مثلث متساوى الساقين مساحته ١٠ وحدات مربعة.

(جـ) رؤوس مثلث متساوى الأضلاع مساحته ٩ وحدات مربعة.

(د) تقع على استقامة واحدة.

(٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & \text{ك} + \frac{١}{\text{ك}} \\ \text{ك} + \frac{١}{\text{ك}} & ١ \end{vmatrix} = ١٥$ فإن : $\text{ك}^٢ + \frac{١}{\text{ك}^٢} =$ ....

(أ) ١٦ (ب) ١٥ (جـ) ١٤ (د) ١٣

(٦) إذا كانت مساحة المثلث الذى رؤوسه (ك ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٢) هى ٤ وحدة مربعة

فإن : ك = ...

(أ) صفر أ، −٨ (ب) −٤ أ، ٤ (جـ) صفر أ، ٨ (د) ٨ أ، −٨

(٧) لكى يكون لنظام المعادلات $\text{أ}_١ \text{س} + \text{ب}_١ \text{ص} = \text{جـ}_١$ ، $\text{أ}_٢ \text{س} + \text{ب}_٢ \text{ص} = \text{جـ}_٢$

حل وحيد يجب أن يكون ....

(أ) $\begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{vmatrix} = ٠$ (ب) $\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{vmatrix} = ٠$

(جـ) $\begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{vmatrix} \neq ٠$ (د) $\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{vmatrix} \neq ٠$

(٨) عدد قيم س الصحيحة التى تجعل قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٥\,س + ١٤ & -٢ \\ ٧\,س + ٨ & س \end{vmatrix} \leq ١$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ\,جا\,س & ٠ & ٠ \\ ١ & أ\,جتا\,س & ٠ \\ قا\,س & ظتا\,س & أ\,ظا\,س \end{vmatrix} = -أ^{٣}\,جتا^{٢}\,س + ٨$ فإن : أ = ...

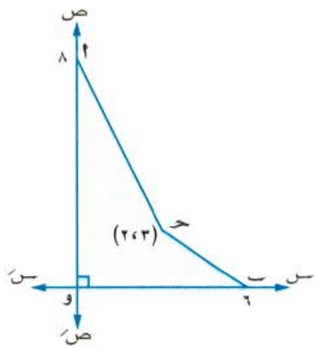
(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) −٨ (د) ٢

---

٢ **فى الشكل المقابل :**

أوجد مساحة الشكل المظلل

مستخدمًا المحددات.



«١٨ وحدة مربعة»

---

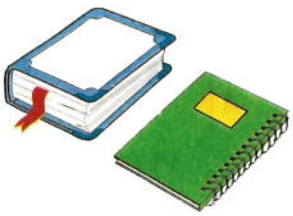
٣ **باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتية :**

$\begin{vmatrix} ٢ & ص \\ ١ & س \end{vmatrix} = ١$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ع \\ ٢ & ص \end{vmatrix} = ١$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & س \\ ١ & ع \end{vmatrix} = ٢$

«١ ، ١ ، ١»

تطبيقات حياتية

١ **الربط بالمستهلك :** اشترى فادى ٣ كشاكيل وكتابين بمبلغ ٨٥ جنيهًا ، واشترى كريم كشكولين و٤ كتب من الأنواع نفسها بمبلغ ١١٠ جنيهات استخدم طريقة كرامر لإيجاد سعر كل من الكشكول والكتاب.



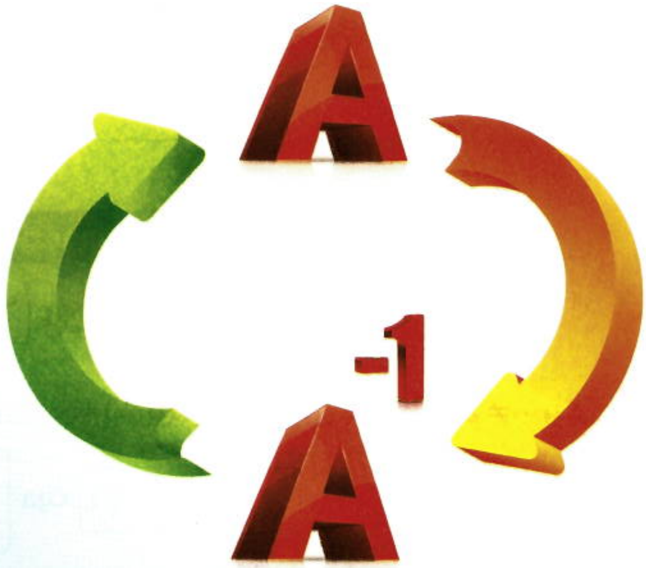
«١٥ جنيهًا ، ٢٠ جنيهًا»

---

٢ قطعة أرض زراعية على شكل مثلث ، إذا كان قياس إحدى زواياها ضعف قياس الزاوية الثانية ويزيد عن قياس الزاوية الثالثة بمقدار ٢٠°

أوجد قياسات زواياها الثلاثة.

«٨٠° ، ٤٠° ، ٦٠°»



الدرس 5 المعكوس الضربى للمصفوفة

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين مربعتين على النظم ٢ × ٢

وكان : $\boxed{\text{أ ب} = \text{ب أ} = I}$ حيث I مصفوفة الوحدة على النظم ٢ × ٢

فإن : المصفوفتين أ ، ب كلًا منهما معكوس ضربى للآخر.

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & ١ \\ \frac{-٣}{٢} & ٢ \end{pmatrix}$

فإن : $\text{أ ب} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & ١ \\ \frac{-٣}{٢} & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

، $\text{ب أ} = \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & ١ \\ \frac{-٣}{٢} & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

أى أن $\boxed{\text{أ ب} = \text{ب أ} = I}$

∴ المصفوفتان أ ، ب كل منهما معكوس ضربى للآخر.

ملاحظة

إذا كان المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٤ \\ ٢ & ١ & -٤ \end{pmatrix}$ ، المصفوفة $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

فإن المصفوفة أ ليست معكوس ضربى للمصفوفة ب

على الرغم من أن : $\text{أ ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٤ \\ ٢ & ١ & -٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

وذلك لأن المصفوفة أ ، المصفوفة ب ليست مربعة.

المعكوس الضربى للمصفوفة ٢ × ٢

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ

الذى يرمز له بالرمز $أ^{-1}$ يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون محدد أ = $\Delta \neq 0$ ويكون :

$\boxed{أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}}$ حيث $\boxed{أ\,أ^{-1} = أ^{-1}\,أ = I}$

مثال ١

أوجد المعكوس الضربى إذا كان له وجود لكل من المصفوفتين الآتيتين :

[١] $أ = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ [٢] $ب = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

الحل

[١] $\because \Delta =$ محدد أ $= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - (3)(2) = 2$ $\therefore \Delta \neq 0$

$\therefore$ للمصفوفة أ معكوس ضربى.

، $\because أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$ حيث : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ $\therefore أ^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

[٢] $\because \Delta =$ محدد ب $= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)(12) - (2)(3) = 0$ $\therefore ب^{-1}$ غير معرف (ليس له وجود)

حاول بنفسك

أوجد إن أمكن المعكوس الضربى للمصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

مثال ٢

أوجد قيم س الحقيقية التى تجعل للمصفوفة أ فى كل مما يأتى معكوسًا ضربيًا :

[١] $أ = \begin{pmatrix} س & 3 \\ 12 & س \end{pmatrix}$ [٢] $أ = \begin{pmatrix} س - 1 & 4 \\ 3 & س - 2 \end{pmatrix}$

الحل

[١] المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى إذا كان : $|أ| = 0$

أى عندما $\begin{vmatrix} س & 3 \\ 12 & س \end{vmatrix} = 0$ $\therefore س^2 - 36 = 0$ $\therefore س = \pm 6$

$\therefore$ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى عند $س = \pm 6$

$\therefore$ يكون للمصفوفة أ معكوس ضربى عندما $س \in ح - \{-6 ، 6\}$

٢ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربي إذا كان $|\text{أ}| = ٠$

أي عندما $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & ٤ \\ ٣ & \text{س} - ٢ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ $(\text{س} - ١)(\text{س} - ٢) - ١٢ = ٠$

∴ $\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢ - ١٢ = ٠$ ∴ $\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠ = ٠$

∴ $(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٢) = ٠$ ∴ س $= ٥$ أ، س $= -٢$

∴ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربي عندما س $= ٥$ أ، س $= -٢$

∴ المصفوفة أ يكون لها معكوس ضربي عندما س $\in \text{ح} - \{٥ ، -٢\}$

حاول بنفسك

أوجد قيم س الحقيقية التي تجعل للمصفوفة : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} - ١ & ٤ \\ ٢ & \text{س} + ١ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًا.

مثال ٣

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :**

١ $(\text{أ}^{-١})^{-١} = \text{أ}$ ٢ $(\text{أب})^{-١} = \text{ب}^{-١}\text{أ}^{-١}$

الحل

١ ∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = (١)(٤) - (٣)(٢) = -٢$ ∴ $\Delta \neq ٠$

∴ $\text{أ}^{-١}$ له وجود (معرف) ، ∵ $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ} \end{pmatrix}$ حيث : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{-١}{٢} \end{pmatrix}$

، ∵ $|\text{أ}^{-١}| = \begin{vmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{-١}{٢} \end{vmatrix} = (-٢)\left(\frac{-١}{٢}\right) - \left(\frac{٣}{٢}\right)(١) = \frac{-١}{٢} \neq ٠$ ∴ $(\text{أ}^{-١})^{-١}$ له وجود.

∴ $(\text{أ}^{-١})^{-١} = \frac{١}{\frac{-١}{٢}} \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-٣}{٢} \\ -١ & -٢ \end{pmatrix} = -٢ \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-٣}{٢} \\ -١ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} = \text{أ}$

٢ ∵ $\text{أب} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & ٢ \\ -٨ & ٢ \end{pmatrix}$

∴ $|\text{أب}| = \begin{vmatrix} -٧ & ٢ \\ -٨ & ٢ \end{vmatrix} = (-٧)(٢) - (٢)(-٨) = ٢ \neq ٠$ ∴ $(\text{أب})^{-١}$ له وجود.

∴ $(\text{أب})^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٨ & -٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & \frac{-٧}{٢} \end{pmatrix}$ (١)

، ∵ $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = (٢)(١) - (-١)(-٣) = -١$ ∴ $\text{ب}^{-١}$ له وجود.

$\therefore \text{ب}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ ، $\because \text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $(\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

حاول بنفسك

باستخدام المصفوفتين أ ، ب فى المثال السابق أثبت أن : $(\text{أ}^{-1}\,\text{ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}$

ملاحظة

إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ بحيث $|\text{أ}| \neq 0$ ، ج مصفوفة أخرى وكان :

١ $\boxed{\text{أ}\,\text{س} = \text{ج}}$ فإن : $\boxed{\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ج}}$

وذلك : بضرب طرفى المعادلة × أ^{-1}

$\therefore \text{أ}^{-1}\,\text{أ}\,\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ج}$ $\therefore I\,\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ج}$ $\therefore \text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ج}$

لاحظ أن

$\text{أ}^{-1}\,\text{أ} = I$ ، $I\,\text{س} = \text{س}$

٢ $\boxed{\text{س}\,\text{أ} = \text{ج}}$ فإن : $\boxed{\text{س} = \text{ج}\,\text{أ}^{-1}}$

مثال ٤

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \text{س} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

الحل

بفرض أن : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{أ}\,\text{س} = \text{ج}$ $\therefore \text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ج}$

، $\because |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (2)(0) - (-1)(3) = 3 \neq 0$

$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

حاول بنفسك

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $\text{س} \times \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

حل معادلتين آنيتين باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

لحل المعادلتين الخطيتين على الصورة : $\text{أ}_١ \text{س} + \text{ب}_١ \text{ص} = \text{حـ}_١$ ، $\text{أ}_٢ \text{س} + \text{ب}_٢ \text{ص} = \text{حـ}_٢$
آنيًا باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة نتبع الآتى :

١ نكتب المعادلتين على صورة المعادلة المصفوفية :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{حـ}_١ \\ \text{حـ}_٢ \end{pmatrix}}$$ أى على الصورة $\boxed{\text{أ} \text{س} = \text{ج}}$

حيث $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات

، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المجاهيل ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} \text{حـ}_١ \\ \text{حـ}_٢ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت.

٢ نوجد حل المعادلة المصفوفية : $\text{أ} \text{س} = \text{ج}$ فيكون $\boxed{\text{س} = \text{أ}^{-١} \text{ج}}$

ومن ذلك يمكن استنتاج قيم المجهولين س ، ص

مثال ٥

حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

١ $٢\text{س} + ٣\text{ص} = ٧$ ، $\text{س} - \text{ص} = ١$ ٢ $\text{س} = ٢\text{ص} - ١$ ، $٣\text{ص} = ٢\text{س}$

الحل

١ المعادلة المصفوفية هى : $\text{أ} \text{س} = \text{ج}$ حيث :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} \text{ ، } \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \text{ ، } \text{ج} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\because \Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = (٢)(-١) - (٣)(١) = -٥ \neq ٠$$

$\therefore$ للمصفوفة أ معكوس ضربى هو $\text{أ}^{-١}$ $\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٥}\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{-٢}{٥} \end{pmatrix}$

، $\because \text{س} = \text{أ}^{-١} \text{ج}$ $\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{-٢}{٥} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ $\therefore \text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ١$ وتكون مجموعة الحل = $\{(٢ ، ١)\}$

٢ $\text{س} - ٢\text{ص} = -١$ ، $٢\text{س} - ٣\text{ص} = ٠$

المعادلة المصفوفية هى : $\text{أ} \text{س} = \text{ج}$ حيث : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

$\because \Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = (١)(-٣) - (-٢)(٢) = ١ \neq ٠$ $\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

، $\because \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$ $\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ $\therefore$ س = ٣ ، ص = ٢ وتكون مجموعة الحل = {(٣ ، ٢)}

حاول بنفسك

حل نظام المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة : س + ٢ ص = ٤ ، ص = ٢ س + ٧

مثال ٦

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = أ $\text{س}^{٢}$ + ب يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (-١ ، -٣)

استخدم المصفوفات لإيجاد قيمتي الثابتين : أ ، ب

الحل

$\because$ منحنى الدالة د يمر بالنقطة (٢ ، ٠) $\therefore$ د (٢) = ٠

$\therefore$ أ × $(٢)^{٢}$ + ب = ٠ $\therefore$ ٤ أ + ب = ٠ (١)

، $\because$ منحنى الدالة د يمر بالنقطة (-١ ، -٣) $\therefore$ د (-١) = -٣

$\therefore$ أ × $(-١)^{٢}$ + ب = -٣ $\therefore$ أ + ب = -٣ (٢)

ولحل المعادلتين (١) ، (٢) نكتب المعادلة المصفوفية :

أ س = ج حيث : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix}$

فيكون س = $\text{أ}^{-١}$ ج

، $\because \Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٤ \times ١ - ١ \times ١ = ٣$

$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٣} \\ \frac{-١}{٣} & \frac{٤}{٣} \end{pmatrix}$ $\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٣} \\ \frac{-١}{٣} & \frac{٤}{٣} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٤ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٤ \end{pmatrix}$ $\therefore$ أ = ١ ، ب = -٤

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

تمارين 5

على المعكوس الضربى للمصفوفة

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا   من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربى ؟

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(٢) أى من المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ؟

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(٣) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى   فإن : س = ...

(أ) −٢   (ب) صفر   (جـ) ٢   (د) ٣

(٤) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ \text{س} - 4 & -4 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى هى ....

(أ) −٨   (ب) −١٠   (جـ) ٨   (د) ١٠

(٥) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} & 8 \\ 2 & \text{س} \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى   فإن : س = ...

(أ) ٤   (ب) −٤   (جـ) صفر   (د) ± ٤

(٦) المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{أ} & 12 \\ 3 & \text{أ} \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى عندما ....

(أ) أ = ٦   (ب) أ = ± ٦

(جـ) أ ∈ ح − {٦}   (د) أ ∈ ح − {−٦ ، ٦}

(٧) المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} + 3 & 0 \\ 2 & \text{س} - 3 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى عندما س = ...

(أ) ٣   (ب) ± ٣   (جـ) ٥   (د) ± ٥

(٨) المعكوس الضربى للمصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ يساوى ....

(أ) I (ب) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

(٩) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}^{-1} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} 1 & \text{أ} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ فإن : $\text{س}^{-1} =$ ....

(أ) س (ب) $\text{س}^{\text{مد}}$ (جـ) I (د) $\boxed{}$

(١١) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وكانت $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \text{س} & 3 \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٥ (د) −٥

(١٢) إذا كانت : $\text{أ} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = I$ فإن : أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(١٣) إذا كان حاصل ضرب المصفوفتين $\text{أ} \times \text{ب} = I$ وكانت المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
فإن المصفوفة ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

(١٤) إذا كانت : $\text{س} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (جـ) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (د) $3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(١٥) إذا كان : $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & \text{س} \end{pmatrix} = I$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) إذا كانت : $\text{أ} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = I$ فإن : ٣ أ = ...

(أ) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (جـ) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(١٧) إذا كانت : $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}\,\text{ب} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

(١٨) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ وكان $أ = أ^{-١} \times ب$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & -٧ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٨ & -٧ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٨ & ٧ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٨ & ٧ \\ ٤ & ٤ \end{pmatrix}$

(١٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & س \\ -٢ & ص \end{pmatrix}$ وكان : $أ \times أ^{-١} = أ^{٢}$ فإن : س × ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) -٣

(٢٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} س = \begin{pmatrix} س + ص & س \\ س & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & س \\ س & ص \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} س & س \\ ص & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ص & س \\ س & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ص & س \\ ص & ٠ \end{pmatrix}$

(٢١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ ك & ١ \end{pmatrix}$ وكان : $أ^{٢} = -أ$ فإن : ك = ... حيث $ك \in ص$

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) ٣

(٢٢) إذا كان : $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٦ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٣) عند حل المعادلتين : أ س + ب ص = ٥ ، حـ س + ء ص = -١ وجد أن المصفوفة $\begin{pmatrix} ب & أ \\ ء & حـ \end{pmatrix}$ معكوسها الضربى هو $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) ٩ (د) -٣

(٢٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٨ & -٥ \end{pmatrix}$ ، $أ^{-١} + (أ^{مد})^{مد} = س$ فإن المصفوفة س = ...

(أ) ٤ أ (ب) ٢ I (جـ) ٦ I (د) ١٠ I

(٢٥) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ وكان $أ^{-١} + ب^{مد} = أ^{مد}$ فإن المصفوفة ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٦ & -١ \\ ١ & -٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٥ & ١ \\ ١ & -٥ \end{pmatrix}$

(٢٦) إذا كانت : $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان $أ \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$ فإن : ص - س = ...

(أ) ١٧ (ب) -١٧ (جـ) ٧ (د) -٧

(٢٧) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : $\frac{١}{٤} (أ + أ^{-١}) =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٨) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$ وكان : ب = أ$^{-١}$ × أ^{مد} فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٥ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٩ & ٤ \\ ٧ & -٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٩ & ٢ \\ ٧ & -٣ \end{pmatrix}$

(٢٩) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من نفس النظم بحيث كان : أ ب = ب$^{-١}$

فإن : أ$^{-١}$ = ...

(أ) أ ب (ب) ب أ (جـ) أ^{٢} (د) ب^{٢}

(٣٠) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان فإن : (أ ب)$^{-١}$ أ = ...

(أ) أ$^{-١}$ (ب) ب$^{-١}$ (جـ) أ$^{-١}$ ب$^{-١}$ أ (د) أ ب أ$^{-١}$

(٣١) إذا كان : أ س ب = جـ فإن : س = ...

(أ) أ$^{-١}$ جـ ب$^{-١}$ (ب) أ جـ ب (جـ) ب$^{-١}$ جـ أ$^{-١}$ (د) أ$^{-١}$ ب$^{-١}$ جـ

(٣٢) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان مربعتان بحيث | أ | ≠ ٠ ، | ب | ≠ ٠ وكان : ب = − أ$^{-١}$ ب أ

فإن : (أ + ب)^{٢} = ...

(أ) أ^{٢} + ب^{٢} (ب) $\boxed{}$ (جـ) أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} (د) أ + ب

(٣٣) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ | = ١ فإن : ....

(أ) أ = − أ (ب) أ = − I (جـ) أ = أ$^{-١}$ (د) أ$^{-١}$ = − أ

(٣٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -جا\,\theta & جتا\,\theta \\ جتا\,\theta & جا\,\theta \end{pmatrix}$ فإن :

أولًا : أ لها معكوس ضربي عندما θ ∈ ....

(أ) $[٠ ، \frac{\pi}{٤}]$ (ب) $[\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢}]$ (جـ) $[٠ ، \frac{٣\pi}{٢}]$ (د) ح

ثانيًا : أ$^{-١}$ = ...

(أ) − أ (ب) أ^{مد} (جـ) − أ^{مد} (د) أ

(٣٥) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ ب | = ٩ ، | أ ب$^{-١}$ | = ٤

فإن : | أ | + | ب | يمكن أن تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{١٣}{٢}$ (د) $\frac{١٥}{٢}$

(٣٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة $أ^{ن}$ حيث $ن \in ص^{+}$ هو ....

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ن & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ن \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -ن & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ن \end{pmatrix}$

(٣٧) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث | أ | ≠ ٠ وكان : $أ^{٥} = I$ فإن : $أ^{-١}$ = ...

(أ) $أ^{٢}$ (ب) $أ^{٣}$ (جـ) $أ^{٤}$ (د) أ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بين المصفوفات التى لها معكوسات ضربية والمصفوفات التى ليس لها معكوسات ضربية فيما يلى وأوجد المعكوس إن وجد :

(١) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ٤ & ٤ \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} س & -ص \\ س & -ص \end{pmatrix}$ حيث س ص ≠ ٠

٢ ما قيم أ الحقيقية التى تجعل لكل من المصفوفات الآتية معكوسًا ضربيًا :

(١) $\begin{pmatrix} أ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} أ & ٩ \\ ٤ & أ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} أ & ٤ \\ ٣ & أ - ١ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} أ - ١ & -٢ \\ ١ & أ - ٢ \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} ٨ & أ - ٣ \\ أ + ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} أ & ت \\ ت & -١ \end{pmatrix}$ حيث $ت^{٢} = -١$

٣ أوجد قيم س الحقيقية التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٢٧ \\ ٣ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى. «± ٩»

٤ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

فأثبت أن : المصفوفة ب معكوس ضربى للمصفوفة أ

٥ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $س^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

٦ إذا كانت : ب = $\begin{pmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $ب^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$

علمًا بأن : س ص ≠ ٠ .

٧ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ٠ & ب \end{pmatrix}$ حيث أ ب ≠ ٠ .

أثبت أنه لكل من المصفوفات س ، ص ، س ص معكوس ضربى وأوجده.

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

٨ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :**

(١) $(\text{س ص})^{-١} = \text{ص}^{-١}\ \text{س}^{-١}$ (٢) $(\text{س}^{-١})^{-١} = \text{س}$

(٣) $(\text{س}^{-١}\ \text{ص})^{-١} = \text{ص}^{-١}\ \text{س}$

---

٩ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $(\text{أ}^{\text{مد}})^{-١} = (\text{أ}^{-١})^{\text{مد}}$

---

١٠ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & \text{س} \\ \text{ص} & ٤ \end{pmatrix}$ وكان : س ص = ٧ **أثبت أن :** $\text{أ} + \text{أ}^{-١} = ٦\ I$

---

١١ إذا كانت : ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، أ ب = I **فأوجد :** المصفوفة أ

---

١٢ **أوجد المصفوفة أ في كل مما يأتي :**

(١) أ $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (٢) أ $\begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٢٣ \\ ٨ & ١٣ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ أ $= \begin{pmatrix} ٣ & ١٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

---

١٣ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أ ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** المصفوفة ب

---

١٤ إذا كان : $(\text{أ ب})^{-١} = \frac{١}{٧} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ وكانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** $\text{ب}^{-١}$

---

١٥ **حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :**

(١) ٣ س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٣

(٢) ٢ س − ٧ ص = ٣ ، س − ٣ ص = ٢

(٣) ٣ س + ٢ ص − ١ = ٠ ، س = ٣ ص − ٧

(٤) $\frac{١}{٢}$ س − ص = −١ ، س + $\frac{١}{٣}$ ص = ٥

---

١٦ باستخدام المصفوفات أوجد عددين مجموعهما ١٠ والفرق بينهما ٤ «٧ ، ٣»

---

١٧ نصف الفرق بين عددين هو ٢ ومجموع العدد الأكبر وضعف الأصغر هو ١٣ باستخدام المصفوفات أوجد العددين. «٧ ، ٣»

١٨ باستخدام المصفوفات أوجد محيط المستطيل الذى طوله يزيد عن ضعف عرضه بمقدار ٢ سم

وضعف طوله يزيد عن عرضه بمقدار ١٣ سم «٢٢ سم»

١٩ إذا كان : ٣ ، −١ هما جذرا المعادلة : أس^{٢} + ب س − ٣ = ٠

فاستخدم المصفوفات فى إيجاد قيمتى الثابتين : أ ، ب «١ ، −٢»

٢٠ يمر المنحنى : ص = أ س^{٢} + ب س بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٨)

استخدم المصفوفات لإيجاد الثابتين : أ ، ب «٢ ، −٦»

٢١ الخط المستقيم الذى معادلته : ص + أ س = حـ يمر بالنقطتين (١ ، ٥) ، (٢ ، ١)

استخدم المصفوفات لإيجاد قيمة كل من الثابتين : أ ، حـ «٤ ، ٩»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٢ × ٢ فإن : أ$^{-١}$ تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة.

(جـ) مصفوفة قطرية. (د) غير موجودة.

(٢) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} س & ١ \\ ص & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : أ = ٣ أ$^{-١}$ فإن : س + ص = ...

(أ) −٣ (ب) −٥ (جـ) −٧ (د) −٩

(٣) إذا كانت المصفوفة ب هى المعكوس الضربى للمصفوفة أ فإن ....

(أ) أ + ب = $\boxed{}$ (ب) أ ب = I (جـ) أ ب = $\boxed{}$ (د) أ = $\frac{١}{ب}$

(٤) إذا كانت : أ مصفوفة مربعة وكان أ^{٢} = I فإن : أ$^{-١}$ = ...

(أ) $\boxed{}$ (ب) أ (جـ) ٢ أ (د) أ + I

(٥) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & طا \theta \\ -طا \theta & ١ \end{pmatrix}$ فإن :

أولًا : س$^{-١}$ = ...

(أ) حتا$^{٢}\theta$ س (ب) حتا$^{٢}\theta$ س^{مد} (جـ) قا$^{٢}\theta$ س (د) قا$^{٢}\theta$ س^{مد}

ثانيًا : إذا كان : س^{مد} س$^{-١}$ = I فإن : θ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

(٦) إذا كانت سـ مصفوفة مربعة بحيث كان سـ^{٢} + ٥ سـ + ٥ I = $\boxed{}$

فإن المعكوس الضربى للمصفوفة (سـ + ٢ I) يساوى ....

(أ) سـ − ٢ I (ب) سـ + ٣ I (جـ) سـ + ٢ I (د) سـ − ٣ I

(٧) إذا كان : أ^{٢} − أ + I = $\boxed{}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ هى ....

(أ) أ (ب) أ − I (جـ) I − أ (د) أ + I

(٨) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ فأى مما يأتى دائمًا صحيح ؟

(١) إذا كان : أ ب = $\boxed{}$ فإن : أ = $\boxed{}$ أو ب = $\boxed{}$

(٢) إذا كان : أ ب = I فإن : أ = ب$^{-١}$

(٣) (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}

(أ) (١) ، (٢) فقط. (ب) (١) ، (٣) فقط. (جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (٢) فقط.

(٩) إذا كانت أ مصفوفة مربعة وكان أ = أ$^{-١}$ فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(١) أ^{٢} = I (٢) |أ| = ١ (٣) أ مصفوفة قطرية.

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (١) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

تطبيقات حياتية

١ **معرض الكتاب :** ذهبت هدى ومريم إلى معرض القاهرة الدولى للكتاب ، فاشترت هدى من إحدى المكتبات ٥ كتب علمية و ٤ كتب تاريخية ودفعت ثمنًا لهم مبلغ ١٢٠ جنيهًا ، واشترت مريم من نفس المكتبة ٥ كتب علمية ، ١٠ كتب تاريخية ، ودفعت ثمنًا لهم مبلغ ١٥٠ جنيهًا ، فإذا كانت الكتب العلمية لها نفس الثمن ، وكذلك الكتب التاريخية لها نفس الثمن ، استخدم المصفوفات فى إيجاد سعر كل من الكتاب العلمى والكتاب التاريخى. «٢٠ ، ٥»

٢ **الربط بالمستهلك :** اشترت أمل ٨ كجم من الدقيق ، ٢ كجم من الزبد ، بمبلغ ١٤٠ جنيهًا ، واشترت صديقتها ريم ٤ كيلو جرامات من الدقيق ، ٣ كيلو جرامات من الزبد بمبلغ ١٧٠ جنيهًا ، استخدم المصفوفات فى إيجاد سعر الكيلو جرام الواحد من كلا النوعين. «٥ ، ٥٠»

٣ **الربط بالحياة :** يشترى سائق دراجة بخارية ٢٤ لترًا من البنزين و ٥ لترات من الزيت بمبلغ ٥٦ جنيهًا لتموين دراجته ، بينما يشترى سائق دراجة بخارية أخرى ١٨ لترًا من البنزين ، ١٠ لترات من الزيت بمبلغ ٦٧ جنيهًا لتموين دراجته ، استخدم المصفوفات فى إيجاد ثمن كل من لتر البنزين ولتر الزيت ، إذا علمت أنهما يستخدمان نفس النوعية من البنزين والزيت. «$١\frac{١}{٢}$ ، ٤»

نشاط تكنولوجى على الوحدة الأولى

استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى المصفوفة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية التى تدعم المصفوفات فى العديد من العمليات التى تتعلق بالمصفوفات مثل :

* إيجاد مدور المصفوفة.
* إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
* إيجاد قيمة محدد المصفوفة.
* إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة.

وما نعرضه هنا سيكون باستخدام الآلة من النوع (*CASIO fx-991ES PLUS*)

أولًا : إدخال المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٧ & ٠ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$:

• اضغط على أزرار الآلة بالتتابع التالى من اليسار إلى اليمين :

MODE 6 1 5 ⟵

وذلك لاختيار مصفوفة من النظم ٢ × ٢

ثم أدخل عناصر المصفوفة أ بالضغط على الأزرار بالتتابع التالى :

(−) 7 = 0 = ⟵ إدخال عناصر الصف الأول

4 = 7 = ⟵ إدخال عناصر الصف الثانى

ثانيًا : إدخال المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} -٨ & ٤ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$:

• اضغط على أزرار الآلة بالتتابع التالى من اليسار لليمين :

SHIFT [MATRIX] 4 2 2 5 ⟵

لاختيار مصفوفة أخرى من النظم ٢ × ٢

ثم أدخل عناصر المصفوفة ب بالضغط على الأزرار بالتتابع التالى :

(−) 8 = 4 = ⟵ إدخال عناصر الصف الأول

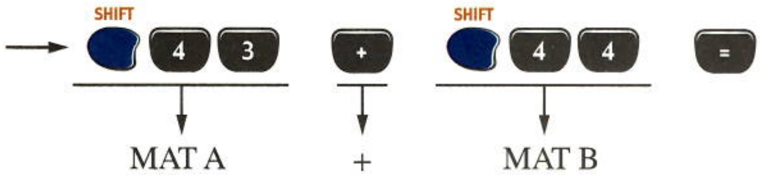
0 = 7 = AC ⟵ إدخال عناصر الصف الثانى

وهكذا نكون أدخلنا المصفوفتين أ ، ب ويمكن إجراء بعض العمليات عليهما كالتالى :

١ لإيجاد أ^{مد} اضغط الأزرار بالتتابع من اليسار لليمين :

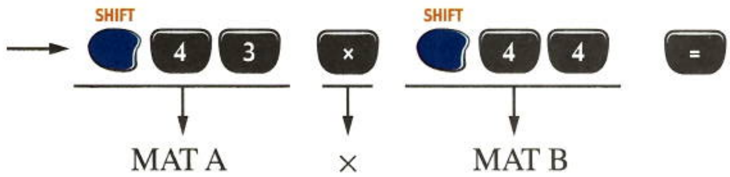
ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٤ & ٧- \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix}$ التى تمثل أ^{مد}

٢ لإيجاد أ + ب اضغط الأزرار بالتتابع التالى من اليسار لليمين :



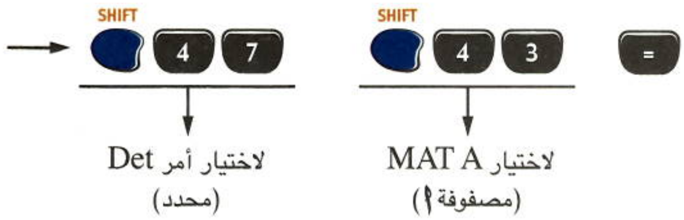
ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٤ & ١٥- \\ ١٤ & ٤ \end{pmatrix}$ والتى تمثل أ + ب

٣ لإيجاد أب اضغط الأزرار بالتتابع التالى من اليسار لليمين :



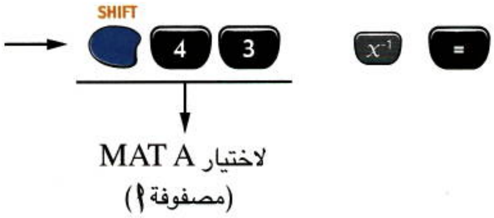
ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢٨- & ٥٦ \\ ٦٥ & ٣٢- \end{pmatrix}$ والتى تمثل أب

٤ لإيجاد قيمة محدد المصفوفة أ اضغط الأزرار بالتتابع التالى من اليسار لليمين :



سيظهر لك على الشاشة –٤٩ والذى يمثل قيمة محدد المصفوفة أ

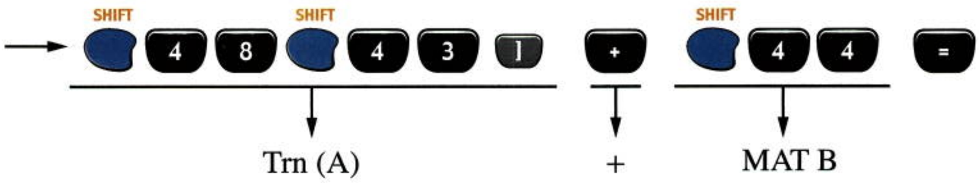
٥ لإيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ اضغط الأزرار بالتتابع التالى من اليسار لليمين :



ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -\frac{١}{٧} & ٠ \\ \frac{٤}{٤٩} & \frac{١}{٧} \end{pmatrix}$ والتى تمثل المعكوس الضربى للمصفوفة أ

---

٦ لإيجاد $\text{أ}^{\text{مد}}$ + ب اضغط الأزرار بالتتابع التالى من اليسار لليمين :



ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -١٥ & ٨ \\ ٠ & ١٤ \end{pmatrix}$ والتى تمثل $\text{أ}^{\text{مد}}$ + ب

حاول بنفسك

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كل مما يأتى :

$\text{ب}^{\text{مد}}$ ، أ − ب ، ب أ ، محدد ب ، المعكوس الضربى للمصفوفة ب

، أ + $\text{ب}^{\text{مد}}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}}$ ب ، ب $\text{أ}^{\text{مد}}$

الوحدة 2

البرمجة الخطية

دروس الوحدة

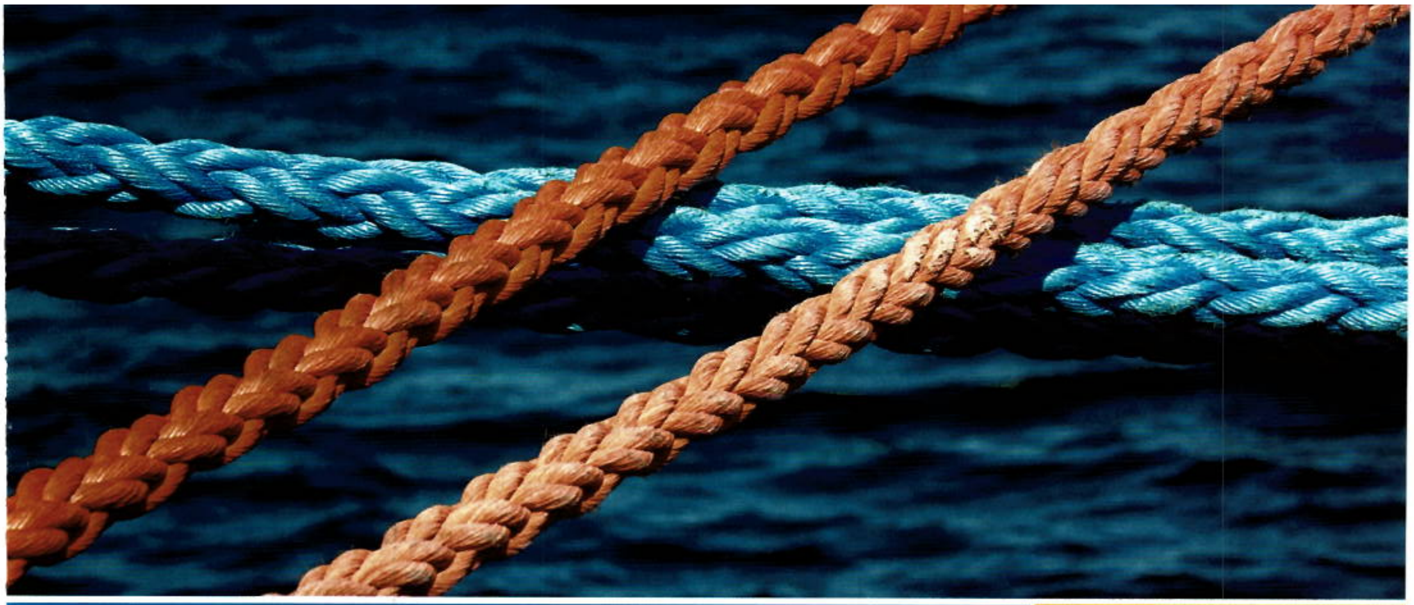
الدرس 1 المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا.

الدرس 2 البرمجة الخطية والحل الأمثل.

نواتج التعلُّم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهول واحد مع تمثيل الحل بيانيًا.
- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهولين وتحديد منطقة الحل بيانيًا.
- يحل نظامًا من المتباينات الخطية بيانيًا.
- يحل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.
- يستخدم البرمجة الخطية فى حل مشكلات رياضية حياتية.
- يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب ، ويترجم البيانات لها فى صورة متباينات خطية ، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًا.
- يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات ، مع تحديد النقط التى تنتمى إلى مجموعة الحل وإعطاء الحل الأمثل لدالة الهدف.



الدرس 1

المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيا

تذكر خواص علاقة التباين فى ح :

بفرض أن ٱ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية :

- إذا كان : ٱ ≥ ب فإن : ٱ + حـ ≥ ب + حـ سواء كانت **حـ موجبة أو سالبة**
- إذا كان : ٱ ≥ ب فإن : ٱ حـ ≥ ب حـ إذا كانت **حـ موجبة**
- إذا كان : ٱ ≥ ب فإن : ٱ حـ ≤ ب حـ إذا كانت **حـ سالبة**

- يمكنك استنتاج الخواص السابقة فى حالة علامات التباين الأخرى «≤ ، > ، <»

حل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد بيانيًا

* كل من المتباينات : ٣ س > ٥ ، ٤ − س ≤ ٢ س ، ٣ ≥ س < ٦ تسمى متباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد.
* حل المتباينة معناه إيجاد جميع عناصر مجموعة التعويض التى تحقق المتباينة.
* وقد تكون مجموعة التعويض هى ح أو ح × ح

، وفيما يلى نوضح كيفية حل المتباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى كلتا الحالتين.

مثال توضيحى

وضح بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ٣ س + ١٠ > ١

١ إذا كانت مجموعة التعويض هى ح

٢ إذا كانت مجموعة التعويض هى ح × ح

الحــل

٣ س + ١٠ > ١

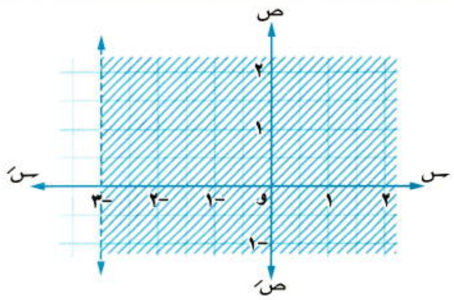
∴ ٣ س > −٩

∴ س > −٣

١ إذا كانت مجموعة التعويض هى ح تمثل مجموعة الحل على خط الأعداد

- مجموعة الحل هى جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من −٣
- مجموعة الحل تمثل الجزء من خط الأعداد الذى يقع يمين العدد −٣
- وجود حلقة مفرغة عند −٣ يعنى أنها ليست متضمنة فى مجموعة الحل.

٢ إذا كانت مجموعة التعويض هى ح × ح تمثل مجموعة الحل على الشبكة التربيعية



- مجموعة الحل هى جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها السينى أكبر من −٣
- مجموعة الحل هى المنطقة التى تقع على يمين الخط المستقيم : س = −٣ (وتسمى نصف المستوى).
- رسم المستقيم س = −٣ بشكل متقطع يشير أن مجموعة نقاط هذا المستقيم ليست متضمنة فى مجموعة الحل.

مثـــال ١

وضح بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٥ س − ٧ ≥ ٢ س − ١ فى ح × ح

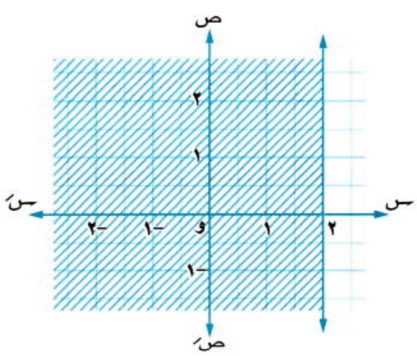
الحــل

∵ ٥ س − ٧ ≥ ٢ س − ١

∴ ٥ س − ٢ س ≥ −١ + ٧

∴ ٣ س ≥ ٦

∴ س ≥ ٢



لاحظ أن

١ المنطقة المظللة على يسار المستقيم س = ٢ لأن علاقة التباين أصغر من.

٢ المستقيم س = ٢ رسم متصلًا لاحتواء علاقة التباين على علامة التساوى أى ≤

مثال ٢

وضح بيانيًا مجموعة حل المتباينة : س − ١ ≤ ٤ س + ٥ < س + ١٧ حيث س ∈ ح

الحل

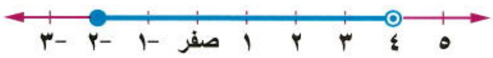
∵ س − ١ ≤ ٤ س + ٥ < س + ١٧

∴ −١ ≤ ٣ س + ٥ < ١٧

∴ −٦ ≤ ٣ س < ١٢

∴ −٢ ≤ س < ٤

∴ م.ح = [−٢ ، ٤[



مثال ٣

أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينة :

٢ س − ٢ ≤ ٣ س − ١ < س + ٥ حيث س ∈ ح

الحل

بتجزئة المتباينة إلى متباينتين كالتالى :

٢ س − ٢ ≤ ٣ س − ١

∴ ٢ س − ٣ س ≤ −١ + ٢

∴ − س ≤ ١

∴ س ≥ −١

∴ م.ح = [−١ ، ∞[

٣ س − ١ < س + ٥

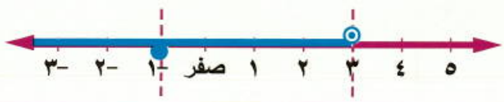
∴ ٣ س − س < ٥ + ١

∴ ٢ س < ٦

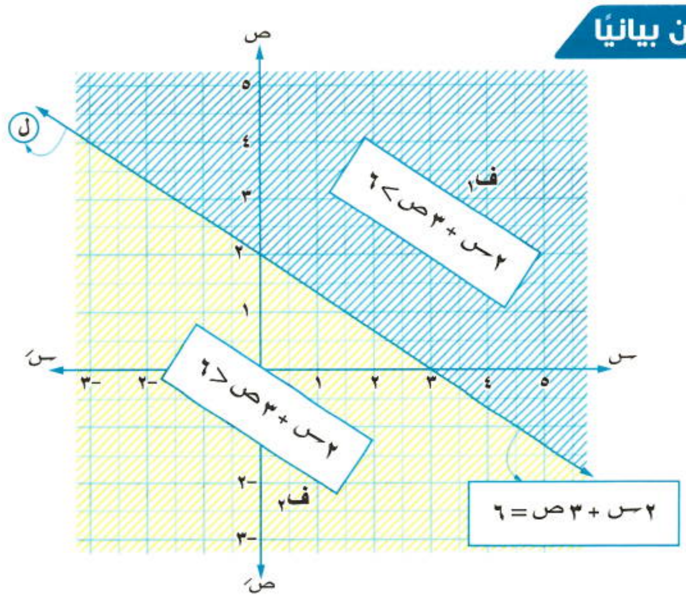
∴ س < ٣

∴ م.ح =]−∞ ، ٣[

∴ مجموعة حل المتباينة الأصلية = [−١ ، ∞[∩]−∞ ، ٣[= [−١ ، ٣[



حل متباينة الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا



* من المعلوم أنه يمكن تمثيل المعادلة الخطية :

٢ س + ٣ ص = ٦ بيانيًا

بخط مستقيم كالتالى :

س	٠	٣
ص	٢	٠

«ويمكن أخذ زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة الرسم»

* نلاحظ من الرسم أن هذا المستقيم يجزئ المستوى الكارتيزى إلى ثلاث مجموعات من النقط :

١ مجموعة نقط المستقيم ل (يسمى المستقيم الحدى) والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص = ٦

٢ مجموعة نقط المستوى التى تقع على أحد جانبى المستقيم ل (وتسمى نصف مستوى)

ويرمز لها بالرمز ف$_1$ والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص > ٦

٣ مجموعة نقط المستوى التى تقع على الجانب الآخر من المستقيم ل (وتسمى نصف مستوى أيضًا)

ويرمز لها بالرمز ف$_2$ والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص < ٦

ونستطيع من التوضيح السابق أن نستنتج أن :

- نصف المستوى ف$_1$ هو المنطقة التى تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص > ٦
- نصف المستوى ف$_1$ بالإضافة إلى المستقيم ل تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≥ ٦
- نصف المستوى ف$_2$ هو المنطقة التى تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص < ٦
- نصف المستوى ف$_2$ بالإضافة إلى المستقيم ل تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≤ ٦

خطوات حل متباينة الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا

١ نمثل معادلة المستقيم المرتبطة بالمتباينة

وذلك بخط متصل فى حالة علامة التباين ≤ أ ، ≥ ، وبخط متقطع فى حالة علامة التباين < أ ، >

٢ نحدد نصف المستوى الذى تقع فيه منطقة الحل

وذلك بأخذ أى نقطة (س$_1$ ، ص$_1$) تنتمى إلى أحد نصفى المستوى كنقطة اختبار ونعوض بها فى المتباينة :

- فإن حققتها كانت منطقة الحل تقع فى هذا النصف.
- وإن لم تحققها كانت منطقة الحل تقع فى نصف المستوى الآخر الذى لا تنتمى إليه نقطة الاختبار.

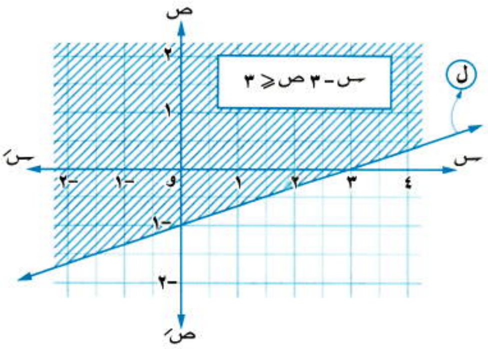
ملاحظة

للتسهيل يمكن اختيار نقطة الأصل (٠ ، ٠) كنقطة اختبار إذا كان المستقيم الحدى لا يمر بنقطة الأصل.

مثال ٤

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : س − ٣ ص ≥ ٣ فى ح × ح

الحل



١ نرسم المستقيم الحدى ل الذى معادلته :

س − ٣ ص = ٣

(بخط متصل لأن علامة التباين ≥)

بالاستعانة بالجدول الآتى :

س	٠	٣
ص	−١	٠

٢ نأخذ نقطة الأصل كنقطة اختبار :

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة : (لأن : ٠ ≥ ٣)

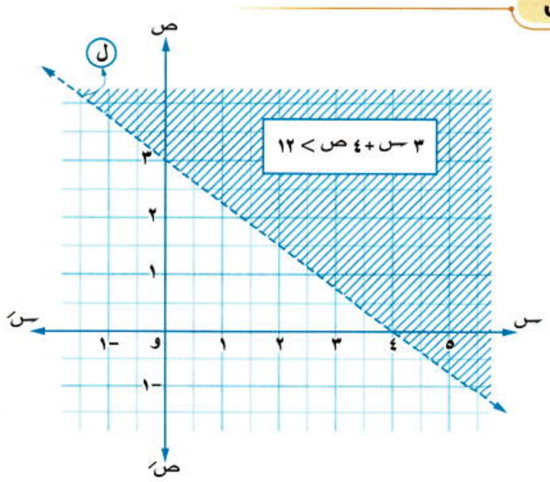
∴ مجموعة الحل للمتباينة هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠) وتمثلها المنطقة المظللة فى الشكل السابق.

[لاحظ أنه يمكننا رسم المستقيم الحدى بدون تكوين الجدول السابق وذلك بالاستعانة بميل المستقيم والجزء المقطوع من محور الصادات كما درسنا فى الأعوام السابقة]

مثال ٥

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٣ س + ٤ ص > ١٢ فى ح × ح

الحل



١ نرسم المستقيم الحدى ل الذى معادلته :

٣ س + ٤ ص = ١٢

(بخط متقطع لأن علامة التباين >)

بالاستعانة بالجدول الآتى :

س	٠	٤
ص	٣	٠

٢ نأخذ نقطة الأصل كنقطة اختبار

، ∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة (لأن : ٠ > ١٢)

∴ مجموعة الحل للمتباينة هى نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠) وتمثلها المنطقة المظللة فى الشكل السابق.

ملاحظات

- المعادلة : ص = ٠ تمثل بيانيًا بمحور السينات.
- المعادلة : س = ٠ تمثل بيانيًا بمحور الصادات.
- المعادلة : ص = أ تمثل بيانيًا بمستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، أ)
- المعادلة : س = أ تمثل بيانيًا بمستقيم يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ٠)
- معادلة المستقيم التى على الصورة : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ تمثل بيانيًا بمستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

حاول بنفسك

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٢ س − ٥ ص ≥ ١٠ فى ح × ح

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا

لإيجاد الحل البيانى لمتباينتين نتبع الآتى :

١ نظلل المنطقة $س_١$ التى تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأولى.

٢ نظلل المنطقة $س_٢$ التى تمثل مجموعة الحل للمتباينة الثانية.

فتكون مجموعة حل المتباينتين معًا تمثلها منطقة التظليل المشتركة س حيث س = $س_١ \cap س_٢$

مثال ٦

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينتين : س + ٣ ص ≥ ٣ ، ٢ س + ص ≥ ٤ فى ح × ح

الحل

١ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$: س + ٣ ص = ٣ (بخط متصل)

س	٠	٣
ص	١	٠

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ > ٣)

∴ المنطقة $س_١$ مجموعة حل المتباينة : س + ٣ ص ≥ ٣

يمثلها $ل_١$ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(١)]

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٢ س + ص = ٤ (بخط متصل)

س	٠	٢
ص	٤	٠

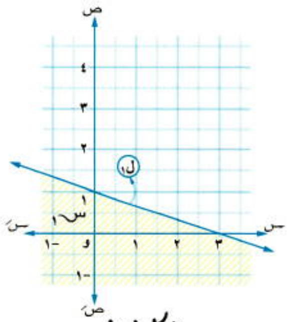
، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ > ٤)

∴ المنطقة $س_٢$ مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ص ≥ ٤

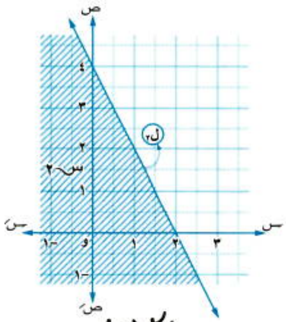
، يمثلها $ل_٢$ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(٢)]

٣ مجموعة حل المتباينتين معًا هي : س = س١ ∩ س٢

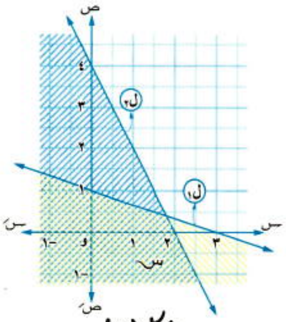
وتمثلها منطقة التظليل المشتركة [شكل(٣)]



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

ملاحظة

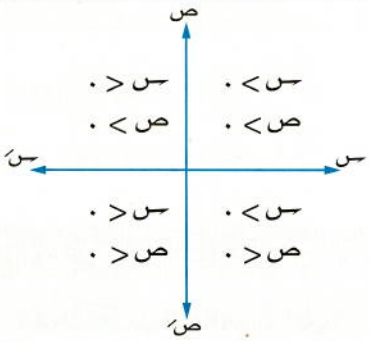
محورا الإحداثيات السيني والصادي يقسمان المستوى إلى ٤ أرباع :

الربع الأول : حيث س > ٠ ، ص > ٠

، الربع الثاني : حيث س < ٠ ، ص > ٠

، الربع الثالث : حيث س < ٠ ، ص < ٠

، الربع الرابع : حيث س > ٠ ، ص < ٠



مثال ٧

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينات :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص + ٣ س ≤ ٩ ، ص − س < ١ في ح × ح

الحل

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ مجموعة الحل لهما يمثلها وس ∪ وص ∪ الربع الأول من المستوى.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل١ : ص + ٣ س = ٩ (بخط متصل)

س	٢	٣
ص	٣	٠

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ٩)

∴ المنطقة س١ مجموعة حل المتباينة : ص + ٣ س ≤ ٩

، يمثلها ل١ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(١)]

٣ نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص − س = ١ (بخط متقطع)

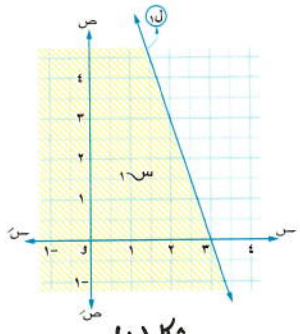
س	٠	−١
ص	١	٠

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ١)

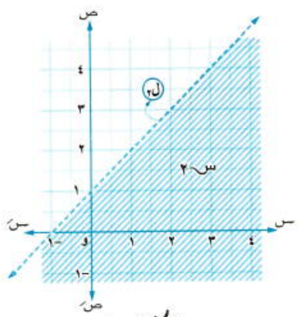
∴ المنطقة س٢ مجموعة حل المتباينة : ص − س < ١

، يمثلها نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(٢)]

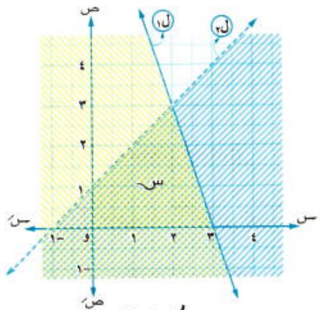
٤ س مجموعة الحل للمتباينات الأربعة تمثلها المنطقة الواقعة فى الربع الأول والمشتركة فى التظليل [**شكل(٣)**]



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

ملاحظة

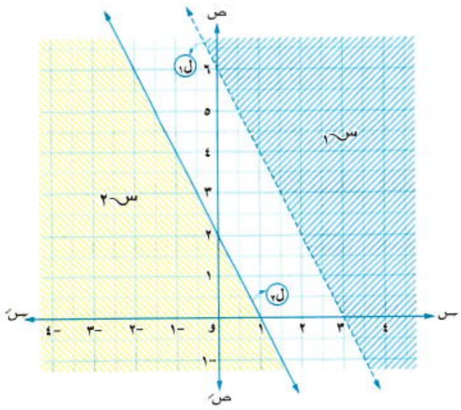
فى المثالين السابقين رسمنا رسمًا منفصلاً لتوضيح منطقة الحل لكل متباينة على حدة ثم جعلنا الشكل الأخير يوضح منطقة الحل لجملة المتباينات ويمكن للطالب بعد قليل من التمرين أن يستغنى عن هذه الأشكال ويكتفى بالشكل الأخير.

مثال ٨

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينتين :

٢ س + ص > ٦ ، ٤ س + ٢ ص ≤ ٤ فى ح × ح

الحل



١ نرسم المستقيم الحدى ل$_{١}$:

٢ س + ص = ٦ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل س$_{١}$ يمثلها نصف المستوى الذى لا تقع فيه نقطة الأصل.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل$_{٢}$: ٤ س + ٢ ص = ٤

(بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (١ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة.

∴ مجموعة الحل س$_{٢}$ يمثلها المستقيم ل$_{٢}$ $\cup$ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

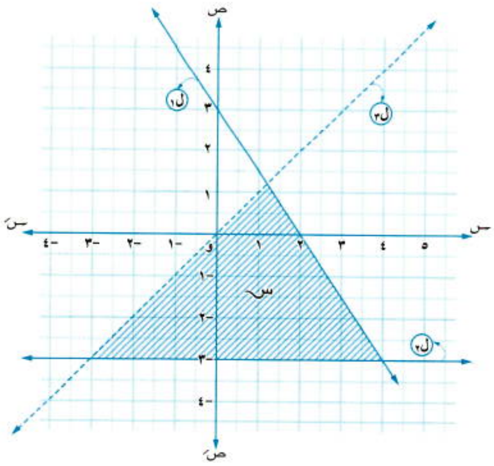
٣ مجموعة حل المتباينتين معًا هى : س = س$_{١}$ $\cap$ س$_{٢}$ = $\varnothing$

مثال ٩

مثل بيانيًا مجموعة الحل لجملة المتباينات الآتية :

٣ س + ٢ ص ≤ ٦ ، ص + ٣ ≥ ٠ ، س − ص > ٠ فى ع × ع

الحل



١ نرسم المستقيم الحدى

ل١ : ٣ س + ٢ ص = ٦ (خط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق

المتباينة (لأن : ٠ < ٦)

∴ مجموعة الحل س~١ يمثلها

المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى

الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص = −٣ (خط متصل)

[مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، −٣)]

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ > −٣)

∴ مجموعة الحل س~٢ يمثلها المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٣ نرسم المستقيم الحدى ل٣ : س − ص = ٠ (خط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)

، ∵ النقطة (٠ ، ٢) لا تحقق المتباينة (لأن : −٢ ≯ ٠)

∴ مجموعة الحل س~٣ يمثلها نصف المستوى الذى لا تقع فيه النقطة (٠ ، ٢)

٤ مجموعة حل المتباينات الثلاث معًا هى : س~ = س~١ ∩ س~٢ ∩ س~٣

وتمثلها المنطقة المظللة.

مثال ١٠

مصنع لإنتاج لعب الأطفال ينتج لعبة على شكل سيارة وأخرى على شكل طائرة يعمل بطاقة إنتاج يومى قدرها ٢٥٠ لعبة على الأكثر فإذا كانت تكلفة إنتاج السيارة الواحدة ١٥ جنيهًا ، تكلفة إنتاج الطائرة الواحدة ١٠ جنيهات والتكلفة الإجمالية للإنتاج اليومى لا تزيد عن ٣٠٠٠ جنيه.

اكتب نظام متباينات خطية يمثل ما سبق ثم مثل بيانيًا منطقة حل هذا النظام.

الحـــل

بفرض عدد السيارات المنتجة س سيارة ، الطائرات ص طائرة.

• نظام المتباينات هو :

١ س ≥ ٠   ٢ ص ≥ ٠   ٣ س + ص ≤ ٢٥٠

٤ ١٥ س + ١٠ ص ≤ ٣٠٠٠ **أى أن** ٣ س + ٢ ص ≤ ٦٠٠

• تعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالى :

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلها و س ∪ و ص ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل١ : س + ص = ٢٥٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٥٠) ، (٢٥٠ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ٢٥٠)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

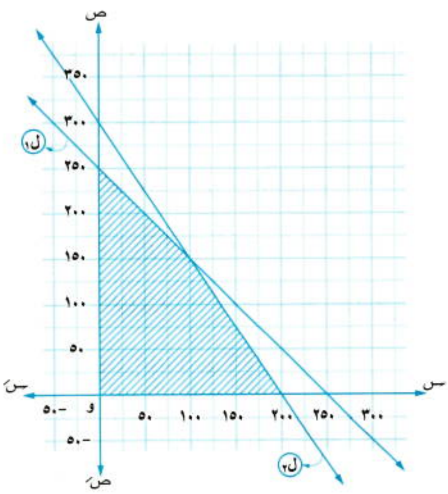
٣ نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٣ س + ٢ ص ≤ ٦٠٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣٠٠) ، (٢٠٠ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

(لأن : ٠ < ٦٠٠)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.



٤ الأزواج المرتبة التى كل من إحداثيها السينى والصادى أعداد صحيحة بالمنطقة المظللة بالشكل البيانى مجموعة الحل لنظام المتباينات المطلوب.

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا - على المتباينة الخطية

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرس

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة : -١ < -س ≤ ١ فى ح هى ....

(أ)]-١ ، ١[(ب) ح -]-١ ، ١[(جـ) {٠ ، ١} (د) [-١ ، ١]

(٢) مجموعة حل المتباينة : ١ ≤ ٢ س - ١ < ٥ فى ح هى ....

(أ) [١ ، ٣] (ب) [١ ، ٣[(جـ)]١ ، ٣] (د)]١ ، ٣[

(٣) الربع الذى يمثل حل نظام المتباينتين : س > ٠ ، ص > ٠ هو ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينتين : ص > ٠ ، س < ٠ فى ح × ح هى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٥) النقطة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينتين : س > ٠ ، ص < ٠ هى ....

(أ) (٠ ، -٣) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، -٣) (د) (٢ ، ٣)

(٦) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين : س > ٢ ، ص > ١ معًا هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٣ ، ٢)

(٧) النقطة التى تقع فى منطقة حل المتباينة : س + ص ≥ ٣ هى ....

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٢ ، -٣) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (١ ، ٤)

(٨) النقطة .... لا تقع فى منطقة حل المتباينة : ٢ س + ص ≤ ٥

(أ) (-١ ، ٦) (ب) (٥ ، -١) (جـ) (١ ، ٤) (د) (٢ ، ٤)

(٩) النقطة (٣ ، ٢) تنتمى لمجموعة حل المتباينة : ٣ س - ص ١

(أ) > (ب) ≥ (جـ) < (د) أ ، ب معًا

(١٠) إذا كانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لمجموعة حل المتباينة س + ص ≥ أ فإن : ....

(أ) أ < ٥ (ب) أ ≤ ٥ (جـ) أ > ٥ (د) أ > ٠

(١١) إذا كانت : (١ ، ص) تنتمى إلى منطقة حل المتباينة : س + ٢ ص > ٧ فإن : ....

(أ) ص > ٣ (ب) ص < ٣ (جـ) ص = ٣ (د) ص < ٧

(١٢) النقطتان (٣ ، ٥) ، (١ ، ٥) تنتميان لمجموعة حل المتباينة : س + ص ٨

(أ) $<$ (ب) $\leq$ (جـ) $>$ (د) $\geq$

(١٣) أى النقط التالية تنتمى إلى مجموعة حل النظام : س > ٠ ، ص > ٠ ، ٢ س + ص < ٦ ؟

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (٤ ، –٢)

(١٤) النقطة التى لا تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س $\leq$ ٢ ، ص $\leq$ ٠ ، س + ص > ٣

هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (٢ ، ١)

(١٥) النقطة التى تنتمى إلى نظام حل المتباينات : س > ٣ ، ص < ١ ، س + ص $\geq$ ٥

هى ....

(أ) (٦ ، –٢) (ب) (١ ، –٢) (جـ) (٤ ، ٤) (د) (٣ ، –٢)

(١٦) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين : ٢ س + ص < ٤ ، س + ٣ ص < ٦ هى ....

(أ) (١ ، –٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (١ ، ٢) (د) (٣ ، –١)

(١٧) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل نظام المتباينات : س $\leq$ ٠ ، ص $\leq$ ٠ ، س + ٢ ص $\leq$ ٤

، ٣ س + ٢ ص $\leq$ ٨ فى ح × ح هى ....

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٣)

(١٨) فى المستوى الديكارتى : المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات : س $\leq$ ٠ ، ص $\leq$ ٠

، س + ص $\geq$ ٤ تكون منطقة ....

(أ) دائرية. (ب) مربعة. (جـ) مثلثة. (د) مستطيلة.

(١٩) فى المستوى الديكارتى : المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات : ١ $\geq$ س $\geq$ ٥ ، ٢ $\geq$ ص $\geq$ ٤

تكون منطقة ....

(أ) دائرية. (ب) مربعة. (جـ) مثلثة. (د) مستطيلة.

(٢٠) مجموعة حل المتباينات : س $\leq$ ٠ ، ص $\leq$ ٠ ، س + ص $\geq$ ٤ تمثل منطقة مثلثة رؤوسها

النقط ....

(أ) (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٤) (ب) (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(جـ) (٤ ، ٤) ، (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠) (د) (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٤ ، ٤)

(٢١) إذا كانت س هى مجموعة حل المتباينة : س + ص $\geq$ ٥ ، ص هى مجموعة حل المتباينة :

س + ص < ٥ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س $\supset$ ص

(جـ) ص $\supset$ س (د) س $\cap$ ص = $\varnothing$

(٢٢) إذا كانت أ هي مجموعة حل المتباينة : س + ص < ٤ ، ب هي مجموعة حل المتباينة : س + ص > ٤

فإن : ....

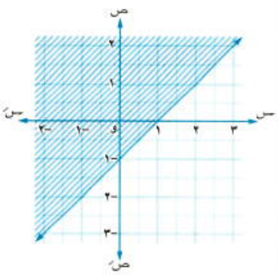
(أ) أ = ب (ب) أ ⊃ ب (جـ) ب ⊃ أ (د) أ ∩ ب = ∅

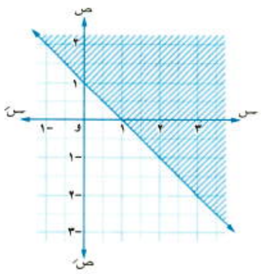
(٢٣) إذا كانت النقط : (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٤) هي رؤوس منطقة حل المتباينات :

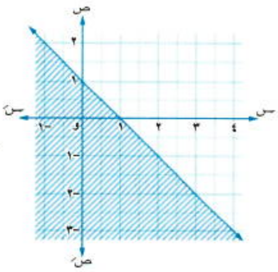
س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢ س + ص ≥ حـ فإن : حـ = ...

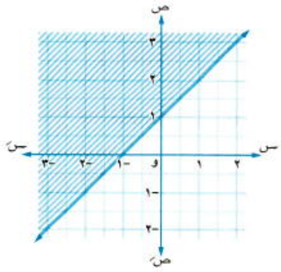
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٤) أي الأشكال الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : س + ص ≤ ١ ؟

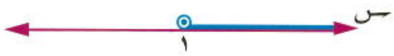

(أ)


(ب)

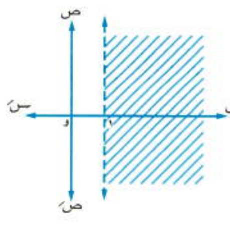

(جـ)

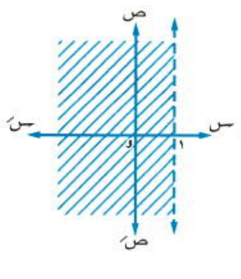

(د)

(٢٥) أي من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل للمتباينة : ٥ − ٢ س < ٣ في ح × ح ؟

(أ)


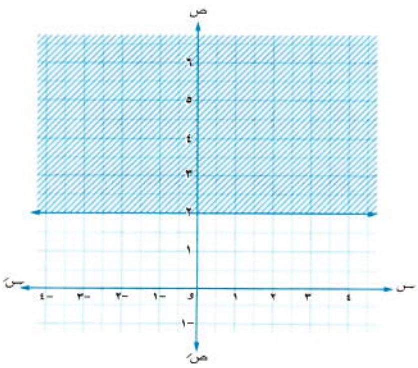
(ب)


(جـ)


(د)


(٢٦) الشكل المقابل يمثل مجموعة

حل المتباينة .... في ح × ح



(أ) ص ≥ ٢

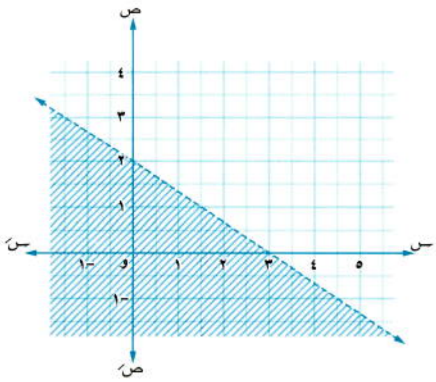
(ب) ص > ٢

(جـ) ص ≤ ٢

(د) ص < ٢

(٢٧) الشكل المقابل يمثل مجموعة

حل المتباينة .... فى ح × ح



(أ) س + ص < ٥

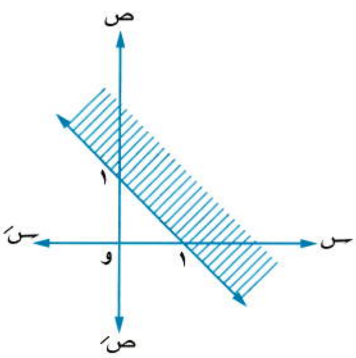
(ب) ٢ س + ٣ ص ≥ ٦

(جـ) ٣ س + ٢ ص < ٦

(د) ٢ س + ٣ ص < ٦

(٢٨) الشكل المقابل يمثل مجموعة

حل المتباينة .... فى ح × ح



(أ) س + ص ≥ ١

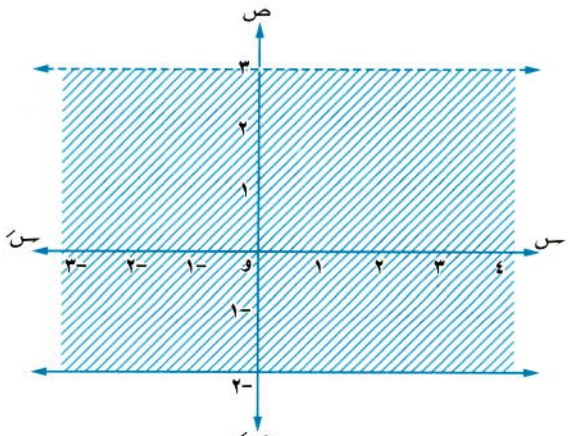
(ب) س + ص ≤ ١

(جـ) س + ص > ١

(د) س − ص < ١

(٢٩) الشكل الآتى يمثل مجموعة

حل المتباينة .... فى ح × ح



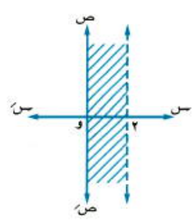
(أ) −٢ ≤ س < ٣

(ب) −٢ < س ≤ ٣

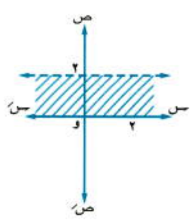
(جـ) −٢ ≤ ص < ٣

(د) −٢ < ص ≤ ٣

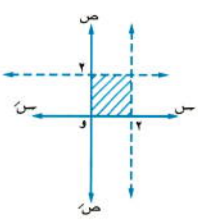
(٣٠) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل للمتباينة : ٠ ≤ س < ٢ فى ح × ح ؟



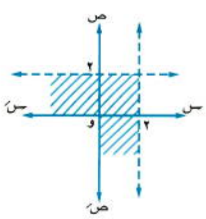
(أ)



(ب)

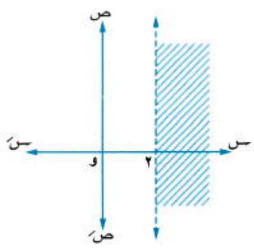


(جـ)

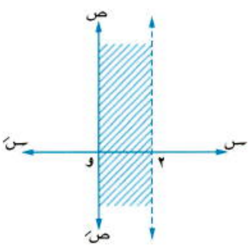


(د)

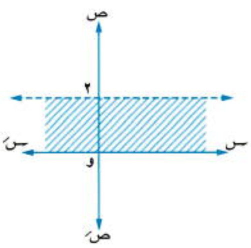
(٣١) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل للمتباينة : ٠ ≤ ص < ٢ فى ح × ح ؟



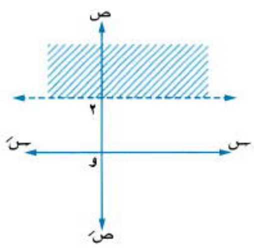
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(٣٢) المنطقة المظللة تمثل مجموعة حل المتباينات :

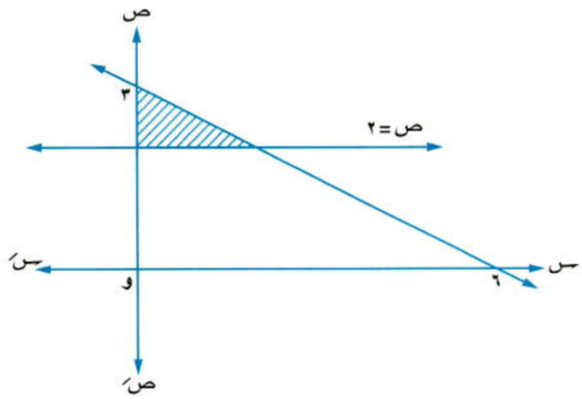
ص ≥ ٢ ، س ≥ ٠ ، ....

(أ) س + ٢ ص − ٦ ≤ ٠ .

(ب) س + ٢ ص + ٦ ≤ ٠ .

(جـ) س + ٢ ص − ٦ ≥ ٠ .

(د) س + ٢ ص + ٦ ≥ ٠ .



(٣٣) الجزء المظلل فى الشكل المقابل يمثل

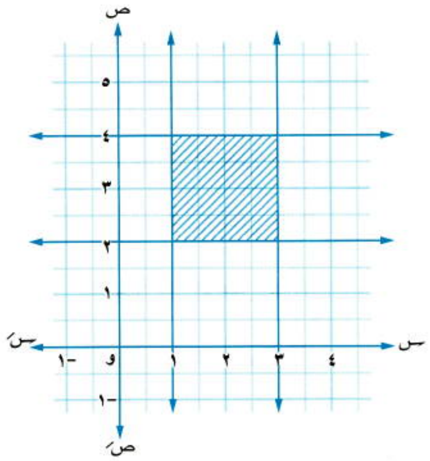
مجموعة حل المتباينات ....

(أ) س > ١ ، ص > ٢

(ب) ١ < س < ٣ ، ٢ < ص < ٤

(جـ) ١ ≤ س ≤ ٣ ، ٢ ≤ ص ≤ ٤

(د) س + ص ≥ ٣ ، س − ص ≤ ٧



(٣٤) الجزء المظلل فى الشكل المقابل

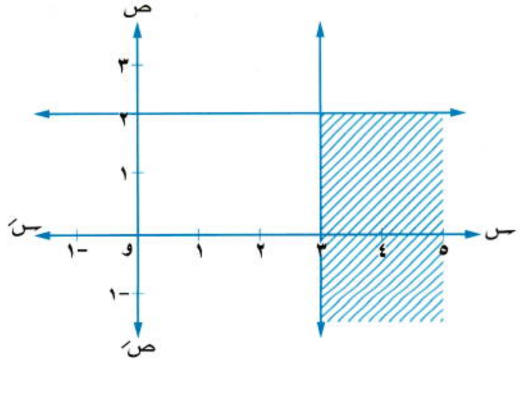
يمثل مجموعة حل المتباينات ....

(أ) س > ٣ ، ص < ٢

(ب) س ≥ ٣ ، ص ≤ ٢

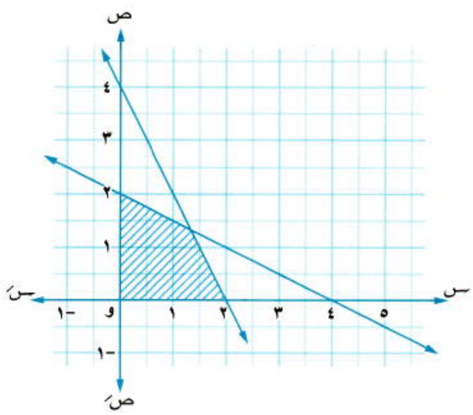
(جـ) س + ١ > ٤ ، ص + ١ < ٣

(د) س + ١ ≥ ٤ ، ٢ ص ≤ ٤



(٣٥) الجزء المظلل فى الشكل المقابل

يمثل مجموعة حل المتباينات ....



(أ) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ٢ ص ≥ ٤

، ٢ س + ص ≥ ٤

(ب) س + ٢ ص ≥ ٤ ، ٢ س + ص ≥ ٤

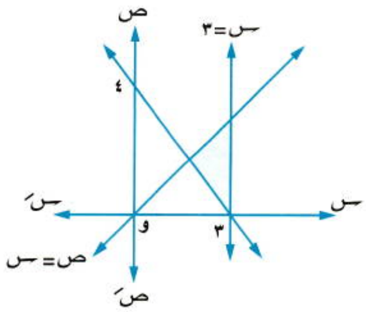
(جـ) س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ٢ ص > ٤

، ٢ س + ص > ٤

(د) ٤ س + ٢ ص ≥ ٠ ، ٢ س + ٤ ص ≥ ٠

(٣٦) المنطقة المظللة فى الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المتباينات

س ≤ ص ، س ≥ ٣ ، ....



(أ) ٤ س + ٣ ص ≤ ١٢

(ب) ٤ س + ٣ ص < ١٢

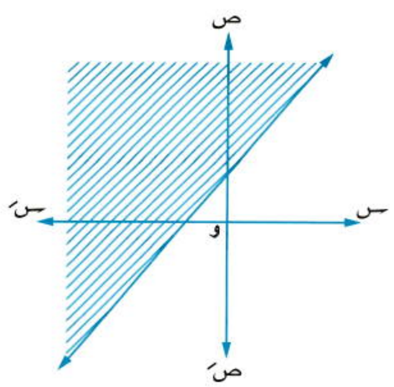
(جـ) ٣ س + ٤ ص ≤ ١٢

(د) ٣ س + ٤ ص + ١٢ ≤ ٠

(٣٧) الجزء المظلل فى الشكل المقابل

يمثل مجموعة حل المتباينة

أ س + ب ص ≥ حـ حيث ....



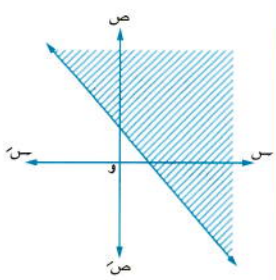
(أ) أ > ٠ ، ب > ٠ ، حـ > ٠

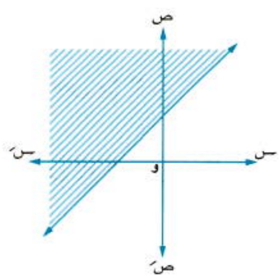
(ب) أ > ٠ ، ب < ٠ ، حـ < ٠

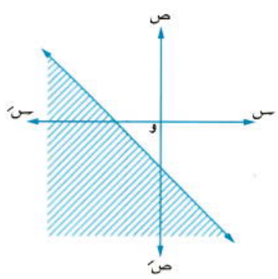
(جـ) أ > ٠ ، ب < ٠ ، حـ > ٠

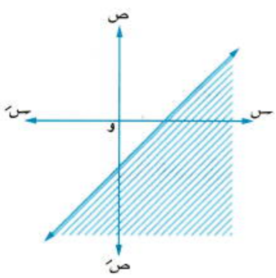
(د) أ < ٠ ، ب > ٠ ، حـ < ٠

(٣٨) أى التمثيلات الآتية تصلح لتمثيل المتباينة : أ س + ب ص ≤ حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ع⁺

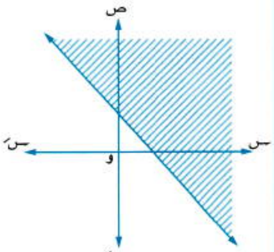

(أ)


(ب)

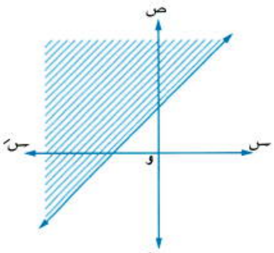

(جـ)


(د)

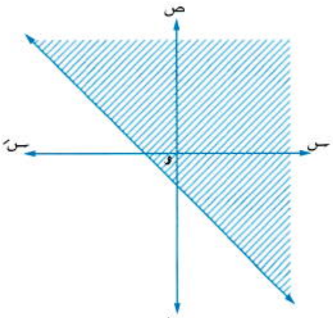
(٣٩) أى التمثيلات الآتية تصلح لتمثيل المتباينة : أ س + ب ص ≤ حـ حيث أ ، ب ∈ $ح^{+}$ ، حـ ∈ $ح^{-}$



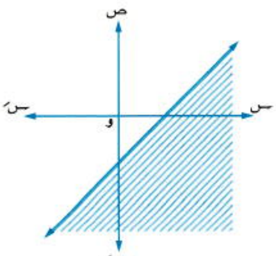
(أ)



(ب)

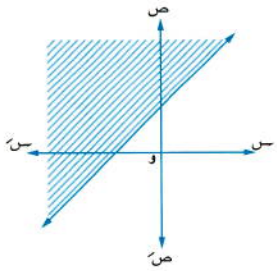


(جـ)

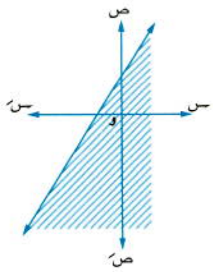


(د)

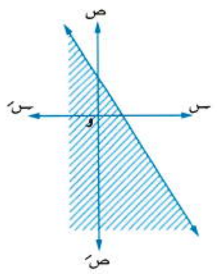
(٤٠) إذا كانت أ ، ب أعداد حقيقية موجبة فإن أنسب تمثيل للمتباينة : ص ≤ أ س + ب هو ....



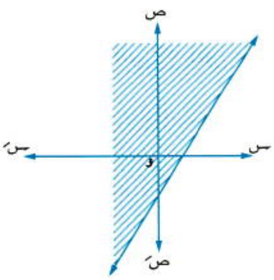
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المتباينات التالية ممثلًا إياها على خط الأعداد :

(١) ٢ س − ٣ ≤ ٥

(٢) ٤ − ٢ س ≤ ٦

(٣) 📖 ٣ س − ٩ < ٦ س

(٤) 📖 ٦ + س < ٣ س + ٢ ≤ ١٤ + س

(٥) ٢ س − ١ < س + ٣ < ٣ س + ٧

---

٢ أوجد مجموعة الحل فى ح × ح لكل من المتباينات التالية بيانيًا :

(١) 📖 ٢ س − ص ≤ ٦

(٢) س + ص < ٣

(٣) س ≤ −٢

(٤) 📖 ص ≤ ٥

(٥) 📖 ص < ٢ س − ٣

(٦) س < ٢ ص − ٤

(٧) ص ≤ ٢ س

(٨) −٢ < س ≤ ٤

(٩) −١ ≤ ص ≤ ٢

٣ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًا فى ح × ح :

(١) س ≤ ١ ، ص < ٣

(٢) س - ٢ > ٠ ، ص < ١

(٣) س ≤ ٠ ، س + ٢ ص < ٤

(٤) -١ ≥ س > ٢ ، ٠ ≥ ص > ٣

(٥) 📖 ص ≤ ٢ س + ٦ ، ص + ٣ س > -١

(٦) ص > س ، س - ص < ١

(٧) ٢ س - ص ≤ ٥ ، ٢ ص ≤ ٢٠ + ٤ س

(٨) س + ص ≥ ٣ ، س - ص < ١

(٩) س > ١ ، س + ص ≥ -١

(١٠) ص > س + ١ ، ص < س - ١

---

٤ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًا فى ح × ح :

(١) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٥

(٢) 📖 س ≥ ٤ ، ص > س + ٢ ، س + ٢ ص ≤ -٢

(٣) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ص ≤ ٧ - ٢ س ، س + ٢ ص ≤ ٨

(٤) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢ س + ص ≥ ٦ ، س + ص ≥ ٤

(٥) 📖 ص - س < ٠ ، ٢ س + ٢ ص ≥ ١٢ ، ص > ٦ + ٢ س

(٦) 📖 س + ٤ ص < ٤ ، ٤ س + ص ≤ ٢ ، س - ص > ١

(٧) ٠ ≥ س ≥ ٥ ، ٠ ≥ ص ≥ ٣ ، س ≤ ص - ١

(٨) س ≥ ٤ ، ص ≥ ٦ ، ٢ ص - س ≤ ٢ ، ص + ٢ س ≤ ٦

(٩) س + ٤ ص > ٨ ، س - ٢ ص > ٦ ، ٠ ≥ س > ٤

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت النقطة (أ ، ب) لا تنتمى لمجموعة حل المتباينة : ٢ س + ص < ٣

فإن ....

(أ) ٢ أ + ب < ٣ (ب) ٢ أ + ب > ٣

(ج) ٢ أ + ب ≥ ٣ (د) ٢ أ - ب < ٣

(٢) أى المتباينات الآتية لا تقع مجموعة حلها فى الربع الثانى أو الثالث ؟

(أ) س < ٠ (ب) س > ٠ (ج) ص < ٠ (د) ص > ٠

(٣) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : أ س + ص < ٢ لا تقع فى الربع الثالث أو الرابع فإن ....

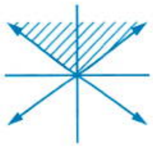
(أ) أ < ٠ (ب) أ > ٠ (ج) أ = ٠ (د) أ < ٢

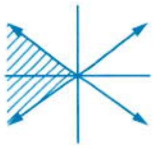
(٤) مجموعة حل المتباينتين : س + ص > ٤ ، س − ص < ٤ لا تقع فى الربع ....

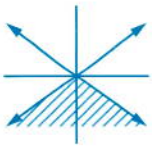
(أ) الأول. (ب) الأول أو الثانى.

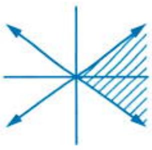
(جـ) الثانى أو الثالث. (د) الثالث أو الرابع.

(٥) مجموعة حل المتباينة : − س ≤ ص ≤ س هى ....


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٦) إذا كان س ، ص عددين صحيحين فإن مجموعة حل نظام المتباينات :

س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ص < ٣ هى ....

(أ) {(٠ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (١ ، ١)}

(ب) {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

(جـ) {(١ ، ١)}

(د) ∅

(٧) إذا كان س ، ص عددين صحيحين فإن عدد حلول نظام المتباينات :

س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٦ ، ٢ س + ص ≤ ٦ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائى.

(٨) إذا كانت النقطتان (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) تنتميان لمجموعة حل المتباينة : أ س + ب ص ≤ حـ

فأى النقط الآتية من المؤكد أن تنتمى لمجموعة الحل أيضًا ؟

(أ) (٠ ، ٥) (ب) (٢ ، ٤) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (٤ ، ٢)

(٩) إذا كانت النقطة (٤ ، ك) تقع على محور تماثل منطقة حل المتباينات

س + ص > أ ، س − ص > أ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) − ٤ (جـ) أ (د) صفر

(١٠) إذا كان مجموعة حل المتباينات : س + ٢ ص > ٣ ، أ س + ٤ ص < ١ هى ∅

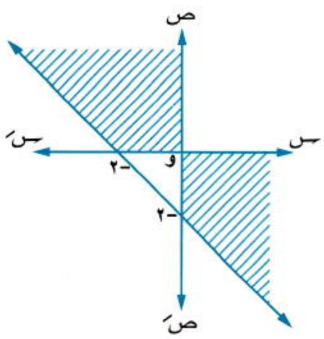
فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١١) إذا كان : س + ص ≤ أ ، س + ص ≥ ب وكانت مجموعة حل النظام تساوى ∅ فإن ....

(أ) أ < ب (ب) أ > ب (جـ) أ = ب (د) أ ≥ ب

(١٢) الجزء المظلل فى الشكل المقابل



يمثل مجموعة حل المتباينات

ص ≤ - س - ٢ ، ....

(أ) س × ص > ٠

(ب) س × ص < ٠

(جـ) س > ص

(د) س < ص

تطبيقات حياتية

١ يريد مربى حيوانات عمل حظيرة مستطيلة الشكل ، يجب أن لا يقل طول الحظيرة عن ٨٠ مترًا وأن لا يزيد محيطها عن ٣١٠ أمتار فما الأبعاد الممكنة للحظيرة ؟ (اكتب أربعة أبعاد ممكنة)

---

٢ **الربط بالمهن :**

يريد نجار شراء نوعين من المسامير ، ولا يريد دفع أكثر من ٤٨ جنيهًا ثمنًا للشراء ، فإذا كان النجار يحتاج ٣ كيلو جرامات على الأقل من النوع الأول ، وكيلو جرامًا واحدًا على الأقل من النوع الثانى ، فما المبلغ الذى سيدفعه النجار ثمنًا لكل نوع ، إذا علمت أن ثمن الكيلو جرام الواحد من النوع الأول هو ٦ جنيهات ، وثمن الكيلو جرام من النوع الثانى هو ٨ جنيهات ؟

(١) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يصف هذا الموقف.

(٢) مثل بيانيًا هذا النظام لتوضيح الحلول الممكنة.

(٣) اذكر نقطة تكون حلًا لهذا النظام ؟

(٤) اذكر نقطة لا تكون حلًا لهذا النظام ؟

---

٣ أعطى الأستاذ كريم لتلاميذه زمنًا قدره ٦٠ دقيقة لإجابة اختبار فى الرياضيات ، يجب أن يجيب التلاميذ عن ٤ أسئلة على الأقل من القسم (أ) ، ٣ أسئلة على الأقل من القسم (ب) ، بحيث لا يقل عدد الأسئلة المجابة من القسمين معًا عن ١٠ أسئلة.

فإذا استغرقت هناء ٤ دقائق لإجابة كل سؤال فى القسم (أ) ، ٥ دقائق لإجابة كل سؤال فى القسم (ب) . كم سؤالًا فى كل قسم حاولت هناء الإجابة عنه ؟

الدرس 2 البرمجة الخطية والحل الأمثل

* **البرمجة الخطية :** هى إحدى الطرق التى تستخدم للحصول على أفضل الحلول لتحقيق هدف معين فى ضوء القيود والإمكانيات المتاحة والوصول إلى الحل الأمثل.

بحيث يكون الهدف الذى نسعى لتحقيقه على صورة دالة خطية تسمى **«دالة الهدف»**

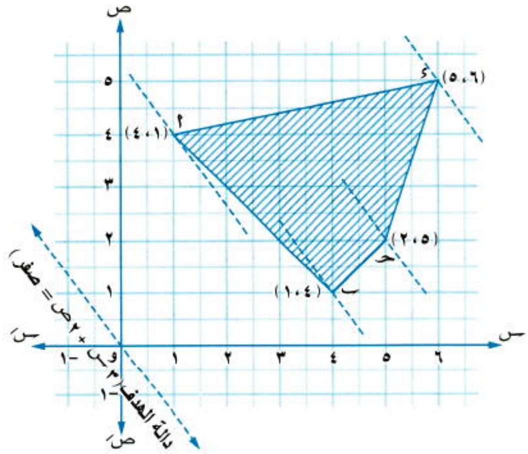
وتكون القيود والإمكانيات المتاحة على صورة مجموعة من المتباينات الخطية.

* **تعتمد طريقة البرمجة الخطية على :**

١ تمثيل نظام المتباينات الذى يعبر عن القيود بحيث نحصل على منطقة مضلعة تمثل **«مجموعة الحل»** وغالبًا ما تشتمل القيود على المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ وهذا يعنى أن منطقة الحل تقع فى الربع الأول.

٢ **تعيين دالة الهدف :** ر = ل س + م ص حيث ل ، م ثابتان فنرسم المستقيم ل س + م ص = ٠ الذى يمر بنقطة الأصل ثم نجعل هذا المستقيم يتحرك موازيًا لنفسه لأعلى حتى يمر برءوس المضلع الممثل لمجموعة حل المتباينات وحيث إن جميع هذه المستقيمات المتوازية تكون متساوية فى الميل ومختلفة فقط فى قيمة الحد المطلق (ر) وكل نقطة (س ، ص) تنتمى إلى مجموعة الحل وتنتمى لنفس المستقيم تعطى قيمة وحيدة للعدد (ر) وبالتالى نستطيع أن نحدد أكبر قيمة أو أصغر قيمة لدالة الهدف .

فمثلًا إذا كانت مجموعة الحل الممثلة لمجموعة المتباينات التى تمثل القيود هى المنطقة المظللة فى الشكل المقابل والمطلوب هو إيجاد أكبر وأقل قيمة للمقدار : ر = ٣ س + ٢ ص فإننا نعوض بالنقط أ ، ب ، حـ ، ء (رؤوس المضلع) فى دالة الهدف



لاحظ أن

قيمة دالة الهدف عند أى نقطة تقع على ضلع من أضلاع المنطقة المظللة تكون محصورة بين قيمتيهما عند رأسى المضلع الواصل بينهما هذا الضلع

∴ [ر]$_{أ}$ = ٣ × ١ + ٢ × ٤ = ١١ ، [ر]$_{ب}$ = ٣ × ٤ + ٢ × ١ = ١٤

، [ر]$_{جـ}$ = ٣ × ٥ + ٢ × ٢ = ١٩ ، [ر]$_{ء}$ = ٣ × ٦ + ٢ × ٥ = ٢٨

وبالتالى تكون أكبر قيمة هى ٢٨ وذلك عند النقطة ء (٦ ، ٥) وأقل قيمة هى ١١ وذلك عند النقطة أ (١ ، ٤)

مثـــال ١

عين مجموعة حل المتباينات الآتية معًا بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٨ ، ٣ س + ٢ ص ≤ ١٢

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س ، ص) التى تجعل (ر) أكبر ما يمكن حيث :

ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

الحـــل

أولاً : نعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات :

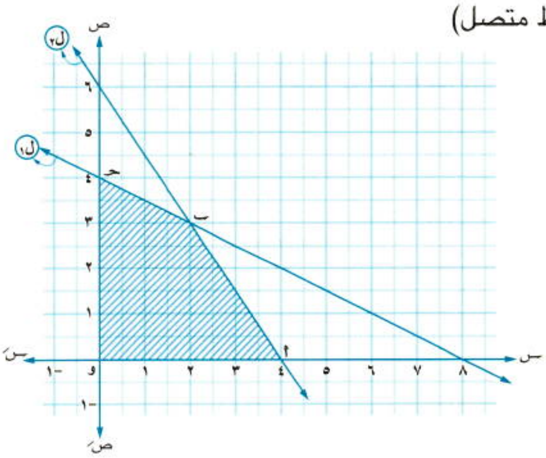
١ المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما و$\overleftarrow{\text{س}}$ ∪ و$\overleftarrow{\text{ص}}$ ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل$_{١}$: س + ٢ ص = ٨ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى ل$_{٢}$: ٣ س + ٢ ص = ١٢ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠)

∴ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البيانى وهى المنطقة المضلعة أ ب جـ و



لإيجاد نقطة ب جبريًا

نحل المعادلتين الممثلتين بالمستقيمين ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ حيث :

ل$_{١}$: س + ٢ ص = ٨ ، ل$_{٢}$: ٣ س + ٢ ص = ١٢ آنيًا فنجد أن : ب = (٢ ، ٣)

ثانيًا : نحدد رؤوس منطقة الحل :

رؤوس منطقة الحل هى : أ(٤ ، ٠) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(٠ ، ٤) ، و(٠ ، ٠)

ثالثًا : نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :

∵ دالة الهدف ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

∴ [ر]$_{أ}$ = ٥٠ × ٤ + ٧٥ × ٠ = ٢٠٠ ، [ر]$_{ب}$ = ٥٠ × ٢ + ٧٥ × ٣ = ٣٢٥

، [ر]$_{حـ}$ = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٤ = ٣٠٠

، [ر]$_{و}$ = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٠ = ٠

∴ أكبر قيمة لدالة الهدف هى ٣٢٥ وذلك عند النقطة ب(٢ ، ٣)

تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

المشكلات الحياتية المرتبطة بالبرمجة الخطية يمكن التعامل معها بالخطوات التالية :

١ تحليل الموقف أو المشكلة وذلك بتحديد المتغيرات والقيود والمعلومات المتاحة وتنظيمها فى جدول.

٢ ترجمة القيود فى صورة نظام من المتباينات الخطية.

٣ كتابة دالة الهدف.

٤ تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل.

٥ تحديد رؤوس منطقة الحل.

٦ إيجاد دالة الهدف عند كل رأس من الرؤوس السابقة لتحديد الرأس الذى يتحقق عنده الهدف المطلوب.

مثال ٢

مخبز ينتج نوعين من الكعك ، يلزم للكعكة من النوع الأول ٢٠٠ جرام من الدقيق ، ٢٥ جرامًا من الزبد ، ويلزم للكعكة من النوع الثانى ١٠٠ جرام من الدقيق ، ٥٠ جرامًا من الزبد ، فإذا كانت كمية الدقيق المتاحة هى ٤ كجم فقط وكمية الزبد المتاحة هى $1\frac{1}{4}$ كجم فقط فأوجد أكبر عدد ممكن من الكعك يمكن عمله.

الحل

* **نفرض أن :** عدد الكعك من النوع الأول = س كعكة ، عدد الكعك من النوع الثانى = ص كعكة
* **ننظم المعلومات المتاحة فى المشكلة كما بالجدول الآتى :**

	النوع الأول	النوع الثانى	الكمية المتاحة
دقيق	٢٠٠	١٠٠	٤٠٠٠
زبد	٢٥	٥٠	١٢٥٠

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ ٢٠٠ س + ١٠٠ ص ≤ ٤٠٠٠ **أى أن** ٢ س + ص ≤ ٤٠

٣ ٢٥ س + ٥٠ ص ≤ ١٢٥٠ **أى أن** س + ٢ ص ≤ ٥٠

* **نكتب دالة الهدف :** ر = س + ص حيث ر أكبر ما يمكن.
* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_1$:

٢ س + ص = ٤٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين

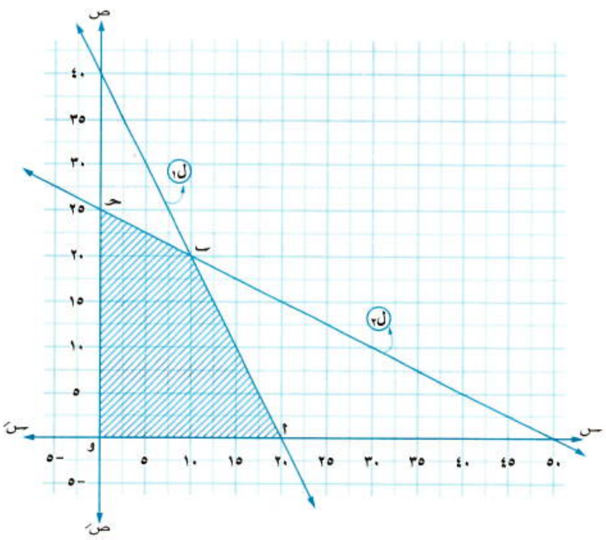
(٠ ، ٤٠) ، (٢٠ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_2$:

س + ٢ ص = ٥٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين

(٠ ، ٢٥) ، (٥٠ ، ٠)



∴ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البيانى وهى المنطقة المضلعة أ ب حـ و

* **نحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هى : أ (٢٠ ، ٠) ، ب (١٠ ، ٢٠) ، حـ (٠ ، ٢٥) ، و (٠ ، ٠)

* **نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = س + ص ∴ $[ر]_و$ = ٠ + ٠ = صفر ، $[ر]_أ$ = ٢٠ + ٠ = ٢٠

، $[ر]_ب$ = ١٠ + ٢٠ = ٣٠ ، $[ر]_حـ$ = ٠ + ٢٥ = ٢٥

∴ أكبر عدد من الكعك يتم صنعه هو ٣٠ كعكة منها ١٠ من النوع الأول

، ٢٠ من النوع الثانى.

مثال ٣

مصنع طاقته الإنتاجية ١٢٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع ويحقق ربحًا فى كل وحدة من النوع الأول ١٥ جنيهًا وربحًا لكل وحدة من النوع الثانى ٨ جنيهات ، وكان ما يباع من النوع الثانى لا يقل عن نصف ما يباع من النوع الأول.

أوجد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من كل نوع لكى يحقق المصنع أكبر ربح ممكن.

الحل

* **نفرض أن :** عدد وحدات النوع الأول = س ، عدد وحدات النوع الثانى = ص

* **ننظم المعلومات المتاحة فى المشكلة كما بالجدول الآتى :**

	النوع الأول	النوع الثانى	الحد الأقصى
الوحدة المنتجة	س	ص	١٢٠
الربح	١٥	٨	–

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ س + ص ≤ ١٢٠

٣ ∵ ص لا تقل عن نصف س ∴ ص ≥ $\frac{1}{2}$ س

∴ ص − $\frac{1}{2}$ س ≥ ٠ ∴ ٢ ص − س ≥ ٠

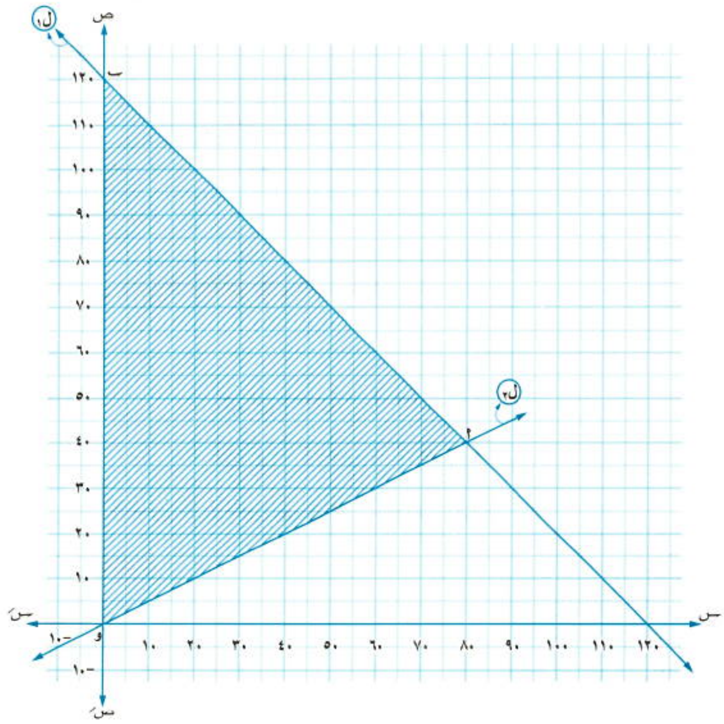
* **نكتب دالة الهدف :** ر = ١٥ س + ٨ ص حيث ر أكبر ما يمكن.

* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما $\overleftrightarrow{\text{و س}}$ ∪ $\overleftrightarrow{\text{و ص}}$ ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_1$: س + ص = ١٢٠ وهو يمر بـ (٠ ، ١٢٠) ، (١٢٠ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٢ ص − س = ٠ وهو يمر بـ (٠ ، ٠) ، (٢٠ ، ١٠)



∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل وهى المنطقة المثلثة و ٩ ب

*** نحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هى : و (٠ ، ٠) ، ٩ (٨٠ ، ٤٠) ، ب (٠ ، ١٢٠)

*** نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ١٥ س + ٨ ص ∴ [ر]و = ٠ + ٠ = ٠

، [ر]٩ = ١٥ × ٨٠ + ٨ × ٤٠ = ١٥٢٠

، [ر]ب = ١٥ × ٠ + ٨ × ١٢٠ = ٩٦٠

∴ أكبر ربح ممكن هو ١٥٢٠ جنيهًا ويتحقق ذلك عند إنتاج ٨٠ وحدة من النوع الأول ، ٤٠ وحدة من النوع الثانى.

مثال ٤

وجبة غذائية يراد تكوينها من نوعين من الأطعمة فإذا كانت القطعة من النوع الأول تحتوى ٣ سعرات حرارية ، ٦ وحدات فيتامين جـ ، والقطعة من النوع الثانى تحتوى ٦ سعرات حرارية ، ٤ وحدات فيتامين جـ ، وكان الحد الأدنى من السعرات الحرارية الواجب توافره بالوجبة هو ٣٦ سعر ، والحد الأدنى من وحدات فيتامين جـ هو ٤٨ وحدة ، وكان سعر القطعة من النوع الأول ٣ جنيهات ومن النوع الثانى ٤ جنيهات. فما عدد القطع التى يمكن أن تتضمنها الوجبة لتحقق الحد الأدنى بأقل تكلفة ؟

الحـــل

* **نفرض أن :** عدد القطع من النوع الأول بالوجبة هو ـس ، عدد القطع من النوع الثانى بالوجبة هو ص
* **ننظم المعلومات فى جدول :**

	القطعة من النوع الأول	القطعة من النوع الثانى	الحد الأدنى
سعرات حرارية	٣	٦	٣٦
ڤيتامين جـ	٦	٤	٤٨

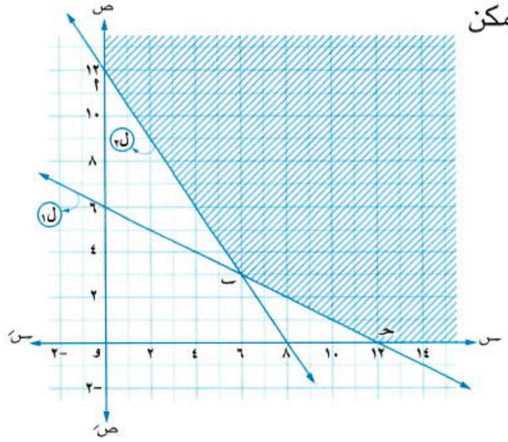
* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

١ ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ ٣ ـس + ٦ ص ≥ ٣٦ **أى أن** ـس + ٢ ص ≥ ١٢

٣ ٦ ـس + ٤ ص ≥ ٤٨ **أى أن** ٣ ـس + ٢ ص ≥ ٢٤

* **نكتب دالة الهدف :** ر = ٣ ـس + ٤ ص حيث ر أقل ما يمكن



* **تمثيل نظام المتباينات الخطية وتحديد منطقة الحل :**

١ المتباينتان ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و ـس ∪ و ص ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$:

ـس + ٢ ص = ١٢ (بخط متصل) وهو يمر

بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (١٢ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٣ ـس + ٢ ص = ٢٤ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١٢) ، (٨ ، ٠)

∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل والتى تحدها النقط أ ، ب ، حـ

* **نحدد رؤوس منطقة الحل :** رؤوس منطقة الحل هى : أ (٠ ، ١٢) ، ب (٦ ، ٣) ، حـ (١٢ ، ٠)
* **نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ٣ ـس + ٤ ص ∴ $[ر]_{أ}$ = ٣ × ٠ + ٤ × ١٢ = ٤٨

، $[ر]_{ب}$ = ٣ × ٦ + ٤ × ٣ = ٣٠ ، $[ر]_{حـ}$ = ٣ × ١٢ + ٤ × ٠ = ٣٦

∴ أقل تكلفة للوجبة هى ٣٠ جنيهًا وذلك عندما تتكون من ٦ قطع من النوع الأول و٣ قطع من النوع الثانى.

مثــال ٥

تهدف شركة سياحة لاستئجار أسطول من الطائرات يستطيع نقل ٢٨٠٠ راكب ، ١٢٨ طن أمتعة على الأقل وكان المتاح طرازان من الطائرات أ ، ب وكان عدد الطائرات المتاحة من الطراز أ هو ١٣ طائرة ومن الطراز ب هو ١٢ طائرة وكانت الحمولة كاملة لطائرة الطراز أ هى ٢٠٠ راكب ، ٨ طن أمتعه وللطراز ب هى ١٠٠ راكب ، ٦ طن أمتعه وكان إيجار الطائرة من الطراز أ هو ٢٤٠ ألف جنيه ، من الطراز ب هو ١٠٠ ألف جنيه. فكم طائرة من كل طراز يمكن استئجارها لتحقيق الهدف بأقل تكلفة ؟

الحــل

* **نفرض أن :** عدد طائرات الطراز أ هو س ، عدد طائرات الطراز ب هو ص

* **ننظم المعلومات المتاحة بالمشكلة فى جدول :**

	طراز (أ)	طراز (ب)	الحد الأدنى
عدد الركاب	٢٠٠	١٠٠	٢٨٠٠
الأمتعة بالطن	٨	٦	١٢٨

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

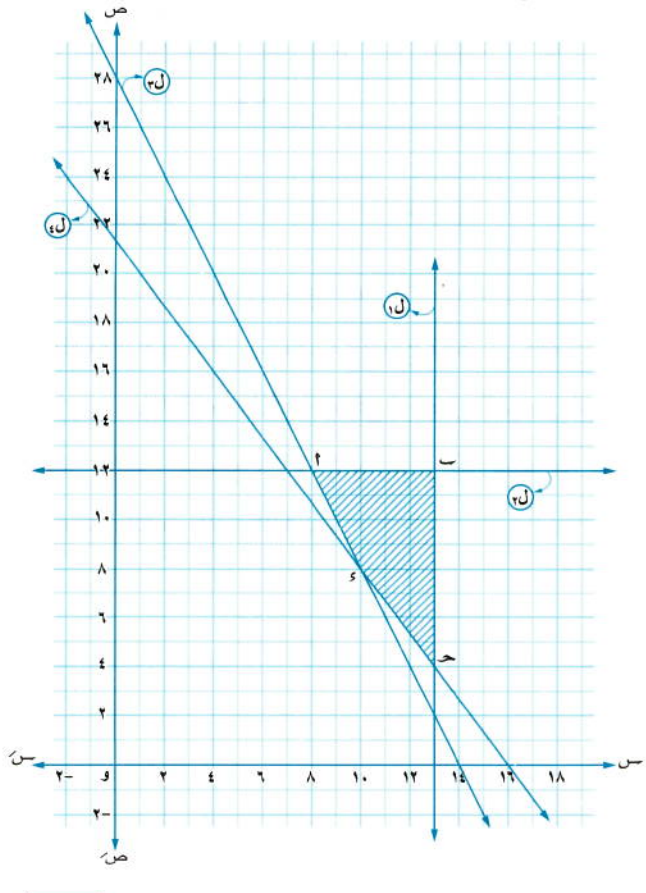
١ س ≤ ١٣ ، ص ≤ ١٢

٢ ٢٠٠ س + ١٠٠ ص ≥ ٢٨٠٠ **أى أن** ٢ س + ص ≥ ٢٨

٣ ٨ س + ٦ ص ≥ ١٢٨ **أى أن** ٤ س + ٣ ص ≥ ٦٤

* **نكتب دالة الهدف :** م = ٢٤٠ س + ١٠٠ ص حيث م أقل ما يمكن

* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**



١ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$:

س = ١٣ يوازى محور الصادات

ويقطع محور السينات

فى النقطة (١٣ ، ٠)

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$:

ص = ١٢ يوازى

محور السينات ويقطع

محور الصادات

فى النقطة (٠ ، ١٢)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٣$:

٢ س + ص = ٢٨

وهو يمر بالنقطتين

(٠ ، ٢٨) ، (١٤ ، ٠)

٤ نرسم المستقيم الحدى $ل_٤$: ٤ س + ٣ ص = ٦٤ وهو يمر بالنقطتين (١ ، ٢٠) ، (١٦ ، ٠)

∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل وهى المنطقة المضلعة أ ب حـ ء

*** نحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هى :

أ (٨ ، ١٢) ، ب (١٣ ، ١٢) ، حـ (١٣ ، ٤) ، ء (١٠ ، ٨)

*** نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ٢٤٠ س + ١٠٠ ص

∴ $[ر]_{أ}$ = ٢٤٠ × ٨ + ١٠٠ × ١٢ = ٣١٢٠

، $[ر]_{ب}$ = ٢٤٠ × ١٣ + ١٠٠ × ١٢ = ٤٣٢٠

، $[ر]_{حـ}$ = ٢٤٠ × ١٣ + ١٠٠ × ٤ = ٣٥٢٠

، $[ر]_{ء}$ = ٢٤٠ × ١٠ + ١٠٠ × ٨ = ٣٢٠٠

∴ أقل تكلفة تحقق الهدف هى عند استئجار ٨ طائرات من الطراز أ ، ١٢ طائرة من الطراز ب وتكون التكلفة ٣١٢٠٠٠٠ جنيه.

حاول بنفسك

مصنع ينتج نوعين من قطع الغيار أ ، ب ولإنتاج قطعة من النوع أ يلزم تشغيل ماكينتين الأولى لمدة ساعة والثانية لمدة ساعتين ونصف ، ولإنتاج قطعة من النوع ب يلزم تشغيل الماكينة الأولى لمدة ٤ ساعات والثانية لمدة ساعتين. فإذا كانت الماكينة الأولى لا تعمل أكثر من ٨ ساعات يوميًا والثانية لا تعمل أكثر من ٢١ ساعة يوميًا وكان مكسب المصنع ٢٤ ، ٤٠ جنيهًا فى كل قطعة من النوعين أ ، ب على الترتيب فأوجد أكبر مكسب يمكن أن يحصل عليه فى اليوم الواحد.

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) النقطة التى تكون عندها للدالة ر = ٤٠ س + ٢٠ ص قيمة عظمى من النقط الآتية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، −٤) (جـ) (١٥ ، ١٠) (د) (٢٥ ، ٠)

(٢) النقطة التى تكون عندها للدالة م = ٣٥ س + ١٠ ص قيمة صغرى من النقط الآتية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ١٠) (جـ) (٠ ، ٤٠) (د) (٢٠ ، ١٠)

(٣) إذا كان ضعف العدد س لا يقل عن ثلاثة أمثال العدد ص فإن ....

(أ) ٢ س > ٣ ص (ب) ٢ س ≥ ٣ ص

(جـ) ٢ س < ٣ ص (د) ٢ س ≤ ٣ ص

(٤) أى التعبيرات الآتية يمثل المتباينة س + ص ≥ ١٥ ؟

(أ) عددان مجموعهما أقل من ١٥ (ب) عددان مجموعهما لا يقل عن ١٥

(جـ) عددان مجموعهما يزيد عن ١٥ (د) عددان مجموعهما لا يزيد عن ١٥

(٥) أى التعبيرات الرمزية يمثل الجملة الآتية :

عددان مجموع أحدهما وضعف الآخر لا يزيد عن ٢٠ ؟

(أ) س + ٢ ص < ٢٠ (ب) س + ٢ ص ≤ ٢٠

(جـ) س + ٢ ص > ٢٠ (د) س + ٢ ص ≥ ٢٠

(٦) أى التعبيرات اللفظية يمثل المتباينة : ص ≤ ٢ س ؟

(أ) عددان أحدهما أكبر من ضعف الآخر. (ب) عددان أحدهما لا يزيد عن ضعف الآخر.

(جـ) عددان أحدهما يقل عن ضعف الآخر. (د) عددان أحدهما لا يقل عن ضعف الآخر.

(٧) النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينات : س + ص ≤ ٥ ، س ≤ ١ ، ص ≤ ٢

وتجعل دالة الهدف ر = ٢ س + ص أقل ما يمكن من النقط التالية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٤)

(٨) القيمة العظمى للدالة ر = ٥ س + ٢ ص تحت الشروط س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

، س + ص ≥ ٧ ، س + ٢ ص ≥ ١٠ هى ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٦ (جـ) ٣٥ (د) ٧٠

(٩) النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينتين : ٠ ≤ س ≤ ٥ ، ٠ ≤ ص ≤ ٢ وتجعل دالة الهدف

ر = ٢ س + ٣ ص أكبر ما يمكن هى ....

(أ) (٤ ، ٥) (ب) (٦ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، ٢)

(١٠) أقل قيمة للمقدار ٣ س − ٢ ص تحت الشروط −٣ ≤ س ≤ ٧ ، −٦ ≤ ص ≤ ٥

تساوى ....

(أ) ٣ (ب) −١٩ (جـ) −٢٨ (د) ١١

(١١) إذا كان (أ ، ب) ينتمى لمجموعة حل المتباينة س + ٢ ص ≤ ٥ حيث أ ، ب عددان صحيحان

فإن أقل قيمة للمقدار ٢ أ + ٤ ب = ...

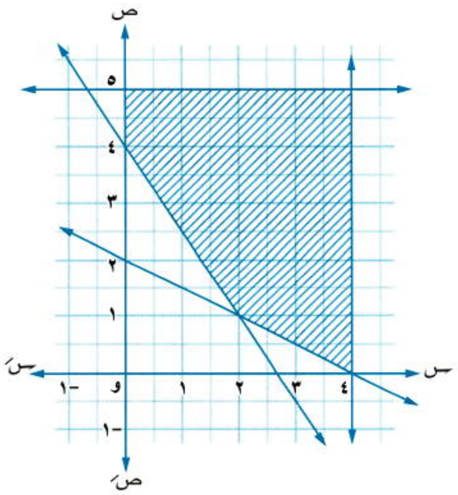
(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ١٠ (د) ٦

(١٢) إذا كانت دالة الهدف (ر) تأخذ القيم ٦١ ، ٥٧ عند النقط (٤ ، ٧) ، (٥ ، ٦) على الترتيب

فإن دالة الهدف (ر) يمكن أن تساوى ....

(أ) ٢ س + ٥ ص (ب) ٧ س + ٣ ص (جـ) ٣ س + ٧ ص (د) ٥ س + ٢ ص

(١٣) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل لنظام من المتباينات فإن دالة الهدف ر = س + ص تكون أصغر ما يمكن عند النقطة ....



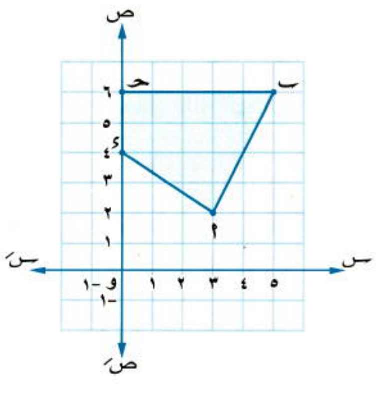
(أ) (٠ ، ٠)

(ب) (١ ، ٢)

(جـ) (٢ ، ١)

(د) (٤ ، ٥)

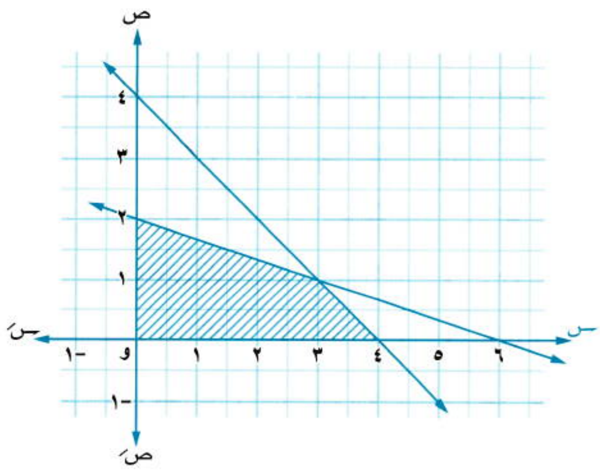
(١٤) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل لنظام من المتباينات فإن القيمة الصغرى لدالة الهدف ر = ٣ س + ٢ ص هى ....



(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٢ (د) ١٣

(١٥) فى الشكل المقابل :



المنطقة المظللة تمثل مجموعة حل المتباينات

ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ـس + ٣ ص ≤ ٦

، ـس + ص ≤ ٤ فإن القيمة العظمى

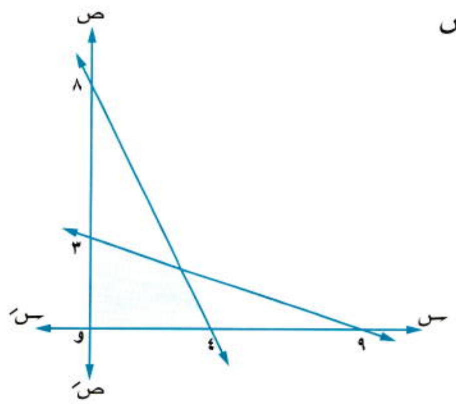
لدالة الهدف ر = ٢ ـس + ص

تساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) إذا كانت المنطقة المظللة هى حل لإحدى مسائل



البرمجة الخطية وكانت دالة الهدف هى ر = ٥ ـس + ٨ ص

فإن القيمة العظمى لدالة الهدف تساوى ....

(أ) ٢٤

(ب) ٣١

(جـ) ٤٥

(د) ٦٤

(١٧) ينتج مصنع صغير للأثاث المعدنى ٢٠ دولابًا أسبوعيًا على الأكثر من نوعين مختلفين من الدواليب فإذا كان ما يباع من النوع الأول لا يقل عن ثلاثة أمثال ما يباع من النوع الثانى وفرضنا عدد دواليب النوع الأول ـس وعدد دواليب النوع الثانى ص أى من أنظمة المتباينات الآتية ينمذج البيانات والقيود السابقة ؟

(أ) ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ـس + ص ≥ ٢٠ ، ـس ≤ ٣ ص

(ب) ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ـس + ص ≥ ٢٠ ، ـس ≥ ٣ ص

(جـ) ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ـس + ص ≤ ٢٠ ، ٣ ـس ≤ ص

(د) ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ـس + ص ≤ ٢٠ ، ـس ≥ ٣ ص

(١٨) مصنع طاقته الإنتاجية ١٢٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع ، $س$ ، $ص$ على الترتيب فإذا كان ما يباع من النوع الثانى لا يقل عن نصف ما يباع من النوع الأول أى من أنظمة المتباينات الآتية تمثل البيانات والقيود السابقة ؟

(أ) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $س + ص \leq ١٢٠$ ، $٢ ص \leq س$

(ب) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $س + ص \geq ١٢٠$ ، $ص \leq ٢ س$

(جـ) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $س + ص \leq ١٢٠$ ، $٢ ص \geq س$

(د) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $س + ص \leq ١٢٠$ ، $ص \geq ٢ س$

(١٩) مخبز ينتج نوعين من الكعك ، يلزم للكعكة من النوع الأول ٢٠٠ جرام من الدقيق ، ٢٥ جرامًا من الزبد ، ويلزم للكعكة من النوع الثانى ١٠٠ جرام من الدقيق ، ٥٠ جرامًا من الزبد فإذا كانت كمية الدقيق المتاحة ٤ كيلو جرام فقط وكمية الزبد المتاحة هى $١\frac{١}{٤}$ كجم فقط وفرضنا عدد كعكات النوع الأول $س$ وعدد كعكات النوع الثانى $ص$ أى من أنظمة المتباينات الآتية ينمذج البيانات والقيود السابقة ؟

(أ) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $٢ س + ص \geq ٤٠$ ، $س + ٢ ص \geq ٥٠$

(ب) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $٢ س + ص \leq ٤٠$ ، $س + ٢ ص \leq ٥٠$

(جـ) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $س + ٣ ص \geq ٤٠$ ، $٣ س + ص \geq ٥٠$

(د) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $س + ٢ ص \geq ٣٠$ ، $٢ س + ص \leq ٧٠$

(٢٠) فى إحدى مسائل البرمجة الخطية كانت دالة الهدف $ر = أ س + ب ص$ لها قيمة عظمى عند رأسين من رؤوس المنطقة المظللة التى تمثل الحل فإن عدد النقط التى تجعل دالة الهدف قيمة عظمى يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) عدد لانهائى.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ مثل كلًا من أنظمة المتباينات التالية ثم أوجد النقطة التى تحقق دالة الهدف فى كل حالة :

(١) $س + ص \leq ٥$ ، $ص \geq ١$ ، $س \geq ٢$

، دالة الهدف $ر = ٢ س + ٣ ص$ أصغر ما يمكن. «(٢ ، ١)»

(٢) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $ص + ٢ س \leq ١٠$ ، $س + ٤ ص \leq ١٢$

، دالة الهدف $ر = ٢ ص + ٥ س$ أكبر ما يمكن. «(٥ ، ٠)»

(٣) $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $٣ ص + س \geq ١٥$ ، $٤ س + ٣ ص \geq ٢٤$

، دالة الهدف $ر = ٣ ص + ٢ س$ أقل ما يمكن. «(٣ ، ٤)»

(٤) س - ص $\geq$ ٣ ، ٣ س + ٢ ص $\leq$ -٦ ، س $\leq$ -٢ ، ص $\geq$ ٥

، دالة الهدف م = ٢ س - ٣ ص أكبر ما يمكن. «(٠ ، -٣)»

---

٢ **أوجد أكبر وأقل قيمة لدالة الهدف :** ل = س + ٣ ص - ٥ حيث : (س ، ص) تنتمى لمنطقة حل نظام المتباينات : -٣ $\leq$ س $\leq$ ٣ ، -٤ $\leq$ ص $\leq$ ٤ ، ٤ س + ٣ ص $\leq$ ١٢ ، ٤ س + ٣ ص $\geq$ -١٢

«٧ ، -١٧»

---

٣ علم يوسف أنه للحفاظ على وزنه يجب عليه حرق السعرات الحرارية الزائدة عن طريق ممارسة المشى والجرى فوجد أن ممارسة المشى لمدة دقيقة واحدة تحرق ٦ سعرات حرارية وممارسة الجرى لمدة دقيقة واحدة تحرق ١٥ سعر حرارى ، وكان يوسف يمشى ما بين ١٠ ، ٢٠ دقيقة يوميًا ويجرى ما بين ٣٠ ، ٤٥ دقيقة يوميًا ، وكان الوقت المتاح لممارسة المشى والجرى يوميًا لايزيد عن ساعة واحدة فكم دقيقة يجب أن يمارس فيها يوسف المشى وكم دقيقة يمارس فيها الجرى يوميًا ليحرق أكبر قدر ممكن من السعرات الحرارية. «١٥ ، ٤٥ دقيقة»

---

٤ ينتج مصنع صغير للأثاث المعدنى ٢٠ دولابًا أسبوعيًا على الأكثر من نوعين مختلفين أ ، ب ، فإذا كان ربحه من النوع (أ) هو ٨٠ جنيهًا وربحه من النوع (ب) هو ١٠٠ جنيه ، وكان ما يباع من النوع الأول لا يقل عن ثلاثة أمثال ما يباع من النوع الثانى. أوجد عدد الدواليب من كل نوع ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن. «١٥ ، ٥»

---

٥ يرغب مزارع فى تربية دجاج وبط فإذا كان المكان الذى سيربى فيه هذه الطيور لا يتسع إلا لثلاثمائة فقط من الطيور وهو يرى ألا يقل عدد الدجاج عن ضعف عدد البط فإذا كان ربحه فى كل دجاجة جنيهًا واحدًا وفى كل بطة جنيهين.

أوجد عدد ما يربيه المزارع من كل نوع حتى يحصل على أكبر ربح ممكن. «٢٠٠ ، ١٠٠»

---

٦ يبيع أحد محال المأكولات البحرية نوعين من الأسماك المطهية أ ، ب ، ولا تقل الطلبات من صاحب المحل عن ٥٠ سمكة ، كما أنه لا يستخدم أكثر من ٣٠ سمكة من النوع (أ) ، ولا يستخدم أكثر من ٣٥ سمكة من النوع (ب) ، فإذا علمت أن ثمن السمكة من النوع (أ) هو ٤ جنيهات ، ومن النوع (ب) هو ٣ جنيهات ، كم سمكة من كل من النوعين أ ، ب يجب استخدامها لتحقيق أقل ثمن ممكن للشراء ؟ «١٥ ، ٣٥»

---

٧ ينتج أحد مصانع الآلات الموسيقية نوعين من آلات النفخ ، يحتاج تصنيع النوع الأول ٢٥ وحدة من النحاس ، ٤ وحدات من النيكل ، ويحتاج تصنيع النوع الثانى ١٥ وحدة من النحاس ، ٨ وحدات من النيكل ، فإذا كانت الكمية المتاحة فى المصنع فى أحد الأيام ٩٥ وحدة من النحاس ، ٣٢ وحدة من النيكل ، وكان ربح المصنع فى الآلة من النوع الأول هو ٦٠ جنيهًا وربحه فى الآلة من النوع الثانى ٤٨ جنيهًا ، فما عدد الآلات التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع حتى يحقق أكبر ربح ممكن ؟ «٢ ، ٣»

٨ وجد مزارع أنه يمكن تحسين نوعية مزروعاته إذا استخدم على الأقل ١٦ وحدة من النيترات ، ٩ وحدات من الفوسفات فى عملية التسميد للقيراط الواحد. يوجد فى الأسواق نوعان من السماد ﺃ ، ﺏ موضحة محتوياتها وتكلفة كل منها فى الجدول التالى :

السماد	عدد الوحدات لكل كيلوجرام		التكلفة لكل كيلوجرام
	النترات	الفوسفات	
ﺃ	٤	١	١٧٠ قرشًا
ﺏ	٢	٣	١٥٠ قرشًا

أوجد أقل تكلفة من مزيج السمادين ﺃ ، ﺏ تمكنان المزارع من توفير العدد الكافى من وحدات النيترات لتحسين نوعية مزروعاته. «٣ ، ٢»

---

٩ افترض أنك تُصنع وتبيع مرطبًا للجلد ، وإذا كان تصنيع عبوة المرطب العادى يستلزم ٢ سم^3 من الزيت ، ١ سم^3 من زبدة الكاكاو ، وكان تصنيع عبوة المرطب من النوع الممتاز يستلزم ١ سم^3 من الزيت ، ٢ سم^3 من زبدة الكاكاو ، سوف يكون ربحك هو ١٠ جنيهات لكل عبوة من النوع العادى ، ٨ جنيهات لكل عبوة من النوع الممتاز. فإذا كان لديك ٢٤ سم^3 من الزيت ، ١٨ سم^3 من زبدة الكاكاو ، فما عدد العبوات التى يمكن تصنيعها من كل نوع ، حتى تحصل على أكبر ربح ممكن ، وما هذا الربح ؟ «١٠ ، ٤»

---

١٠ سلعتان غذائيتان الأولى بها ٥ وحدات فيتامين وتعطى ٣ سعر حرارى والثانية بها وحدتان فيتامين وتعطى ٦ سعر حرارى ، فإذا كان المطلوب ٢٥ وحدة فيتامين على الأقل ، ٣٩ سعر حرارى على الأقل وكان ثمن الوحدة من السلعة الأولى ٦ جنيهات وثمن الوحدة من السلعة الثانية ٨ جنيهات. فما هى الكمية الواجب شراؤها من كل من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ؟ «٣ ، ٥»

---

١١ ينتج مصنع نوعين من المكاتب الصاج وكل نوع يقوم بتجميعه أحد العمال ثم يقوم عامل آخر بالدهان ، يستغرق العامل الأول ساعتين لتجميع الوحدة من النوع الأول ، و ٣ ساعات لتجميع الوحدة من النوع الثانى ، بينما يستغرق العامل الثانى ساعة ونصف الساعة لدهان الوحدة من النوع الأول وساعتين لدهان الوحدة من النوع الثانى ، فإذا كان العامل الأول يعمل ٦ ساعات يوميًا على الأقل ، بينما يعمل العامل الثانى ٦ ساعات يوميًا على الأكثر ، وكان ربح المصنع هو ٥٠ جنيهًا فى كل وحدة من كل من النوعين ، فما عدد الوحدات التى يجب أن ينتجها المصنع يوميًا من كلا النوعين ليحقق أكبر ربح ممكن ؟ «٤ من النوع الأول»

١٢ مصنع ينتج نوعين من الصابون أ ، ب فإذا كان إنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج أ يحتاج إلى ٣٠ كجم من المواد الخام ، ١٨ ساعة من التشغيل على الماكينات ، وإنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج ب يحتاج إلى ٢٠ كجم من نفس المواد الخام ، ٢٤ ساعة من التشغيل على الماكينات. أوجد أكبر قيمة للمنتجات التى تنتج من ٧٥ كجم من المواد الخام ، ٧٢ ساعة من التشغيل على الماكينات. «٣٢٥ جنيهًا»

١٣ ترزيان ينتجان نموذجين من البلوزات (أ) ، (ب) فيقوم الترزى الأول بتفصيل القماش بينما يقوم الثانى بخياطته ، فإذا كان الترزى الأول يستغرق ساعة فى تفصيل النموذج (أ) وساعتين فى تفصيل النموذج (ب) ، وكان الترزى الثانى يستغرق ٣ ساعات لخياطة النموذج (أ) وساعة واحدة لخياطة النموذج (ب) ، وكان الترزى الأول يعمل فى اليوم ٨ ساعات على الأكثر بينما يعمل الثانى ٩ ساعات فى اليوم على الأكثر وكان مكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (أ) هو ١٠ جنيهات ومكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (ب) هو ١٥ جنيهًا. فأوجد عدد البلوزات من كل نموذج التى يمكنهما إنتاجه فى اليوم ليحصلا على أكبر ربح ممكن. «٢ ، ٣»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ ورشة لصناعة الأثاث تتسع لعمل ٧٢ عاملاً على الأكثر بعضهم مدرب والبعض الآخر تحت التدريب ، فإذا كان يفرض على كل عاملين مدربين بأن يعمل معهما على الأقل عامل واحد غير مدرب وإذا كان حجم إنتاج العامل المدرب مرتين ونصف من حجم إنتاج العامل غير المدرب فأوجد عدد العمال من كل نوع لكى يتحقق للورشة أكبر حجم إنتاج ممكن. «٤٨ ، ٢٤»

٢ يوسف وسامى يعملان على إحدى الماكينات لإنتاج منتج معين. فإذا كان يوسف ينتج وحدة المنتج فى الساعة بينما سامى ينتج وحدتين من هذا المنتج فى الساعة ولكنه يمكنه العمل ساعتين على الأكثر فى اليوم زيادة عن ساعات عمل يوسف. وإذا علمنا أن الماكينة يجب أن تعمل ٦ ساعات على الأقل يوميًا لتغطية نفقاتها وأنه يجب إنتاج ٨ وحدات من المنتج على الأقل يوميًا فأوجد أقل أجور يومية تدفع ليوسف وسامى إذا علم أن يوسف يحصل على ٥ جنيهات أجر فى الساعة وسامى يحصل على ٨ جنيهات أجر فى الساعة. «٢٠ ، ١٦»

٣ يراد وضع نوعين من الكتب (أ) ، (ب) على رف مكتبة طوله ٩٦ سم وحمولته القصوى ٢٠ كجم فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١ كجم وسمك الكتاب من النوع (أ) ٦ سم ومن النوع (ب) ٤ سم فأوجد عدد الكتب من كل نوع التى توضع على الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن «فسر وجود عدة حلول».

الوحدة 3

حساب المثلثات

دروس الوحدة

الدرس 1 المتطابقات المثلثية.

الدرس 2 حل المعادلات المثلثية.

الدرس 3 حل المثلث القائم الزاوية.

الدرس 4 زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.

الدرس 5 القطاع الدائرى.

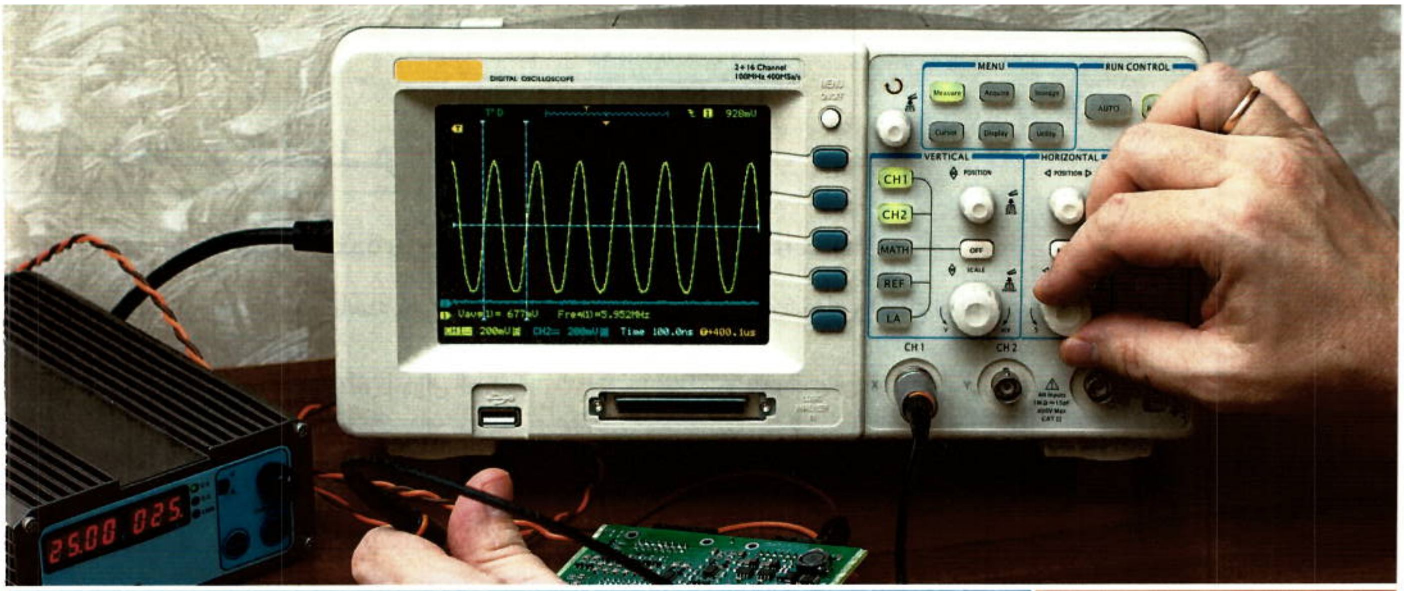
الدرس 6 القطعة الدائرية.

الدرس 7 المساحات.

نواتج التعلّم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية.
- يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية.
- يحدد ما إذا كانت المتساوية متطابقة أم معادلة مثلثية.
- يحل المعادلات المثلثية البسيطة فى الصورة العامة فى الفترة [٠ ، ٢ π[
- يتعرف على الحل العام للمعادلة المثلثية.
- يحل المثلث القائم الزاوية.
- يحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.
- يتعرف على القطاع الدائرى ويوجد مساحته.
- يتعرف على القطعة الدائرية ويوجد مساحتها.
- يوجد مساحة المثلث ومساحة الشكل الرباعى ومساحة المضلع المنتظم.
- يستخدم أنشطة لبرامج الحاسب الآلى.



الدرس 1 المتطابقات المثلثية

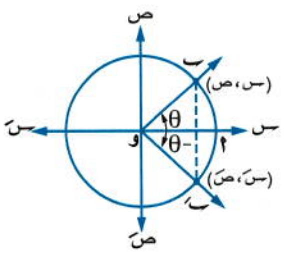
المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطـــابقة

هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية والذى يُعرف به كل طرف من طرفى المتساوية.

فمثلًا المتساوية : حتا $(-\theta)$ = حتا θ تسمى متطابقة لأنها صحيحة لجميع قيم المتغير θ الحقيقية.

وذلك لأن : فى الشكل المقابل :



من دراستنا السابقة للعلاقة بين الزاويتين المنتسبتين θ ، $(-\theta)$

وجدنا أن : النقطة بَ (سَ ، صَ) صورة النقطة ب (س ، ص)

بالانعكاس فى محور السينات

أى أن سَ = س

، ∵ حتا $(-\theta)$ = سَ ، حتا θ = س ∴ حتا $(-\theta)$ = حتا θ لكل قيم θ الحقيقية

مـلاحظة

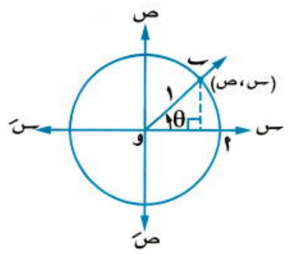
العلاقات المثلثية بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة التى درسناها سابقًا هى متطابقات لأنها تتحقق لجميع قيم المتغير الحقيقية.

مثل حا $(\pi - \theta)$ = حا θ ، حتا $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ = − حا θ ، ....

المعـــادلة

هى متساوية صحيحة لبعض قيم المتغير الحقيقية التى تحققها وغير صحيحة للبعض الآخر الذى لا يحققها.

فمثلًا المتساوية : حتا θ = حا θ تسمى معادلة لأنها صحيحة لبعض وليس كل قيم المتغير θ الحقيقية.



وذلك لأن : في الشكل المقابل :

من دراستنا السابقة وجدنا أن : حتا θ = س ، حا θ = ص

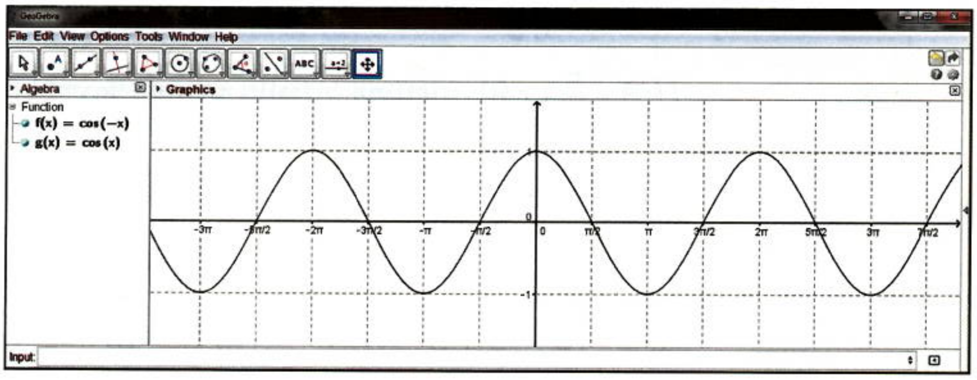
∴ حتا θ = حا θ عندما س = ص فقط

وهذا لا يحدث إلا عندما θ = ٤٥° أو ٢٢٥° أو أي من الزوايا المكافئة لهما.

ملاحظة

يمكن تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثل متطابقة أو معادلة عن طريق التمثيل البياني للدالتين المحددتين لطرفيها ، فإذا كانت الدالتان متقاطعتين في كل النقط (منطبقتين) كانت العلاقة تمثل متطابقة، وإذا كانتا متقاطعتين في بعض النقط فقط كانت تمثل معادلة.

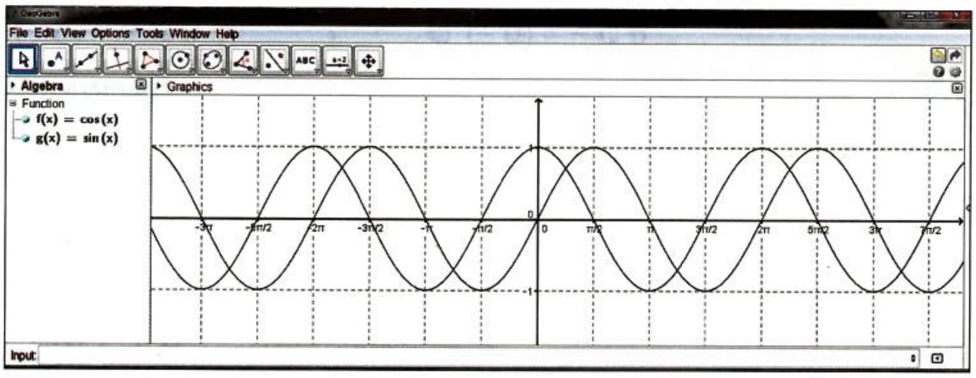
فمثلًا • في الشكل التالي :



الدالتان د$_1$: د$_1$ (θ) = حتا (− θ) ، د$_2$: د$_2$ (θ) = حتا θ متقاطعتان في جميع النقط أي منطبقتان.

ولذلك : المتساوية حتا (− θ) = حتا θ تسمى متطابقة.

• في الشكل التالي :



الدالتان د$_1$: د$_1$ (θ) = حتا θ ، د$_2$: د$_2$ (θ) = حا θ متقاطعتان في بعض النقط

ولذلك : المتساوية حتا θ = حا θ تسمى معادلة.

المتطابقات المثلثية الأساسية

* **درسنا فيما سبق المتطابقات المثلثية الآتية :**

١ متطابقة الدوال المثلثية ومقلوباتها :

- $\text{جتا}\,\theta = \frac{١}{\text{قا}\,\theta}$ ، $\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$
- $\text{جا}\,\theta = \frac{١}{\text{قتا}\,\theta}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$
- $\text{ظا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$

٢ التعبير عن ظا θ ، ظتا θ بدلالة جا θ ، جتا θ :

- $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$
- $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

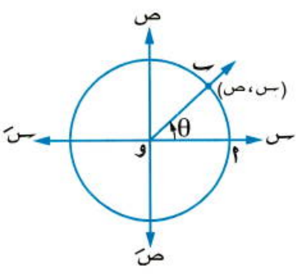
٣ متطابقة الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين $\left(\theta ، \left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)\right)$:

- $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جا}\,\theta$ ، $\text{قا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{قتا}\,\theta$
- $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جتا}\,\theta$ ، $\text{قتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{قا}\,\theta$
- $\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{ظتا}\,\theta$ ، $\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{ظا}\,\theta$

٤ متطابقة الدوال المثلثية للزاويتين $\left(\theta ، (-\theta)\right)$:

- $\text{جتا}\,(-\theta) = \text{جتا}\,\theta$ ، $\text{قا}\,(-\theta) = \text{قا}\,\theta$
- $\text{جا}\,(-\theta) = -\,\text{جا}\,\theta$ ، $\text{قتا}\,(-\theta) = -\,\text{قتا}\,\theta$
- $\text{ظا}\,(-\theta) = -\,\text{ظا}\,\theta$ ، $\text{ظتا}\,(-\theta) = -\,\text{ظتا}\,\theta$

٥ متطابقة فيثاغورث :



لأى زاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى إذا كان ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص) فإن :

- $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ، $\because\ \text{جتا}\,\theta = \text{س}$ ، $\text{جا}\,\theta = \text{ص}$

$\therefore\ \boxed{\text{جتا}^٢\,\theta + \text{جا}^٢\,\theta = ١}$ (١) متطابقة فيثاغورث

- بقسمة طرفى العلاقة (١) على $\text{جتا}^٢\,\theta$ نجد أن :

$$\frac{\text{جتا}^٢\,\theta}{\text{جتا}^٢\,\theta} + \frac{\text{جا}^٢\,\theta}{\text{جتا}^٢\,\theta} = \frac{١}{\text{جتا}^٢\,\theta} \quad \therefore\ \boxed{١ + \text{ظا}^٢\,\theta = \text{قا}^٢\,\theta}$$

• بقسمة طرفى العلاقة (١) على حا^٢ θ نجد أن :

$$\frac{حتا^٢ θ}{حا^٢ θ} + \frac{حا^٢ θ}{حا^٢ θ} = \frac{١}{حا^٢ θ} \quad \therefore \boxed{ظتا^٢ θ + ١ = قتا^٢ θ}$$

ملاحظات

١ من العلاقة : حا^٢ θ + حتا^٢ θ = ١ **نستنتج أن :** $\boxed{حا^٢ θ = ١ - حتا^٢ θ}$ ، $\boxed{حتا^٢ θ = ١ - حا^٢ θ}$

٢ من العلاقة : ١ + ظا^٢ θ = قا^٢ θ **نستنتج أن :** $\boxed{ظا^٢ θ = قا^٢ θ - ١}$ ، $\boxed{قا^٢ θ - ظا^٢ θ = ١}$

٣ من العلاقة : ظتا^٢ θ + ١ = قتا^٢ θ **نستنتج أن :** $\boxed{ظتا^٢ θ = قتا^٢ θ - ١}$ ، $\boxed{قتا^٢ θ - ظتا^٢ θ = ١}$

تحقق من فهمك

اختر الإجابة الصحيحة : حا^٢ θ + حتا^٢ θ ≠ ....

(أ) ظا θ ظتا θ (ب) حا^٢ ٢θ + حتا^٢ ٢θ (جـ) ظتا^٢ θ - قتا^٢ θ (د) قا^٢ θ - ظا^٢ θ

تبسيط المقادير المثلثية

المقصود بتبسيط المقدار المثلثى هو استخدام المتطابقات المثلثية لوضع المقدار فى أبسط صورة له.

مثال ١

اكتب كلًا من المقادير الآتية فى أبسط صورة :

١ $\frac{١}{حتا^٢ θ} - \frac{حا^٢ θ}{حتا^٢ θ}$

٢ حا $(\frac{π}{٢} - θ)$ قتا θ

٣ (حا θ + حتا θ)^٢ - ٢ حا θ حتا θ

٤ $\frac{١ + ظا^٢ (\frac{٣π}{٢} - θ)}{١ + ظا^٢ (\frac{٣π}{٢} + θ)}$

الحل

١ $\frac{١}{حتا^٢ θ} - \frac{حا^٢ θ}{حتا^٢ θ} = قا^٢ θ - ظا^٢ θ = ١$

٢ حا $(\frac{π}{٢} - θ)$ قتا θ = حتا θ قتا θ = $\frac{حتا θ}{حا θ}$ = ظتا θ

٣ (حا θ + حتا θ)^٢ - ٢ حا θ حتا θ

= حا^٢ θ + $\cancel{٢ حا θ حتا θ}$ + حتا^٢ θ - $\cancel{٢ حا θ حتا θ}$

= حا^٢ θ + حتا^٢ θ = ١

لاحظ أن

$$\frac{١}{حتا^٢ θ} = \left(\frac{١}{حتا θ}\right)^٢ = قا^٢ θ$$

$$\frac{حا^٢ θ}{حتا^٢ θ} = \left(\frac{حا θ}{حتا θ}\right)^٢ = ظا^٢ θ$$

تذكر أن

(أ+ب)^٢ = أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢

٤ $\dfrac{1 + \text{ظتا}^2 \left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \text{ظا}^2 \left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \dfrac{1 + \text{ظا}^2 \theta}{1 + \text{ظتا}^2 \theta}$

$= \dfrac{\text{قا}^2 \theta}{\text{قتا}^2 \theta}$

$= \dfrac{\text{حا}^2 \theta}{\text{حتا}^2 \theta} = \text{ظا}^2 \theta$

لاحظ أن

$\dfrac{\text{قا}^2 \theta}{\text{قتا}^2 \theta} = \dfrac{1}{\text{حتا}^2 \theta} \div \dfrac{1}{\text{حا}^2 \theta} = \dfrac{1}{\text{حتا}^2 \theta} \times \text{حا}^2 \theta$

$= \dfrac{\text{حا}^2 \theta}{\text{حتا}^2 \theta} = \text{ظا}^2 \theta$

حاول بنفسك

ضع فى أبسط صورة كلًا من المقادير الآتية :

١ $\dfrac{1}{\text{حا}^2 \theta} - \dfrac{1}{\text{ظا}^2 \theta}$ ٢ $\text{حا} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{قا} (2\pi - \theta)$ ٣ $\dfrac{1 - \text{حا}^2 \theta}{\text{حتا}^2 \theta - 1}$

المتطابقات المثلثية

* **لإثبات صحة المتطابقة المثلثية نتبع إحدى الطريقتين :**

١ نبدأ بأحد طرفى المتطابقة ونستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لوضعه على نفس صورة الطرف الآخر.

٢ نضع كلًا من طرفى المتطابقة المثلثية فى أبسط صورة لإثبات أن الطرفين لهما نفس الناتج عند وضعهما فى أبسط صورة.

مثال ٢

أثبت صحة المتطابقة : $\text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta = 2 \text{حا}^2 \theta - 1$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta = \text{حا}^2 \theta - (1 - \text{حا}^2 \theta)$

$= \text{حا}^2 \theta - 1 + \text{حا}^2 \theta = 2 \text{حا}^2 \theta - 1 =$ الطرف الأيسر.

لاحظ أن

$\text{حتا}^2 \theta = 1 - \text{حا}^2 \theta$

مثال ٣

أثبت صحة المتطابقة : $\text{حا}^4 \theta - \text{حتا}^4 \theta = 1 - 2 \text{حتا}^2 \theta$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{حا}^4 \theta - \text{حتا}^4 \theta$

$= (\text{حا}^2 \theta + \text{حتا}^2 \theta)(\text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta)$

$= 1 \times (\text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta)$

$= 1 - \text{حتا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta = 1 - 2 \text{حتا}^2 \theta =$ الطرف الأيسر.

لاحظ أن

$\text{حا}^2 \theta + \text{حتا}^2 \theta = 1$

$\text{حا}^2 \theta = 1 - \text{حتا}^2 \theta$

مثـال ٤

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{حا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{حتا}\,\theta} = ١ + \text{حتا}\,\theta$

الحـل

الطرف الأيمن $= \frac{\text{حا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{حتا}\,\theta} = \frac{١ - \text{حتا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{حتا}\,\theta} = \frac{(١ + \text{حتا}\,\theta)\,\cancel{(١ - \text{حتا}\,\theta)}}{\cancel{١ - \text{حتا}\,\theta}} = ١ + \text{حتا}\,\theta =$ الطرف الأيسر.

حاول بنفسك

أثبت صحة المتطابقتين الآتيتين :

$\boxed{١}$ $\frac{\text{حتا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{حا}\,\theta} = ١ - \text{حا}\,\theta$

$\boxed{٢}$ $(\text{حا}\,\theta + \text{حتا}\,\theta)^{٢} + (\text{حا}\,\theta - \text{حتا}\,\theta)^{٢} = ٢$

مثـال ٥

أثبت صحة المتطابقة : $\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta = \text{قتا}\,\theta\ \text{قا}\,\theta$

الحـل

الطرف الأيمن $= \text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta$

$= \frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta} + \frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}$

$= \frac{\text{حا}^{٢}\,\theta + \text{حتا}^{٢}\,\theta}{\text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta}$

$= \frac{١}{\text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta}$

$= \text{قتا}\,\theta\ \text{قا}\,\theta =$ الطرف الأيسر.

لاحظ أنه

- لسهولة الإثبات نكتب المقدار بدلالة حا θ ، حتا θ فقط وذلك باستخدام العلاقات الآتية :
- $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}$
- $\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{حتا}\,\theta}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{حا}\,\theta}$

مثـال ٦

أثبت صحة المتطابقة : $٢\,\text{حتا}^{٢}\,\theta - ١ = \frac{١ - \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}$

الحـل

الطرف الأيسر $= \frac{١ - \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta} = \frac{١ - \frac{\text{حا}^{٢}\,\theta}{\text{حتا}^{٢}\,\theta}}{\text{قا}^{٢}\,\theta} = \frac{١ - \frac{\text{حا}^{٢}\,\theta}{\text{حتا}^{٢}\,\theta}}{\frac{١}{\text{حتا}^{٢}\,\theta}} = \left(١ - \frac{\text{حا}^{٢}\,\theta}{\text{حتا}^{٢}\,\theta}\right) \times \text{حتا}^{٢}\,\theta = \text{حتا}^{٢}\,\theta - \text{حا}^{٢}\,\theta$

$= \text{حتا}^{٢}\,\theta - (١ - \text{حتا}^{٢}\,\theta) = \text{حتا}^{٢}\,\theta - ١ + \text{حتا}^{٢}\,\theta = ٢\,\text{حتا}^{٢}\,\theta - ١ =$ الطرف الأيمن.

مثال ٧

أثبت صحة المتطابقة : $\text{قا}^٢\,\theta - \text{طا}^٢\,\theta\ \text{حا}^٢\,\theta = \text{حتا}^٢\,\theta + ٢\ \text{حا}^٢\,\theta$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{قا}^٢\,\theta - \text{طا}^٢\,\theta\ \text{حا}^٢\,\theta = \dfrac{١}{\text{حتا}^٢\,\theta} - \dfrac{\text{حا}^٢\,\theta}{\text{حتا}^٢\,\theta} \times \text{حا}^٢\,\theta$

$= \dfrac{١}{\text{حتا}^٢\,\theta} - \dfrac{\text{حا}^٤\,\theta}{\text{حتا}^٢\,\theta} = \dfrac{١ - \text{حا}^٤\,\theta}{\text{حتا}^٢\,\theta} = \dfrac{(١ + \text{حا}^٢\,\theta)\cancel{(١ - \text{حا}^٢\,\theta)}}{\cancel{١ - \text{حا}^٢\,\theta}}$

$= ١ + \text{حا}^٢\,\theta$ (١)

الطرف الأيسر $= \text{حتا}^٢\,\theta + ٢\ \text{حا}^٢\,\theta = ١ - \text{حا}^٢\,\theta + ٢\ \text{حا}^٢\,\theta$

$= ١ + \text{حا}^٢\,\theta$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الطرفين متساويان.

حاول بنفسك

أثبت صحة المتطابقة : $\dfrac{١ - \text{ظتا}^٢\,\theta}{١ + \text{ظتا}^٢\,\theta} = ٢\ \text{حا}^٢\,\theta - ١$

مثال ٨

إذا كان : $\text{حا}\,\theta + \text{حا}\,(٢٧٠^\circ - \theta) = \dfrac{١}{٢}$ **أوجد قيمة :** $\text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta$ حيث $\theta \in\ ]\ ٠ ، \dfrac{\pi}{٢}\ [$.

الحل

$\because\ \text{حا}\,\theta + \text{حا}\,(٢٧٠^\circ - \theta) = \dfrac{١}{٢}$

$\therefore\ \text{حا}\,\theta - \text{حتا}\,\theta = \dfrac{١}{٢}$ وبتربيع الطرفين.

$\therefore\ \text{حا}^٢\,\theta - ٢\ \text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta + \text{حتا}^٢\,\theta = \dfrac{١}{٤}$

$\therefore\ ١ - ٢\ \text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta = \dfrac{١}{٤}$

$\therefore\ -٢\ \text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta = \dfrac{-٣}{٤}$

$\therefore\ \text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta = \dfrac{٣}{٨}$

تمارين 8

على المتطابقات المثلثية

اختبر نفسك

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من العلاقات الآتية تمثل متطابقة ؟

(أ) جتا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) جا θ = جتا θ

(جـ) جا $(\pi - \theta)$ = جا θ (د) جا $(2\pi - \theta) = -\frac{1}{2}$

(٢) أى من العلاقات الآتية تمثل معادلة ؟

(أ) طا $\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ = − ظتا θ (ب) جتا $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ = − جا θ

(جـ) جتا $(-\theta)$ = جتا θ (د) ظتا θ = − طا 30°

(٣) طا θ قتا θ = ...

(أ) ١ (ب) جتا θ (جـ) قا θ (د) قتا θ

(٤) 📖 $\frac{\text{طا } \theta \text{ ظتا } \theta}{\text{قا } \theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) جا θ (ب) جتا θ (جـ) قا θ (د) قتا θ

(٥) $1 - \frac{1}{\text{قا}^2 \, 37^\circ}$ = ...

(أ) طا^2 37° (ب) ظتا^2 37° (جـ) جتا^2 37° (د) جا^2 37°

(٦) ٥ جتا^2 30° + ٥ جا^2 30° = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٢٥ (د) ١٠

(٧) $\frac{3}{\text{جا } \theta} \times \frac{-2}{\text{قتا } \theta}$ = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{-1}{6}$

(٨) جا^2 $(180^\circ - \theta)$ + جا^2 $(270^\circ - \theta)$ = ...

(أ) ٢ جا^2 θ (ب) جتا^2 θ (جـ) ١ (د) −١

(٩) $(1 + \text{ظتا } \theta)^2 - 2 \text{ ظتا } \theta$ = ...

(أ) قا^2 θ (ب) جتا^2 θ (جـ) قتا^2 θ (د) − قتا^2 θ

(١٠) حا θ حتا θ طا θ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) حا^2 θ (ب) حتا^2 θ (جـ) طا^2 θ (د) ١ − حا^2 θ

(١١) $\frac{\text{١ − حا}^2\ \theta}{\text{١ − حتا}^2\ \theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) طا^2 θ (د) طتا^2 θ

(١٢) $\frac{\text{قا}^2\ \theta - \text{طا}^2\ \theta}{\text{حا}^2\ \theta + \text{حتا}^2\ \theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) ١ (ب) طا^2 θ (جـ) −١ (د) قا^2 θ

(١٣) المقدار : حتا (٩٠° − θ) قا (θ − ٩٠°) فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) حا^2 θ (د) حتا^2 θ

(١٤) المقدار : $\frac{\text{١ − حتا}^2\ \beta}{\text{حا}^2\ \beta - \text{١}}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) − طا^2 β (ب) − طتا^2 β (جـ) طا^2 β (د) طتا^2 β

(١٥) المقدار : $\frac{\text{١ + طا}^2\ \theta}{\text{١ + طتا}^2\ \theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) طا^2 θ (ب) طتا^2 θ (جـ) ١ (د) حتا^2 θ

(١٦) حا^2 θ + حتا^2 θ + طا^2 θ = ...

(أ) ١ (ب) طتا^2 θ (جـ) قتا^2 θ (د) قا^2 θ

(١٧) (طا^2 ٥٠° − قا^2 ٥٠°)° = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٥ (د) −٥

(١٨) ٢ حا^2 θ + حتا^2 θ + $\frac{\text{١}}{\text{قا}^2\ \theta}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) طا^2 θ (د) قا^2 θ

(١٩) حا θ قتا θ + ٢ حتا θ قا θ + ٣ طا θ طتا θ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٠) (١− حتا θ) (١ + حتا θ) (١ + طتا^2 θ) = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) حا θ (د) طا θ

(٢١) $\frac{\text{حا س حتا س طا س + حا س حتا س طتا س}}{\text{حا س قا س}}$ = ...

(أ) طتا س (ب) طا س (جـ) حتا س (د) قتا س

(٢٢) $\frac{\text{حا}\ \theta}{\text{قتا}\ \theta} + \frac{\text{حتا}\ \theta}{\text{قا}\ \theta}$ = ...

(أ) طا θ (ب) حا θ + حتا θ (جـ) قا θ قتا θ (د) ١

(٢٣) $\frac{\text{حا } \theta \text{ طا } \theta}{(١ + \text{حتا } \theta)(١ - \text{حتا } \theta)}$ = ...

(أ) حا θ (ب) حا² θ (جـ) قا θ (د) قتا θ

(٢٤) $\frac{٦ \text{ حتا}^٢ \theta - \text{حا}^٢ \theta + ١}{٧ \text{ حتا } \theta}$ = ...

(أ) حا θ (ب) حتا θ (جـ) − حا θ (د) − حتا θ

(٢٥) $\frac{(\text{قا س} + \text{طا س})(١ - \text{حا س})}{\text{حتا س}}$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) طا س (د) قا س

(٢٦) $\frac{\text{حتا}^٢ \text{ س}}{١ - \text{حا س}} + \frac{\text{حتا}^٢ \text{ س}}{١ + \text{حا س}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٢ حا س

(جـ) ٢ حتا س (د) حا س + حتا س

(٢٧) $\frac{\text{حتا س} + ١}{\text{قا س}} - \text{حتا}^٢ \text{ س}$ = ...

(أ) حتا س (ب) حا س (جـ) حتا² س (د) حا² س

(٢٨) $\frac{١ - \text{طا س}}{١ - \text{طتا س}}$ = ...

(أ) − طا س (ب) طا س (جـ) − طتا س (د) طتا س

(٢٩) (قا θ − حتا θ)² + (قتا θ − حا θ)² − (طتا θ − طا θ)² = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٠) إذا كان : قتا² θ = $\frac{٢٥}{٩}$ فإن : طتا² θ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{١٦}{٩}$ (د) $\frac{٩}{١٦}$

(٣١) إذا كان : طا² θ = ١٥ فإن : قا² θ = ...

(أ) ٢٢٥ (ب) ٢٢٦ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(٣٢) إذا كان : طتا θ = $\frac{١}{٣}$ فإن : قتا² θ = ...

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{١٠}{٩}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٣) إذا كان : حا θ + قتا θ = ٥ فإن : حا² θ + قتا² θ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٣ (د) ٢٥

(٣٤) إذا كان : حا θ − حتا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث θ ∋]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن : حا θ حتا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٩}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٤١}{٥٠}$ (د) $\frac{٩}{٥٠}$

(٣٥) إذا كان : قتا θ − ظتا θ = $\frac{١}{٣}$ فإن : قتا θ + ظتا θ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

(٣٦) إذا كان : ظا θ + ظتا θ = ٣ فإن : ظا^٢ θ + ظتا^٢ θ = ...

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ١

(٣٧) $\frac{\text{حا}^٤ \theta - \text{حتا}^٤ \theta}{\text{حا}^٢ \theta - \text{حتا}^٢ \theta}$ = ...

(أ) ظا θ قا θ (ب) حا^٢ θ − حتا^٢ θ

(جـ) قتا^٢ θ − ظتا^٢ θ (د) ظا^٢ θ − قا^٢ θ

(٣٨) إذا كان : حا^م θ × قتا^٦ θ = حا θ فإن : م = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٣٩) $\frac{\text{حا}^٣ \theta + \text{حتا}^٣ \theta}{١ - \text{حا} \theta \text{ حتا} \theta}$ = ...

(أ) حتا θ − حا θ (ب) حتا θ + حا θ (جـ) ٢ قتا^٢ θ (د) ٢ حا^٢ θ

(٤٠) $\frac{١ - \text{حتا س}}{\text{حا س}}$ + $\frac{\text{حا س}}{١ - \text{حتا س}}$ = ...

(أ) ٢ قا س (ب) ٢ قتا س (جـ) ٢ ظتا س (د) ٢ حا س

(٤١) (١ + حا^٢ θ)^٢ + ٢ (١ + حا^٢ θ) (١ + حتا^٢ θ) + (١ + حتا^٢ θ)^٢ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤٢) إذا كان : ٣ حتا^٢ ٣٦° + ٣ حتا ٥٤° حا ٣٦° = ٧ − ٢ م فإن : م^٢ + ١ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣ حا^٢ ٣٦°

(٤٣) (حا θ − حتا θ)^٤ − (حا θ + حتا θ)^٤ = ...

(أ) $\frac{٨}{\text{قا} \theta \text{ قتا} \theta}$ (ب) $\frac{-٨}{\text{قا} \theta \text{ قتا} \theta}$

(جـ) −٤ حا θ حتا θ (د) −١٦ قا θ قتا θ

(٤٤) إذا كانت θ قياس زاوية حادة فإن : $\sqrt{\frac{١ - \text{حا} \theta}{١ + \text{حا} \theta}}$ − $\sqrt{\frac{١ + \text{حا} \theta}{١ - \text{حا} \theta}}$ = ...

(أ) − ظا θ (ب) −٢ ظا θ (جـ) ظا θ (د) ظتا θ

(٤٥) $\frac{\text{حا}^2\theta + \text{حتا}^4\theta}{\text{حتا}^2\theta + \text{حا}^4\theta}$ = ...

(أ) حا^2 θ حتا^2 θ (ب) ١ (جـ) حا θ حتا θ (د) طا^2 θ

(٤٦) إذا كان : قا^2 θ + طا^2 θ = ك فإن : قا^4 θ − طا^4 θ = ...

(أ) ك (ب) ٢ + ك (جـ) ٢ − ك (د) ك^2

(٤٧) إذا كان : قا θ قتا θ = ٢ $\sqrt{٢}$ فإن : $\frac{\text{قا}^6\theta - \text{قا}^4\theta}{\text{٨ طا}^2\theta\ \text{حا}^4\theta}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٤٨) إذا كان : $\frac{\text{قا}\theta - \text{حتا}\theta}{\text{قتا}\theta - \text{حا}\theta}$ = طا^ن θ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٩) إذا كان أ ب جـ ء رباعى دائرى فإن : حتا أ + حتا ب + حتا جـ + حتا ء = ...

(أ) حتا ٣٦٠° (ب) حتا ١٨٠° (جـ) حتا ٩٠° (د) ٤ حتا أ

(٥٠) إذا كانت : أ = ٢ حا^2 θ + ٥ حتا^2 θ فإن : أ ∈ ....

(أ) [٠ ، ٣] (ب) [١ ، ٥] (جـ) [٠ ، ٥] (د) [٢ ، ٥]

(٥١) إذا كان : أ = ٢ حاس + حتاس ، ب = ٢ حتاس − حاس فإن : أ^2 + ب^2 = ...

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٨ حاس حتاس (د) ٤ حا^2 س + ٥ حتا^2 س

(٥٢) إذا كان θ ، α قياسى زاويتين حادتين وكان θ + α = ٩٠° فإن : حا^2 θ + حا^2 α = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ حا^2 θ (د) ٢ حتا^2 θ

(٥٣) فى Δ أ ب جـ إذا كان : حا^2 أ + حتا^2 ب = ١ فإن : Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) متساوى الأضلاع. (ب) متساوى الساقين. (جـ) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

(٥٤) إذا كان : طا θ = ٤ فإن : $\frac{\text{حا}^2\theta + \text{حتا}^2\theta}{\text{حا}^2\theta - \text{حتا}^2\theta}$ = ...

(أ) $\frac{١٧}{١٥}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{-٧}{١٥}$ (د) −١

(٥٥) $\frac{\text{حتا}^2\theta - \text{حا}\theta - ١}{١ + \text{حا}\theta}$ = ...

(أ) −١ (ب) حتا θ (جـ) − حا θ (د) حا θ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب فى أبسط صورة كلًا من المقادير الآتية «حيث θ قياس زاوية معرف عندها جميع الدوال المثلثية ومقلوباتها» :

(١) $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta} - \frac{١}{\text{ظتا}^{٢}\theta}$

(٢) $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)\ \text{قا}\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$

(٣) $\text{جا}(\pi-\theta)\ \text{قتا}(\pi-\theta)$

(٤) $\frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)}{\text{جتا}(٢\pi-\theta)}$

(٥) $(\text{جا}\,\theta+\text{جتا}\,\theta)^{٢}-٢\ \text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta$

(٦) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)\ \text{قا}(-\theta)$

(٧) $\text{جتا}^{٢}\theta\ \text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta$

(٨) $\text{جا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta-\text{جتا}^{٢}\theta$

(٩) $\text{جا}\,\theta\ \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)\ \text{ظا}\,\theta$

(١٠) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)\text{جتا}\,\theta-\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)\text{جا}(\pi-\theta)$

(١١) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)\ \text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)\ \text{قتا}(\pi-\theta)$

(١٢) $\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta\ (\text{ظا}\,\theta+\text{ظتا}\,\theta)$

(١٣) $\frac{١+\text{ظتا}^{٢}\left(\frac{٣\pi}{٢}-\theta\right)}{١+\text{ظا}^{٢}\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)}$

(١٤) $\frac{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta}+\frac{\text{ظا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta}$

٢ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(١) $\text{ظا}\,\theta+\text{ظتا}\,\theta=\text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta$

(٢) $\text{قتا}\,\theta-\text{جا}\,\theta=\text{جتا}\,\theta\ \text{ظتا}\,\theta$

(٣) $٢\ \text{جا}^{٢}\theta+\text{جتا}^{٢}\theta=١+\text{جا}^{٢}\theta$

(٤) $\text{جا}^{٢}\alpha+\text{ظا}^{٢}\alpha\ \text{جا}^{٢}\alpha=\text{ظا}^{٢}\alpha$

(٥) $\text{جا}(٩٠^{\circ}-\mu)\ \text{جتا}\,\mu=١-\text{جا}^{٢}\mu$

(٦) $\text{ظتا}^{٢}\mu-\text{جتا}^{٢}\mu=\text{ظتا}^{٢}\mu\ \text{جتا}^{٢}\mu$

(٧) $\text{قا}^{٢}\beta+\text{قتا}^{٢}\beta=\text{قا}^{٢}\beta\ \text{قتا}^{٢}\beta$

(٨) $\text{قا}\,\theta-\text{جا}\,\theta\ \text{ظا}\,\theta=\text{جتا}\,\theta$

(٩) $\text{ظا}^{٢}\theta+\text{ظتا}^{٢}\theta-(\text{قا}^{٢}\theta+\text{قتا}^{٢}\theta)=-٢$

(١٠) $\text{ظا}^{٢}\theta\ \text{جتا}^{٢}\theta+\text{ظتا}^{٢}\theta\ \text{جا}^{٢}\theta=١$

(١١) $(\text{جا}\,\theta+\text{جتا}\,\theta)^{٢}+(\text{جا}\,\theta-\text{جتا}\,\theta)^{٢}=٢$

(١٢) $\text{جا}^{٣}\theta\ \text{قتا}\,\theta+\text{جتا}^{٣}\theta\ \text{قا}\,\theta=١$

(١٣) $(١-\text{جا}\,\theta)(\text{قا}\,\theta+\text{ظا}\,\theta)=\text{جتا}\,\theta$

(١٤) $\text{جا}\,\theta\ \text{جا}(٩٠^{\circ}-\theta)\ \text{ظا}\,\theta=١-\text{جتا}^{٢}\theta$

(١٥) $\text{جتا}^{٢}\theta\ \text{ظا}^{٢}\theta+\text{جتا}^{٢}\theta+\text{ظتا}^{٢}\theta=\text{قتا}^{٢}\theta$

(١٦) $\text{جا}^{٤}\theta-\text{جتا}^{٤}\theta+\text{جتا}^{٢}\theta=\text{جا}^{٢}\theta$

(١٧) $\text{جا}^{٢}\alpha\ \text{جا}^{٢}\beta+\text{جا}^{٢}\alpha\ \text{جتا}^{٢}\beta+\text{جتا}^{٢}\alpha=١$

٣ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(١) $\frac{\text{حتا}\,\theta \times \text{ظا}\,\theta}{\text{قتا}\,\theta} = ١ - \text{حتا}^{٢}\,\theta$

(٢) $\frac{\text{ظتا}\,\theta}{١ + \text{ظتا}^{٢}\,\theta} = \text{حا}\,\theta \times \text{حتا}\,\theta$

(٣) $\frac{\text{حتا}\,\theta}{١ + \text{حا}\,\theta} + \text{ظا}\,\theta = \text{قا}\,\theta$

(٤) $\frac{\text{حتا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{حا}\,\theta} = ١ + \text{حا}\,\theta$

(٥) $\frac{١ - \text{حا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{حتا}^{٢}\,\theta} = \text{قتا}^{٢}\,\theta - ١$

(٦) $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta} = ٢\,\text{حتا}^{٢}\,\theta - ١$

(٧) $\frac{\text{قتا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}\,(١ - \text{حا}^{٢}\,\theta) = \text{ظتا}\,\theta$

(٨) $\frac{١}{\text{حا}^{٢}\,(٩٠^{\circ} - \theta)} - \text{ظا}^{٢}\,\theta = ١$

(٩) $\frac{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}{\text{قا}^{٤}\,\theta} = ١ - \text{حا}^{٢}\,\theta$

(١٠) $\frac{١}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\alpha} - \frac{١}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\beta} = \text{حتا}^{٢}\,\alpha - \text{حتا}^{٢}\,\beta$

(١١) $\frac{\text{حتا}^{٤}\,\theta - \text{حتا}^{٢}\,\theta}{\text{حا}^{٤}\,\theta - \text{حا}^{٢}\,\theta} = \text{قا}^{٢}\,\theta - \text{ظا}^{٢}\,\theta$

(١٢) $(\text{قا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta)^{٢} = \frac{١ - \text{حا}\,\theta}{١ + \text{حا}\,\theta}$

(١٣) $\frac{١}{١ + \text{ظتا}\,\theta} = \frac{\text{ظا}\,\theta}{١ + \text{ظا}\,\theta}$

(١٤) $\frac{\text{حا}^{٣}\,\alpha + \text{حتا}^{٣}\,\alpha}{\text{حا}\,\alpha + \text{حتا}\,\alpha} + \frac{\text{حا}^{٣}\,\alpha - \text{حتا}^{٣}\,\alpha}{\text{حا}\,\alpha - \text{حتا}\,\alpha} = ٢$

(١٥) $\frac{\text{حتا}^{٢}\,\theta - \text{حا}^{٢}\,\theta}{\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}^{٢}\,\theta + \text{حتا}\,\theta\,\text{حا}^{٢}\,\theta} = \text{قتا}\,\theta - \text{قا}\,\theta$

(١٦) $\frac{\text{حا}\,\theta\,\text{حا}\,(٩٠^{\circ} - \theta)}{\text{ظا}\,\theta} + \frac{\text{ظا}\,(١٨٠^{\circ} + \theta)}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta} = ١$

(١٧) $(\text{حا}\,\theta + \text{قتا}\,\theta)^{٢} + (\text{حتا}\,\theta + \text{قا}\,\theta)^{٢} = \text{ظا}^{٢}\,\theta + \text{ظتا}^{٢}\,\theta + ٧$

(١٨) $\frac{١ - (\text{حا}\,\theta + \text{حتا}\,\theta)^{٢}}{\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta - \text{ظتا}\,\theta} = ٢\,\text{ظا}^{٢}\,\theta$

---

٤ إذا كان : $\frac{٣\,\text{حتا}\,\theta - ٢\,\text{حا}\,\theta}{٣\,\text{حتا}\,\theta + ٢\,\text{حا}\,\theta} = \frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة : ظا θ «$-\frac{٣}{١٠}$»

---

٥ إذا كانت : $\text{حا}\,\theta + \text{حتا}\,\theta = \frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة : حا θ حتا θ حيث : $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ «$\frac{٥}{٨}$»

---

٦ إذا كان : $\text{قا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta = \frac{١}{٤}$ فاحسب قيمة كل من : قا θ ، ظا θ «$\frac{١٧}{٨}$ ، $\frac{١٥}{٨}$»

---

٧ إذا كان : $\frac{\text{حا}^{٢}\,\theta - \text{حتا}^{٢}\,\theta}{\text{حا}\,\theta - \text{حتا}\,\theta} = \frac{٥}{٤}$ فأثبت أن : $\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta = \frac{٩}{٣٢}$

8 إذا كان : ظا θ + ظتا θ = ٥ **أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي :**

(١) ظا^{٢} θ + ظتا^{٢} θ «٢٣»

(٢) ظا^{٣} θ + ظتا^{٣} θ «١١٠»

(٣) ظا θ − ظتا θ «± $\sqrt{٢١}$»

(٤) ظا^{٢} θ − ظتا^{٢} θ «± ٥ $\sqrt{٢١}$»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان : س + ص = ٣٠° فإن : ظا (س + ٢ ص) ظا (٢ س + ص) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢ $\sqrt{٣}$

(٢) إذا كانت : جا θ = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن : $\sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}$ = ...

(أ) $\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}}$ (ب) $\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ} - \text{ب}}}$ (جـ) $\frac{\text{أ}}{\sqrt{١ + \text{أ}^{٢}}}$ (د) $\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}^{٢} - \text{أ}^{٢}}}$

(٣) إذا كان : $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ فإن : $\sqrt{٤ + ٤\ \text{ظا}^{٢}\,\theta}$ = ...

(أ) ٢ قا θ (ب) ٢ جتا θ (جـ) −٢ قا θ (د) −٢ جتا θ

(٤) إذا كان : جا θ ، جتا θ هما جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} + ب س − ١ = ٠ فإن : ب = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −٤

(٥) إذا كان : ٣ جا θ + ٤ جتا θ = ٥ فإن : ٣ جتا θ − ٤ جا θ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) صفر

(٦) إذا كانت : θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[وكانت ظا θ + ظتا θ = ٨ فإن : جا θ + جتا θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٧) إذا كانت : θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن : $\sqrt{\text{قا}^{٢}\,\theta + \text{قتا}^{٢}\,\theta}$ = ...

(أ) $\frac{\text{قا}\,\theta}{\text{قتا}\,\theta}$ (ب) ظا θ + ظتا θ (جـ) قا θ − ظا θ (د) قا θ + ظا θ

(٨) إذا كان : جا أ + جا^{٢} أ = ١ فإن : جتا^{٢} أ + جتا^{٤} أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) جا^{٢} أ (د) ٢

(٩) إذا كان : قا س + ظا س = أ فإن : جا س = ...

(أ) $\frac{\text{أ}^{٢} - ١}{\text{أ}^{٢} + ١}$ (ب) $\frac{١ - \text{أ}^{٢}}{١ + \text{أ}^{٢}}$ (جـ) $\frac{\text{أ} - ١}{\text{أ} + ١}$ (د) $\frac{١ - \text{أ}}{١ + \text{أ}}$

(١٠) إذا كان : $جا^2 \theta + جا^2 ٢\theta + جا^2 ٣\theta + \cdots + جا^2 ١٠٠\theta = ن$

فإن : $جتا^2 \theta + جتا^2 ٢\theta + جتا^2 ٣\theta + \cdots + جتا^2 ١٠٠\theta =$ ....

(أ) ١ − ن　　(ب) ١٠٠ ن　　(جـ) ١٠٠ − ن　　(د) ن − ١٠٠

(١١) $جا^2 ١° + جا^2 ٢° + جا^2 ٣° + \cdots + جا^2 ٩٠° =$ ....

(أ) $٤٤\frac{١}{٢}$　　(ب) ٤٥　　(جـ) $٤٥\frac{١}{٢}$　　(د) ٤٦

(١٢) $\dfrac{جتا^2 ١° + جتا^2 ٢° + جتا^2 ٣° + \cdots + جتا^2 ١٨٠°}{جتا ١° + جتا ٢° + جتا ٣° + \cdots + جتا ١٨٠°} =$ ....

(أ) −٩٠　　(ب) −٨٨　　(جـ) ٨٨　　(د) ٩٠

---

٢ **أثبت أن :** $جا^6 \theta + جتا^6 \theta = ١ - ٣ جا^2 \theta\, جتا^2 \theta$

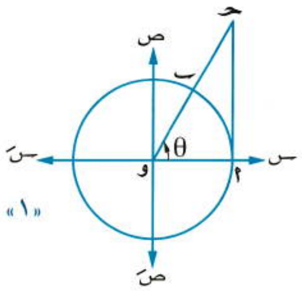
---

٣ **فى الشكل المقابل :**

دائرة وحدة مركزها و

إذا كان : ب جـ = جا θ ، $\overline{أجـ}$ مماسًا للدائرة عند أ

أوجد قيمة : $جتا^2 \theta + جا \theta$



«١»

الدرس 2 حل المعادلات المثلثية

المقصود بحل المعادلة المثلثية هو إيجاد قيم المتغير التى تحقق هذه المعادلة وذلك بالاستعانة بالمتطابقات المثلثية.

الحل العام للمعادلة المثلثية

لإيجاد الحل العام للمعادلة المثلثية على الصورة :

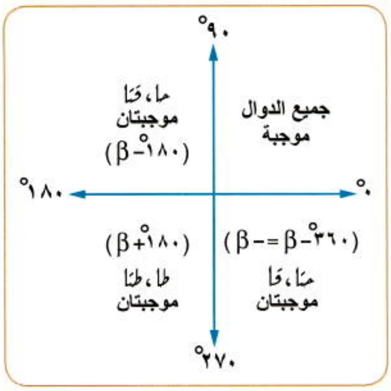
حتا θ = أ أو حا θ = أ أو طا θ = أ نتبع الخطوات الآتية :

١ نوجد قياس الزاوية الحادة ولتكن β التى تحقق

المعادلة : حتا θ = |أ| أو حا θ = |أ| أو طا θ = |أ|

٢ نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية حسب إشارة أ

(انظر الشكل المقابل)



٣ نوجد قيم الزاوية θ حيث إن :

- إذا كانت θ تقع فى الربع الأول فإن : θ = β
- إذا كانت θ تقع فى الربع الثانى فإن : θ = ١٨٠° − β
- إذا كانت θ تقع فى الربع الثالث فإن : θ = ١٨٠° + β
- إذا كانت θ تقع فى الربع الرابع فإن : θ = ٣٦٠° − β

٤ نضيف عددًا من الدورات (٢ ن π) حيث ن ∈ ص إلى قيم θ لنحصل على الحل العام للمعادلة المثلثية.

مـلاحظـة

* $-1 \leq$ جا $\theta \leq 1$ ، $-1 \leq$ جتا $\theta \leq 1$ لجميع قيم θ الحقيقية

وبالتالى نجد أن المعادلتين : جا θ = أ ، جتا θ = أ ليس لهما حل فى مجموعة الأعداد الحقيقية

إذا كانت : أ $\notin [-1 ، 1]$

فمثلًا كل من المعادلات : جا $\theta = 1{,}3$ ، جتا $\theta = 2{,}5$ ، جا $\theta = -1{,}4$

، قا $\theta = 0{,}5$ ، قتا $\theta = -0{,}7$ ليس لها حلول حقيقية.

أى أنه ليس بالضرورة أن تكون لكل المعادلات المثلثية حلول حقيقية.

مثـال 1

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

1 جتا $\theta = \frac{1}{2}$ 2 2 جا $\theta - \sqrt{2} = 0$ 3 $\sqrt{3}$ ظا $\theta - 1 = 0$

الحـل

1 جتا $\theta = \frac{1}{2}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 60°$

أو θ تقع فى الربع الرابع. $\therefore \theta = 360° - 60° = 300°$ وهى تكافئ $-60°$

وبإضافة (2 ن π) حيث ن $\in$ ص إلى قيم θ

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} + 2$ ن π أو $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2$ ن π

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2$ ن π حيث ن $\in$ ص

2 جا $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 45°$

أو θ تقع فى الربع الثانى. $\therefore \theta = 180° - 45° = 135°$

وبإضافة (2 ن π) حيث ن $\in$ ص إلى قيم θ

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + 2$ ن π أو $\theta = \frac{3}{4}\pi + 2$ ن π

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{4} + 2$ ن π أو $\theta = \frac{3}{4}\pi + 2$ ن π حيث ن $\in$ ص

3 ظا $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 30°$

أو θ تقع فى الربع الثالث. $\therefore \theta = 180° + 30° = 210°$

وبإضافة (٢ ن π) حيث ن $\in$ ص إلى قيم θ

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{٦} + ٢ ن \pi$ أو $\theta = \frac{٧}{٦} \pi + ٢ ن \pi$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٦} + ٢ ن \pi$ أو $\theta = \frac{٧}{٦} \pi + ٢ ن \pi$ حيث ن $\in$ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة بصورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٦} + ن \pi$ حيث ن $\in$ ص

وذلك بإضافة ن π إلى أصغر قياس موجب.

ملاحظة

مما سبق يمكن استنتاج أن :

إذا كانت β أصغر قياس موجب يحقق المعادلة ، ن $\in$ ص فإن :

١ الحل العام للمعادلة جا θ = أ هو : $\theta = \beta + ٢ \pi ن$ ، $\theta = (\pi - \beta) + ٢ \pi ن$

ويمكن أن يكتب : $\theta = (-١)^{ن} \times \beta + \pi ن$

٢ الحل العام للمعادلة جتا θ = أ هو : $\theta = \pm \beta + ٢ \pi ن$

٣ الحل العام للمعادلة ظا θ = أ هو : $\theta = \beta + \pi ن$

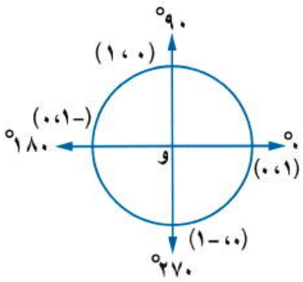
مثال ٢

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

١ جا $\theta = ٠$ ٢ جتا $\theta = ٠$ ٣ جا $\theta = ١$ ٤ جتا $\theta = -١$

الحل

١ جا $\theta = ٠$ $\therefore$ $\theta = ٠°$ أو $\theta = ١٨٠°$



وبإضافة (٢ π ن) حيث ن $\in$ ص إلى قيم θ

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو :

$\theta = ٢ \pi ن$ أو $\theta = \pi + ٢ \pi ن$ حيث ن $\in$ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة فى صورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \pi ن$ حيث ن $\in$ ص

٢ جتا $\theta = ٠$ $\therefore$ $\theta = ٩٠°$ أو $\theta = ٢٧٠°$

وبإضافة (٢ π ن) حيث ن $\in$ ص إلى قيم θ

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ \pi ن$ أو $\theta = \frac{٣}{٢} \pi + ٢ \pi ن$ حيث ن $\in$ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة فى صورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ ن حيث ن $\in$ ص

٣ حا $\theta = ١$ $\therefore \theta = ٩٠°$

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن حيث ن $\in$ ص

٤ حتا $\theta = -١$ $\therefore \theta = ١٨٠°$

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = \pi + ٢\pi$ ن حيث ن $\in$ ص

ملاحظة

مما سبق يمكن استنتاج الحل العام للمعادلات المثلثية للزوايا الربعية :

المعادلة	الحل العام
• حا $\theta = ٠$	$\theta = \pi$ ن
• حا $\theta = ١$	$\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن
• حا $\theta = -١$	$\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi$ ن
• حتا $\theta = ٠$	$\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ ن
• حتا $\theta = ١$	$\theta = ٢\pi$ ن
• حتا $\theta = -١$	$\theta = \pi + ٢\pi$ ن

حاول بنفسك

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

١ ٢ حا $\theta - ١ = ٠$ ٢ ٢ حتا $\theta + \sqrt{٣} = ٠$ ٣ ظا $\theta - \sqrt{٣} = ٠$

مثال ٣

أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ ظتا $\theta + ١ = ٠$ ٢ حتا$^٢ \theta -$ حتا $\theta = ٠$

الحل

١ ظتا $\theta = -١$ $\therefore$ ظا $\theta = -١$ (سالبة)

$\therefore$ θ تقع فى الربع الثانى. $\therefore \theta = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°$

أو θ تقع فى الربع الرابع. $\therefore \theta = ٣٦٠° - ٤٥° = ٣١٥°$

لاحظ أن

قياس الزاوية الحادة التى تحقق أن ظا $\theta = |-١|$ هو $٤٥°$

∴ أصغر قياس موجب يحقق المعادلة وهو 135°

∴ الحل العام هو : $\theta = \frac{3}{4}\pi + ن\pi$ حيث ن ∈ ص

٢ حتا θ (حتا θ − ١) = ٠

∴ إما حتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° أو θ = ٢٧٠° وهى تكافئ − ٩٠°

∴ $\theta = \frac{\pi}{2} + ن\pi$ حيث ن ∈ ص

أو حتا θ = ١ ∴ θ = ٠ ∴ θ = ٢ ن π حيث ن ∈ ص

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{2} + ن\pi$ أو θ = ٢ ن π حيث ن ∈ ص

مثال ٤

أوجد الحل العام للمعادلة : جا θ حتا θ = $\frac{1}{2}$ جا θ

الحل

∵ جا θ حتا θ − $\frac{1}{2}$ جا θ = ٠ ∴ جا θ (حتا θ − $\frac{1}{2}$) = ٠

∴ إما جا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أو θ = ١٨٠°

∴ θ = ن π حيث ن ∈ ص

أو حتا θ − $\frac{1}{2}$ = ٠ ∴ حتا θ = $\frac{1}{2}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول. ∴ θ = ٦٠°

أو θ تقع فى الربع الرابع. ∴ θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠° وهى تكافئ − ٦٠°

∴ $\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2ن\pi$ حيث ن ∈ ص

∴ الحل العام هو : θ = ن π أو $\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2ن\pi$ حيث ن ∈ ص

حاول بنفسك

أوجد الحل العام للمعادلة : ٢ جا θ حتا θ − $\sqrt{3}$ جا θ = ٠

حل المعادلة المثلثية فى الفترة [٠ ، ٢ π[

مثال ٥

إذا كانت : θ ∈ [٠ ، ٢ π[**أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :**

١ ٢ حتا θ + ١ = ٠ **٢** $\sqrt{2}$ قا θ − ٢ = ٠

الحل

١ ∵ ٢ جتا θ + ١ = ٠ ∴ جتا θ = $\frac{-1}{2}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{1}{2}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = ١٨٠° − ٦٠° = $\boxed{١٢٠°}$ أ، θ = ١٨٠° + ٦٠° = $\boxed{٢٤٠°}$ ∴ م.ح = {١٢٠° ، ٢٤٠°}

٢ ∵ $\sqrt{2}$ قا θ − ٢ = ٠ ∴ قا θ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$

∴ جتا θ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ قياسها ٤٥°

∴ θ = $\boxed{٤٥°}$ أ، θ = ٣٦٠° − ٤٥° = $\boxed{٣١٥°}$ ∴ م.ح = {٤٥° ، ٣١٥°}

مثال ٦

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ٤ جتا^2 θ − ٣ = ٠ حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢π[

الحل

∵ ٤ جتا^2 θ − ٣ = ٠ ∴ ٤ جتا^2 θ = ٣

∴ جتا^2 θ = $\frac{3}{4}$ ∴ جتا θ = ± $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ إما جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = $\boxed{٣٠°}$ أ، θ = ٣٦٠° − ٣٠° = $\boxed{٣٣٠°}$

أ، جتا θ = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (سالبة) ∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = $\boxed{١٥٠°}$ أ، θ = ١٨٠° + ٣٠° = $\boxed{٢١٠°}$

∴ مجموعة الحل = {٣٠°، ١٥٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠°}

حاول بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢π[:

١ $\sqrt{2}$ قا θ − ٢ = ٠ ٢ ظا^2 θ = ١

مثال ٧

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، π[

الحل

∵ ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ ∴ جتا θ (٢ جا θ + ٣) = ٠

∴ إما جتا θ = ٠ ∴ θ = $\boxed{٩٠^\circ}$ ، أ θ = ٢٧٠° (مرفوض لأن θ ∈ [٠ ، π[)

أ، ٢ جا θ + ٣ = ٠ ∴ جا θ = $\frac{-٣}{٢}$ (وهذه المعادلة ليس لها حل لأن -١ ≤ جا θ ≤ ١)

∴ م.ح = {٩٠°}

مثال ٨

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٤ جا^٢ θ − ٣ جا θ جتا θ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٢π[

الحل

∵ ٤ جا^٢ θ − ٣ جا θ جتا θ = ٠ ∴ جا θ (٤ جا θ − ٣ جتا θ) = ٠

∴ إما : جا θ = ٠ ومنها $\boxed{θ = ٠}$ أ، $\boxed{θ = ١٨٠^\circ}$

أ، ٤ جا θ − ٣ جتا θ = ٠ **أى** ٤ جا θ = ٣ جتا θ

أى $\frac{جا θ}{جتا θ} = \frac{٣}{٤}$ **أى** ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث.

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{٣}{٤}$ قياسها ٥٢َ ٣٦°

∴ $\boxed{θ = ٥٢َ\ ٣٦^\circ}$ ، أ θ = ١٨٠° + ٥٢َ ٣٦° = $\boxed{٥٢َ\ ٢١٦^\circ}$

∴ م.ح = {٠° ، ١٨٠° ، ٥٢َ ٣٦° ، ٥٢َ ٢١٦°}

حاول بنفسك

إذا كانت : ٠° < θ < ٣٦٠° **أوجد مجموعة حل المعادلة :** ٢ جا θ جتا θ = ٣ جتا^٢ θ

مثال ٩

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا^٢ θ − جتا θ − ١ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٢π[

الحــل

بالتعويض عن حا^2 θ = ١ − حتا^2 θ «لتوحيد النسب المثلثية فى المعادلة»

∴ ٢ (١ − حتا^2 θ) − حتا θ − ١ = ٠

∴ ٢ − ٢ حتا^2 θ − حتا θ − ١ = ٠

∴ ١ − حتا θ − ٢ حتا^2 θ = ٠

∴ (١ + حتا θ) (١ − ٢ حتا θ) = ٠

∴ إما : ١ + حتا θ = ٠ أى : حتا θ = −١

∴ θ = $\boxed{١٨٠°}$

أ، ١ − ٢ حتا θ = ٠

أى حتا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = $\boxed{٦٠°}$ أ، θ = ٣٦٠° − ٦٠° = $\boxed{٣٠٠°}$

∴ م.ح = {٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°}

استخدام التكنولوجيا

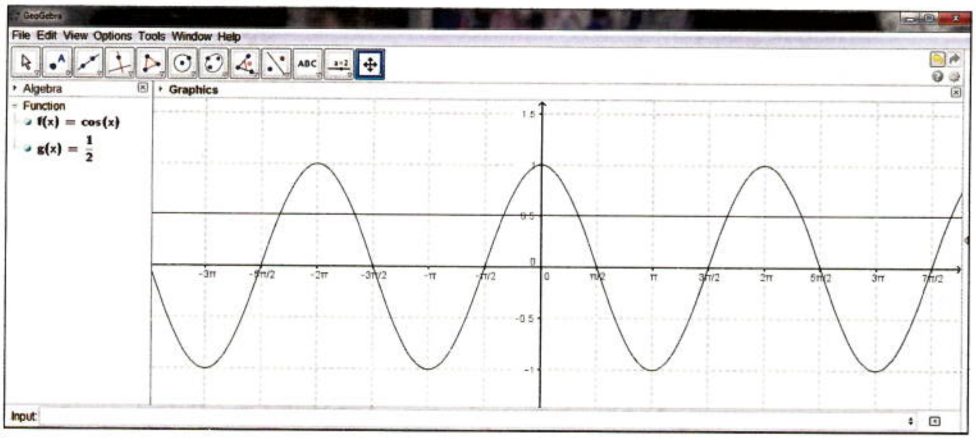
فى مثال (١) وجدنا أن :

الحل العام للمعادلة : حتا θ = $\frac{١}{٢}$ هو θ = ± $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ν π حيث ν ∈ ص

ويمكن التأكد من صحة الحل برسم الدالتين د$_١$: د$_١$ (θ) = حتا θ ، د$_٢$: د$_٢$ (θ) = $\frac{١}{٢}$

باستخدام أحد البرامج الرسومية وتحديد قيم θ المناظرة لنقط تقاطع الدالتين ومقارنتها

بقيم θ فى الحل العام عند وضع ν = ... ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ...



ونلاحظ من الرسم أن الدالتين تتقاطعان فى النقط :

... ، $\left(\frac{-٥}{٣}\pi ، \frac{١}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{-١}{٣}\pi ، \frac{١}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{١}{٣}\pi ، \frac{١}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{٥}{٣}\pi ، \frac{١}{٢}\right)$ ، ...

أى أن θ = ... ، $\frac{-٥}{٣}\pi$ ، $\frac{-١}{٣}\pi$ ، $\frac{١}{٣}\pi$ ، $\frac{٥}{٣}\pi$ ، ...

وهى نفس القيم التى نحصل عليها من الحل العام

عند التعويض عن ν = ... ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ...

تمارين 9

على حل المعادلات المثلثية

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرس

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) 📖 إذا كانت : ٠° ≤ θ < ٣٦٠° وكانت : جا θ + ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢) 📖 إذا كانت : ٠° ≤ θ < ٣٦٠° وكانت : جتا θ + ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٢٧٠° (د) ٣٦٠°

(٣) إذا كانت : ٠° ≤ θ < ٣٦٠° وكانت : قا θ − ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٤) 📖 إذا كان : ٢ جا θ − √٣ = ٠ وكانت θ ∈ [٠ ، ٢ π[فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° أ، ١٥٠° (ب) ٦٠° أ، ١٢٠° (جـ) ١٥٠° أ، ٢١٠° (د) ١٢٠° أ، ٢٤٠°

(٥) إذا كان : ٢ جتا θ + ١ = ٠ حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، θ ∈ [٠ ، ٢ π[

فإن : θ = ...

(أ) π/٣ (ب) ٢/٣ π (جـ) ٤/٣ π (د) ٥/٣ π

(٦) إذا كان : قا (− θ) = ٢ حيث θ ∈ [٠ ، π[فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٧) مجموعة حل المعادلة : جا θ − √٣ جتا θ = ٠ حيث θ ∈]π ، ٣/٢ π[هى ....

(أ) {٤/٣ π} (ب) {٧/٦ π} (جـ) {٥/٤ π} (د) {١/٣ π}

(٨) مجموعة حل المعادلة : √٣ ظا θ = ١ حيث ٩٠° < θ < ٢٧٠° هى ....

(أ) {٣٠°} (ب) {١٥٠°} (جـ) {٢١٠°} (د) {٢٤٠°}

(٩) 📖 مجموعة حل المعادلة : جا θ + جتا θ = ٠ حيث ١٨٠° < θ < ٣٦٠° تساوى ....

(أ) {٢١٠°} (ب) {٢٢٥°} (جـ) {٢٤٠°} (د) {٣١٥°}

(١٠) إذا كانت : θ ∈ [٠ ، π[، ظتا θ = ١ فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

(١١) إذا كانت : $\theta \in]\cdot , \frac{\pi}{٢}[$ ، جا θ ظا θ = $\frac{١}{٢}$ فإن مجموعة الحل هى ....

(أ) $\varnothing$ (ب) $\{\frac{\pi}{٣}\}$ (جـ) $\{\frac{٤}{٣}\pi\}$ (د) $\{\frac{٥}{٣}\pi\}$

(١٢) مجموعة حل المعادلة : جا^٢ θ + ١ = ٠ ، $\theta \in [\cdot , \pi]$ هى ....

(أ) $\{\frac{\pi}{٢}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{٤}\}$ (جـ) $\{\pi\}$ (د) $\varnothing$

(١٣) إذا كانت : $١٨٠^\circ \leq \theta < ٣٦٠^\circ$ وكانت : ٢ جتا θ + ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٢١٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٣٣٠°

(١٤) الحل العام للمعادلة : $\sqrt{٣}$ ظا θ − ١ = ٠ هو .... (ن ∈ ص)

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ + ن π (ب) ٢ ن $\pi \pm \frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ + ن π (د) ٢ ن $\pi \pm \frac{\pi}{٣}$

(١٥) الحل العام للمعادلة : جتا θ = $\frac{١}{٢}$ هو .... (ن ∈ ص)

(أ) ٢ ن $\pi \pm \frac{\pi}{٣}$ (ب) ٢ ن $\pi \pm \frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ + ن π (د) $\frac{\pi}{٣}$ + ن π

(١٦) الحل العام للمعادلة : ظا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = $\sqrt{٣}$ هو .... (ن ∈ ص)

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ + ن π (ب) $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ن π

(جـ) $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ن π (د) $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ن π أو $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ن π

(١٧) إذا كان : ٥ جاس = ١٢ جتاس حيث س ∈ $[\cdot , \pi]$ فإن : س ≃ ....

(أ) $١٥٧^\circ \ ٢٢' \ ٤٨''$ (ب) $١١٢^\circ \ ٣٧' \ ١٢''$ (جـ) $٢٢^\circ \ ٣٧' \ ١٢''$ (د) $٦٧^\circ \ ٢٢' \ ٤٨''$

(١٨) إذا كانت : ٣$^{\text{جا} \theta}$ = ١ حيث $\theta \in]\cdot , ٢\pi[$ فإن : θ = ...°

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) $\frac{٣\pi}{٢}$

(١٩) إذا كان : $\theta \in]\cdot^\circ , ٣٦٠^\circ[$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٧$^{\text{جا} \theta}$ = $\frac{١}{٤٩}$ هى ....

(أ) $\{٣٠^\circ\}$ (ب) $\{٣٠^\circ ، ١٥٠^\circ\}$ (جـ) $\{٢١٠^\circ ، ٣٣٠^\circ\}$ (د) $\varnothing$

(٢٠) إذا كان : جاس = $\frac{-١}{٢}$ ، جتاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث س ∈ $[\cdot , ٢\pi[$

فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{٥\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{٦}$ (د) $\frac{١١\pi}{٦}$

(٢١) إذا كانت س ∈ $[\cdot , ٢\pi[$ فإن مجموعة حل المعادلة : جتاس = $\frac{١}{٢}$ هى نفسها مجموعة حل المعادلة ....

(أ) ظاس = ٢ جاس (ب) ٢ جتا^٢ س = جتاس

(جـ) ٢ جتا^٢ س + ٣ جتاس = ٢ (د) جتا (س − $\frac{١}{٢}$) = ٠

(٢٢) إذا كانت : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن عدد حلول المعادلة : ٢ جا θ = ٣ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٣) إذا كانت : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن مجموعة حل المعادلة : طا $(\theta - ٩٠^\circ) = \sqrt{٣}$ هى ....

(أ) $\{٣٠^\circ ، ٢١٠^\circ\}$ (ب) $\{١٥٠^\circ ، ٢١٠^\circ\}$

(جـ) $\{١٥٠^\circ ، ٣٣٠^\circ\}$ (د) $\{٢١٠^\circ ، ٣٣٠^\circ\}$

(٢٤) إذا كانت : $٠ \leq$ س $< ٢\pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : جتا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٣}\right) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ....

(أ) $\left\{\frac{\pi}{٤} ، \frac{-\pi}{٤}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{\pi}{٤}\right\}$ (جـ) $\left\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{٧\pi}{١٢}\right\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{٥\pi}{١٢}\right\}$

(٢٥) إذا كانت : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ جتا^٢ $\theta - ١ = ٠$ هى ....

(أ) $\{٤٥^\circ ، ١٣٥^\circ ، ٢٢٥^\circ ، ٣١٥^\circ\}$ (ب) $\{٤٥^\circ ، ٣١٥^\circ\}$

(جـ) $\{١٣٥^\circ ، ٢٢٥^\circ\}$ (د) $\{٤٥^\circ ، ٢٢٥^\circ\}$

(٢٦) إذا كانت : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن مجموعة حل المعادلة : جتا^٢ θ − جتا $\theta = ٠$ هى ....

(أ) $\{٠^\circ ، ٩٠^\circ\}$ (ب) $\{٠^\circ ، ٩٠^\circ ، ١٨٠^\circ\}$

(جـ) $\{٠^\circ ، ٩٠^\circ ، ٢٧٠^\circ\}$ (د) $\{٩٠^\circ ، ٢٧٠^\circ\}$

(٢٧) إذا كانت : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا $\theta = ٠$ هى ....

(أ) $\{٠^\circ ، ٩٠^\circ ، ٢٧٠^\circ\}$ (ب) $\{٩٠^\circ ، ٢٧٠^\circ\}$

(جـ) $\{٠^\circ ، ٩٠^\circ\}$ (د) $\{٠^\circ ، ١٨٠^\circ\}$

(٢٨) إذا كانت $٠ \leq$ س $< ٢\pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\frac{\text{جتا}^٢ \text{س} - \text{جا}^٢ \text{س}}{١ - \text{جا}^٢ \text{س}} + ٢ = ٠$ هى ....

(أ) $\left\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$

(جـ) $\left\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$

(٢٩) إذا كانت $٠^\circ < \theta \leq ٣٦٠^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : جا $(٢\theta + ٣٠^\circ) = \sqrt{٣}$ جتا $(٢\theta + ٣٠^\circ)$

هى ....

(أ) $\{٣٠^\circ ، ١٢٠^\circ\}$ (ب) $\{٦٠^\circ ، ٢٤٠^\circ\}$

(جـ) $\{١٥^\circ ، ٦٠^\circ ، ١٢٠^\circ ، ٢٤٠^\circ\}$ (د) $\{١٥^\circ ، ١٠٥^\circ ، ١٩٥^\circ ، ٢٨٥^\circ\}$

(٣٠) إذا كان : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن مجموعة الحل للمعادلة : جا θ + قتا $\theta = ٢$

تساوى ....

(أ) $\left\{\frac{\pi}{٢}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{٣}\right\}$ (جـ) $\{\pi\}$ (د) $\left\{\frac{٣\pi}{٢}\right\}$

(٣١) عدد حلول المعادلة : حتا^٢ θ – ٤ حتا θ + ٤ = ٠ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٢) إذا كانت : $\theta \in$ [٠ ، ٢ π[فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ حتا^٢ θ – ٥ حتا θ – ٣ = ٠ هى ....

(أ) {٣٠° ، ١٥٠°} (ب) {٦٠° ، ١٢٠°}

(جـ) {٦٠° ، ٢٤٠°} (د) {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(٣٣) إذا كانت : $\theta \in$ [٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$[فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ جا^٢ θ + ٣ جا θ + ١ = ٠ هى ....

(أ) {٢٤٠°} (ب) {٢١٠°} (جـ) {٢٢٥°} (د) {٣٣٠°}

(٣٤) إذا كانت : $\theta \in$ [٠ ، π[فإن مجموعة حل المعادلة : ٣ قا^٢ θ – ٧ قا θ + ٢ = ٠ هى ....

(أ) {٣٠°} (ب) {٦٠°} (جـ) {١٥٠°} (د) {١٢٠°}

(٣٥) أى من قيم س التالية تحقق المعادلة : جا س + $\frac{١}{\text{جا س}}$ = $\frac{٧}{٢\sqrt{٣}}$ ؟

(أ) ١٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٣٦) إذا كانت : $\theta \in$]٠ ، π[فإن عدد حلول المعادلة : جا θ حتا θ = $\frac{١}{٢}$ جا θ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٧) إذا كانت : ٠ < θ < ٢ π فإن عدد حلول المعادلة : حتا^٤ θ – جا^٤ θ = جا θ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٨) إذا كانت : $\theta \in$ [٠ ، ٢ π[وكانت س هى مجموعة حل المعادلة : جا θ = ٠ ، ص هى مجموعة حل المعادلة : حتا θ = $\frac{١}{٢}$ فإن مجموعة حل المعادلة : جا θ (٢ حتا θ – ١) = ٠ هى ....

(أ) س $\cap$ ص (ب) س $\cup$ ص

(جـ) س – ص (د) ص – س

(٣٩) إذا كانت : $\theta \in$ [٠ ، ٢ π[وكانت س تمثل مجموعة حل المعادلتين : جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

وكانت ص تمثل مجموعة حل المعادلة : جا θ = حتا θ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س $\subset$ ص

(جـ) ص $\subset$ س (د) ن(س) > ن(ص)

(٤٠) مجموعة حل المعادلة : (١ + جا θ)^٢ = حتا θ + ٢ جا θ حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢ π[هى ....

(أ) {٠°} (ب) {٠° ، ١٨٠°}

(جـ) {١٨٠° ، ٢٧٠°} (د) {٠° ، ٩٠° ، ١٨٠°}

(٤١) إذا كانت : س ، ص $\in$ [٠ ، ٢ π[، θ = س + ص فإن مجموعة قيم θ التى تحقق أن جا س جا ص = ١ تساوى ....

(أ) {π ، ٢ π} (ب) {π ، ٣ π} (جـ) {$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$} (د) {$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٣}$}

(٤٢) إذا كان الحل العام للمعادلة : حا θ = ٣ أ − ٤ هو $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن حيث ن عدد صحيح

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (ج) ١ (د) $\frac{٥}{٣}$

(٤٣) الحل العام للمعادلة : حا $\frac{٣}{٢}$ θ = صفر هو ....

(أ) ن π (ب) $\frac{٣}{٢}$ ن π (ج) $\frac{٢}{٣}$ ن π (د) ٣ ن π

(٤٤) الحل العام للمعادلة : حا θ حتا θ = ٠ هو .... (حيث ن $\in$ ص)

(أ) ٢ π ن (ب) π ن (ج) $\frac{\pi}{٢}$ ن (د) $\frac{\pi}{٤}$ ن

(٤٥) إذا كانت : $\theta \in [$٠ ، ٢ $\pi[$ فإن عدد حلول المعادلة : $\sqrt{\text{حتا}^٢ \theta}$ = $\frac{١}{٢}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

(٤٦) مجموعة حل المعادلة : ظا θ + قا θ = $\sqrt{٣}$ حيث ٠ $< \theta <$ ٢ π هى ....

(أ) $\left\{\frac{\pi}{٦}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{٦} ، \frac{٧ \pi}{٦}\right\}$ (ج) $\left\{\frac{\pi}{٦} ، \frac{١١ \pi}{٦}\right\}$ (د) $\left\{\frac{٧ \pi}{٦} ، \frac{١١ \pi}{٦}\right\}$

(٤٧) إذا كانت : $\theta \in]$٠ ، $\frac{\pi}{٢}[$ وكانت : ظا θ + ظا^٢ θ = ٢ فإن : قا^٢ θ + قا^٤ θ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٨

(٤٨) إذا كان : حتا θ أحد جذرى المعادلة : س^٢ − س ظا θ + حا^٢ θ = $\frac{١}{٢}$ فإن إحدى قيم θ هى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ١٢٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(١) حا θ = $\frac{١}{٢}$ | (٢) حتا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | (٣) ظا θ = $\sqrt{٣}$

(٤) حا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ | (٥) حتا θ = $\frac{-١}{٢}$ | (٦) ظا θ = −١

(٧) قتا θ = −٢ | (٨) قا θ = $\sqrt{٢}$ | (٩) ظتا θ = −$\sqrt{٣}$

(١٠) ٢ حتا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠ | (١١) ٢ حا θ + $\sqrt{٢}$ = ٠ | (١٢) حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = $\frac{١}{٢}$

(١٣) ٢ حا θ حتا θ + ٣ حتا θ = ٠ | (١٤) حا θ حتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حا θ | (١٥) ٢ حا^٢ θ − $\sqrt{٢}$ حا θ = ٠

(١٦) حتا^٢ θ − حتا θ = ٠ | (١٧) ٢ حا^٢ θ = حا θ

(١٨) $\sqrt{٢}$ حا θ حتا θ − حا θ = ٠ | (١٩) ٢ حتا^٢ θ + حتا θ = ٠ | (٢٠) ٢ حتا^٢ θ + ٣ حتا θ + ١ = ٠

٢ إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢π[أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(١) ٢ جتا θ − ١ = ٠
(٢) ٢ جا θ + ١ = ٠
(٣) ٢ جتا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠
(٤) ظا θ − ١ = ٠
(٥) $\sqrt{٢}$ جتا θ + ٢ = ٠
(٦) ٣ قتا θ + ٢ = ٠
(٧) ٤ جا θ + ٣ = ٠
(٨) قا θ + $\sqrt{٢}$ = ٠
(٩) ٤ ظا θ − ٥ = ٠
(١٠) جا θ − ٢ جتا θ = ٠
(١١) جتا θ + ١ = ٠
(١٢) جا θ جتا θ = ٠
(١٣) $\frac{\text{جا } ٢٥^\circ}{\text{جتا } ٦٥^\circ}$ + ظا (٩٠° − θ) = ٠
(١٤) جتا (θ − ٥٠°) = $\frac{١}{٢}$
(١٥) ٤ جا^{٢} θ = ٣
(١٦) ٢ جا^{٢} θ = جا θ
(١٧) ٣ قا^{٢} θ = ٤
(١٨) جا^{٢} θ − جتا^{٢} θ = ٠
(١٩) ٣ جتا^{٢} θ + ٢ جا θ جتا θ = ٠
(٢٠) ٤ جا^{٢} θ − ٣ جا θ جتا θ = ٠
(٢١) ٤ ظا^{٢} θ + ٣ ظا θ = ٠
(٢٢) ٢ جا^{٢} θ + جا θ − ١ = ٠
(٢٣) ظا^{٢} θ − $\frac{١}{\text{ظا } \theta}$ = ٠

---

٣ أوجد حل كل من المعادلات الآتية فى الفترة [٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] :

(١) ظا^{٢} θ − ظا θ = ٠
(٢) ٢ جا θ جتا θ − جتا θ = ٠

---

٤ حل المعادلة : جا θ جتا θ − $\frac{١}{٢}$ جتا θ = ٠ إذا كانت : ٠° < θ < ١٨٠°

---

٥ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(١) جتا θ = جا ٢θ
(٢) جتا ٢θ = جا θ
(٣) جتا ٥θ = جا ٤θ
(٤) قا ٤θ = قتا ٢θ

---

٦ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى الفترة [٠ ، π] :

(١) ٢ جا^{٢} θ − ٥ جا θ + ٢ = ٠
(٢) ٦ جتا^{٢} θ − ٥ جتا θ + ١ = ٠
(٣) ٤ جا^{٢} θ + ٨ جا θ + ٣ = ٠
(٤) ٢ ظا^{٢} θ − ظا θ − ١ = ٠
(٥) ٣ قا^{٢} θ − ٧ قا θ + ٢ = ٠

---

٧ أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق المعادلتين : ٢ جتا θ + ١ = ٠ ، ظا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠ «٢٤٠°»

---

٨ أوجد مجموعة حل المعادلة : جا ($\frac{٩\theta}{٤}$) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ حيث θ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] «{٢٠° ، ٦٠°}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد حلول المعادلة : جا س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٦ π] هو ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢) إذا كان : جا أ + جا ب = ٢ فإن : ....

(أ) جتا أ + جتا ب = صفر (ب) جتا أ − جتا ب = ١

(جـ) جا أ − جا ب = ١ (د) جا (أ + ب) = −١

(٣) مجموعة حل المعادلة : جتا س + جا س = ٢ حيث س ∈ [٠ ، π] هى ....

(أ) $\{\frac{\pi}{٢}\}$ (ب) {صفر} (جـ) {صفر ، $\frac{\pi}{٢}$} (د) ∅

(٤) إذا كانت ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° فإن عدد حلول المعادلة : ٣ جا س = ظا س هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥) إذا كان : ظا θ + ظتا θ = ٢ فإن : ظا^{٢٠١٩} θ + ظتا^{٢٠١٩} θ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٦) قيم θ التى تجعل جذرى المعادلة التربيعية : س^{٢} + ٢ س + ٢ جتا θ = ٠ متساويين حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] هى ....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ ، أ $\frac{٥\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ ، أ $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ ، أ $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$ ، أ $\frac{٥\pi}{٦}$

(٧) مجموع حلول المعادلة : جا^{٢} س − جا س جتا س = جتا س − جا س

حيث س ∈]٠ ، ٢ π[هو ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

(٨) مجموع حلول المعادلة : جتا ٢ س = − جا ٢ س حيث س ∈ [٠ ، ٢ π] هو ....

(أ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٨}$ (جـ) $\frac{٩\pi}{٢}$ (د) $\frac{١١\pi}{٢}$

(٩) إذا كانت θ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] وكانت للمعادلة : س^{٢} − (ظا θ + $\frac{١}{ظا θ}$) س + ١ = صفر جذر وحيد موجب

فإن : جا θ جتا θ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٠) إذا كان : ٤ حتا س + ٣ حا س = ٣ فإن : ظا س = ... حيث س ∈ $]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$

(أ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٥}{١٢}$ (جـ) $\frac{-٧}{٢٤}$ (د) $\frac{-٨}{١٥}$

(١١) الحل العام للمعادلة : ظتا θ − ظا θ = قا θ هو ....

(أ) $(-١)^{ن} \times \frac{\pi}{٦} + ن\pi$ (ب) $\frac{\pi}{٢} + ن\pi$

(جـ) $\frac{٣\pi}{٢} + ٢ن\pi$ (د) $-\frac{\pi}{٦} + ٢ن\pi$

---

٢ إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢π[فأوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(١) ٢ حتا² θ + ١١ حا $(\frac{\pi}{٢} - θ)$ − ٦ = ٠

(٢) ٤ حا θ + قتا θ − ٤ = ٠

(٣) حتا θ + قا θ حتا² θ = $\sqrt{٣}$

(٤) ظا⁴ θ − ٣ ظا² θ + ٢ = ٠

(٥) ٢ حا θ حتا θ + ٢ حا θ − حتا θ − ١ = ٠

(٦) $\sqrt{٣}$ ظا² θ − $(١ + \sqrt{٣})$ ظا θ + ١ = ٠

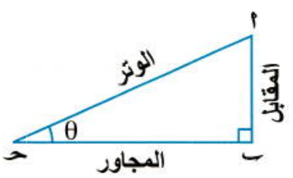
(٧) ظا² θ + قا² θ = ٧

(٨) ٦ ظا² θ + ٥ قا θ + ٥ = ٠

الدرس 3 حل المثلث القائم الزاوية

- أى مثلث يحتوى على ستة عناصر، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ، والمقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه الغير معلومة.
- لحل المثلث القائم الزاوية يلزم معرفة : طولى ضلعين فيه أ، طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين.
- تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة ونظرية فيثاغورث فى حل المثلث القائم الزاوية حيث :

فى المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب



[١] $\text{جا}\,\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ ، $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{ب ح}}{\text{أ ح}}$

، $\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$

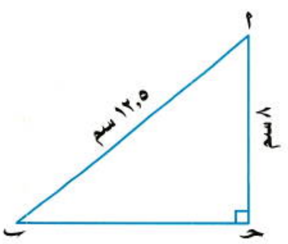
[٢] $(\text{أ ح})^{2} = (\text{أ ب})^{2} + (\text{ب ح})^{2}$

أولًا حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين

مثال ١

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ح والذى فيه : أ ح = ٨ سم ، أ ب = ١٢,٥ سم

الحل



- ∵ $\text{جا ب} = \dfrac{\text{أ ح}}{\text{أ ب}}$ ∴ $\text{جا ب} = \dfrac{٨}{١٢,٥}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق(∠ب) ≈ ٣٩° ٤٧′ ٤١″

- ∵ ق(∠ب) = ٣٩° ٤٧′ ٤١″

∴ ق(∠أ) = ٩٠° − ٣٩° ٤٧′ ٤١″ = ٥٠° ١٢′ ١٩″

- ∵ $\frac{\text{ب ح}}{\text{أ ب}}$ = حتا ب ∴ $\frac{\text{ب ح}}{12,5}$ = حتا (٣١° ٤٧َ ٣٩ً) ∴ ب ح = ١٢,٥ × حتا (٣١° ٤٧َ ٣٩ً)

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب ح ≈ ٩,٦ سم

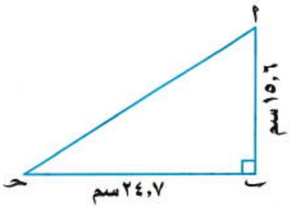
لاحظ أنه يمكن إيجاد ب ح باستخدام نظرية فيثاغورث حيث : $(\text{ب ح})^2 = (\text{أ ب})^2 - (\text{أ ح})^2$

فيكون ب ح = $\sqrt{(12,5)^2 - (8)^2}$ ≈ ٩,٦ سم

مثال ٢

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب والذى فيه : أ ب = ١٥,٦ سم ، ب ح = ٢٤,٧ سم

الحل



- ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$ = طا ح ∴ طا ح = $\frac{15,6}{24,7}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق (∠ ح) ≈ ٣٢° ١٦َ ٣٢ً

- ∴ ق (∠ أ) = ٩٠° − ٣٢° ١٦َ ٣٢ً = ٥٧° ٤٣َ ٢٨ً

- ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ = جا ح ∴ $\frac{15,6}{\text{أ ح}}$ = جا (٣٢° ١٦َ ٣٢ً) ∴ أ ح = $\frac{15,6}{\text{جا } (32° 16' 32'')}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ ح ≈ ٢٩,٢١ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد أ ح باستخدام نظرية فيثاغورث حيث : $(\text{أ ح})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ح})^2$

فيكون : أ ح = $\sqrt{(15,6)^2 + (24,7)^2}$ ≈ ٢٩,٢١ سم

حاول بنفسك

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين :

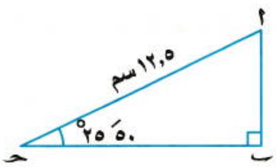
1. أ ب = ٦ سم ، أ ح = ٨,٦ سم
2. أ ب = ٥,٤ سم ، ب ح = ٧,٣ سم

ثانيًا حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس إحدى زاويتيه الحادتين

مثال ٣

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب والذى فيه : أ ح = ١٢,٥ سم ، ق (∠ ح) = ٢٥° ٥٠َ

الحل



- ق (∠ أ) = ٩٠° − ٢٥° ٥٠َ = ٦٤° ١٠َ

- ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ = جا ح ∴ $\frac{\text{أ ب}}{12,5}$ = جا ٢٥° ٥٠َ

∴ أ ب = ١٢,٥ جا ٢٥° ٥٠َ

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أب ≈ ٥,٤٥ سم

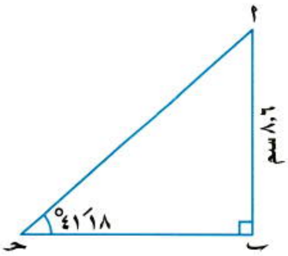
• ∵ $\frac{\text{ب ح}}{\text{أ ح}}$ = جتا ح ∴ $\frac{\text{ب ح}}{١٢,٥}$ = جتا ٥٠َ ٢٥° ∴ ب ح = ١٢,٥ جتا ٥٠َ ٢٥°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب ح ≈ ١١,٢٥ سم

مثال ٤

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب والذى فيه : أ ب = ٨,٦ سم ، ق (∠ ح) = ١٨َ ٤١°

الحل



• ق (∠ أ) = ٩٠° − ١٨َ ٤١° = ٤٢َ ٤٨°

• ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$ = طا ح ∴ $\frac{٨,٦}{\text{ب ح}}$ = طا ١٨َ ٤١° ∴ ب ح = $\frac{٨,٦}{\text{طا ١٨َ ٤١°}}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب ح ≈ ٩,٧٩ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد طول $\overline{\text{ب ح}}$ باستخدام ق (∠ أ) حيث يكون : $\frac{\text{ب ح}}{\text{أ ب}}$ = طا أ

∴ $\frac{\text{ب ح}}{٨,٦}$ = طا ٤٢َ ٤٨° ∴ ب ح = ٨,٦ طا ٤٢َ ٤٨° ≈ ٩,٧٩ سم

• ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ = جا ح ∴ $\frac{٨,٦}{\text{أ ح}}$ = جا ١٨َ ٤١° ∴ أ ح = $\frac{٨,٦}{\text{جا ١٨َ ٤١°}}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ ح ≈ ١٣,٠٣ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد طول $\overline{\text{أ ح}}$ باستخدام ق (∠ أ) حيث يكون : $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ = جتا أ

∴ $\frac{٨,٦}{\text{أ ح}}$ = جتا ٤٢َ ٤٨° ∴ أ ح = $\frac{٨,٦}{\text{جتا ٤٢َ ٤٨°}}$ ≈ ١٣,٠٣ سم

حاول بنفسك

حل المثلث أ ب ح الذى فيه ق (∠ ب) = ٩٠° إذا كان :

١ أ ب = ١٠ سم ، ق (∠ ح) = ٥٤°

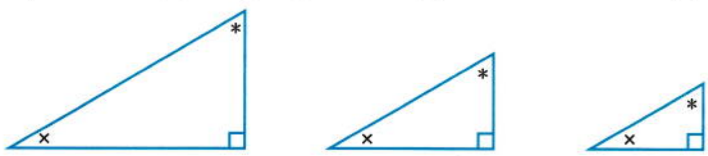
٢ أ ح = ٣٢ سم ، ق (∠ أ) = ٢٤َ ٣٢°

تفكير ناقد

هل يمكن حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية قياسى زاويتيه الحادتين ؟ الإجابة : لا يمكن.

تفسير الإجابة :

لأنه يوجد عدد لا نهائى من المثلثات القائمة التى لها نفس قياسى الزاويتين الحادتين (أى المثلثات المتشابهة)



ولذلك لا يمكن تحديد أى من هذه المثلثات هو المطلوب تحديد أطوال أضلاعه (أى حله) إلا إذا علم على الأقل أحد أطوال أضلاعه.

مثال ٥

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات إذا كان :

١ ق(∠أ) = ١,٢٥٤ء ، ب حـ = ١٠,٦ سم   ٢ ق(∠حـ) = ٠,٧١٥ء ، أ حـ = ٢٣ سم

الحل

لاحظ أنه

يجب تحويل نظام الآلة الحاسبة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) قبل إجراء العمليات الحسابية التى تحتوى على دوال مثلثية لزوايا مقدرة بالراديان

وذلك بالضغط على SHIFT ثم MODE ثم 4

لاحظ أن

٩٠° تكافئ $\frac{\pi}{٢}$ راديان

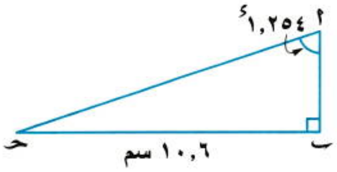
١ • ق(∠حـ) = $\frac{\pi}{٢}$ − ١,٢٥٤ء ≈ ٠,٣١٧ء

• ∵ جا أ = $\frac{ب حـ}{أ حـ}$ ∴ جا ١,٢٥٤ء = $\frac{١٠,٦}{أ حـ}$

∴ أ حـ = $\frac{١٠,٦}{جا ١,٢٥٤ء}$ ≈ ١١,١٥٥ سم

• ∵ ظا أ = $\frac{ب حـ}{أ ب}$ ∴ ظا ١,٢٥٤ء = $\frac{١٠,٦}{أ ب}$

∴ أ ب = $\frac{١٠,٦}{ظا ١,٢٥٤ء}$ ≈ ٣,٤٧٥ سم



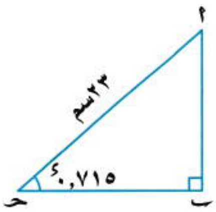
٢ • ق(∠أ) = $\frac{\pi}{٢}$ − ٠,٧١٥ء ≈ ٠,٨٥٦ء

• ∵ جا حـ = $\frac{أ ب}{أ حـ}$ ∴ جا ٠,٧١٥ء = $\frac{أ ب}{٢٣}$

∴ أ ب = ٢٣ × جا ٠,٧١٥ء ≈ ١٥,٠٧٩ سم

• ∵ جتا حـ = $\frac{ب حـ}{أ حـ}$ ∴ جتا ٠,٧١٥ء = $\frac{ب حـ}{٢٣}$

∴ ب حـ = ٢٣ × جتا ٠,٧١٥ء ≈ ١٧,٣٦٧ سم



حاول بنفسك

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات إذا كان :

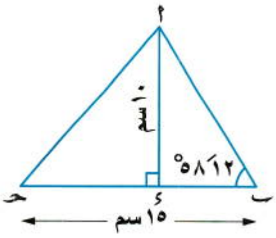
١ ق(∠أ) = ٠,٦٢٣ء ، ب حـ = ١٠ سم   ٢ ق(∠حـ) = ١,٠٧٣ء ، أ حـ = ٣٧,٥ سم

مثال ٦

$\triangle$ أ ب حـ مثلث فيه : ق (د ب) = ١٢َ ٥٨ْ ، ب حـ = ١٥ سم ، رسم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

حيث ء $\in \overline{ب حـ}$ ، أ ء = ١٠ سم **أوجد :** ق (د حـ)

الحل



- فى $\triangle$ أ ء ب : $\because$ طا ١٢َ ٥٨ْ = $\frac{١٠}{ب ء}$

$\therefore$ ب ء = $\frac{١٠}{\text{طا ١٢َ ٥٨ْ}}$ $\approx$ ٦,٢ سم

$\therefore$ ء حـ = ١٥ − ٦,٢ = ٨,٨ سم

- فى $\triangle$ أ ء حـ : $\because$ طا حـ = $\frac{١٠}{٨,٨}$

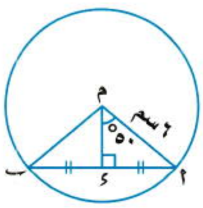
وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق (د حـ) = ٨ً ٣٩َ ٤٨ْ

مثال ٧

دائرة طول نصف قطرها ٦ سم رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٠ْ

احسب طول هذا الوتر لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل



نرسم $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ يقطعه فى ء

$\because$ $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ ، $\therefore$ ء منتصف $\overline{أ ب}$

، $\because$ م أ = م ب = نق ، $\therefore$ $\overrightarrow{م ء}$ ينصف د أ م ب

$\therefore$ ق (د أ م ء) = ١٠٠ْ ÷ ٢ = ٥٠ْ

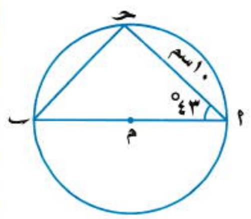
$\triangle$ أ ء م فيه : ق (د أ ء م) = ٩٠ْ

$\therefore$ جا (د أ م ء) = $\frac{أ ء}{أ م}$ ، $\therefore$ جا ٥٠ْ = $\frac{أ ء}{٦}$

$\therefore$ أ ء = ٦ × جا ٥٠ْ $\approx$ ٤,٥٩٦ سم ، $\therefore$ أ ب = ٢ أ ء $\approx$ ٩,١٩٣ سم

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م

، ق (د أ) = ٤٣ْ ، أ حـ = ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م لأقرب رقمين عشريين.

تمارين 10 على حل المثلث القائم الزاوية

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي

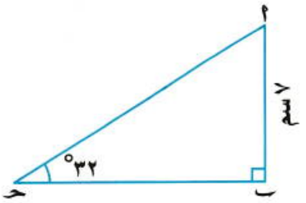
أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يمكن حل المثلث القائم الزاوية فى كل الحالات الآتية ما عدا أن يكون المعطى ....

(أ) طولا ضلعين فى المثلث.
(ب) طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
(جـ) قياسا زاويتين فى المثلث.
(د) طول أحد ضلعى القائمة وطول الوتر.

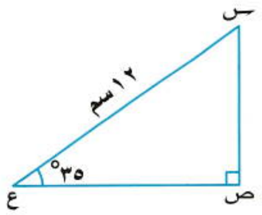
(٢) فى الشكل المقابل :



أ حـ ≃ .... سم

(أ) ١٣,٢
(ب) ٨,٣
(جـ) ٣,٧
(د) ٥,٩

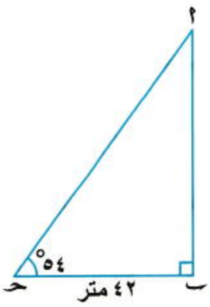
(٣) فى الشكل المقابل :



س ص ≃ .... سم.

(أ) ٩,٨
(ب) ٦,٩
(جـ) ٨,٤
(د) ١٤,٦

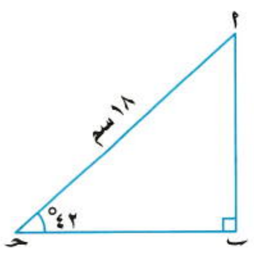
(٤) فى الشكل المقابل :



طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ... لأقرب متر.

(أ) ٥٦
(ب) ٥٧
(جـ) ٥٨
(د) ٥٩

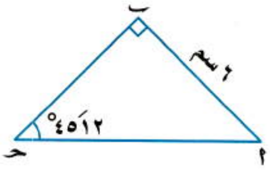
(٥) فى الشكل المقابل :



طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ١٢
(ب) ١٣
(جـ) ١٦
(د) ٢٤

(٦) في الشكل المقابل :

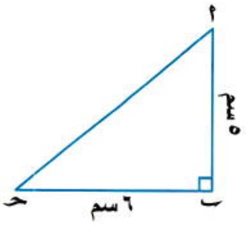


طول $\overline{\text{بحـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٦ (ب) ٤

(جـ) ٩ (د) ٥

(٧) في الشكل المقابل :



ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٥٦° ٢٧َ (ب) ٣٩° ٤٨َ

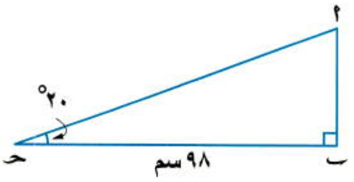
(جـ) ٣٣° ٣٣َ (د) ٥٠° ١٢َ

(٨) إذا كان المثلث أبحـ قائم الزاوية في ب ، أب = ٥ سم ، بحـ = ٥ $\sqrt{3}$ سم

فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٥٦°

(٩) في الشكل المقابل :



أب = ... سم.

(أ) ٩٨ ظتا ٢٠° (ب) ٩٨ جا ٢٠°

(جـ) ٩٨ قتا ٢٠° (د) ٩٨ ظا ٢٠°

(١٠) إذا كان Δ أبحـ قائم الزاوية في ب ، ق (∠ أ) = ٠,٩٢٥ء ، بحـ = ٨ سم

فإن : أحـ ≃ .... سم.

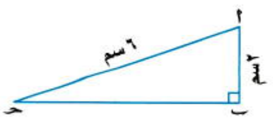
(أ) ١٠ (ب) ١٣ (جـ) ٦ (د) ١١

(١١) إذا كان Δ أبحـ قائم الزاوية في ب ، ق (∠ حـ) = ٥٤° ١٣َ ، بحـ = ٢٠ سم

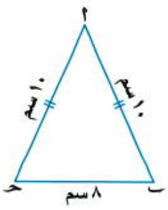
فإن : طول $\overline{\text{أب}}$ ≃ .... سم.

(أ) ١٦,٢ (ب) ١١,٧ (جـ) ١٤,٤ (د) ٢٧,٧

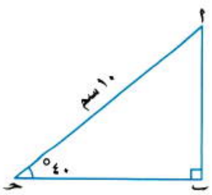
(١٢) في أي الأشكال الآتية لا يمكن حل المثلث أبحـ ؟



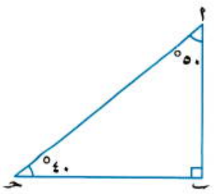
(أ)



(ب)

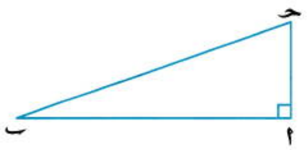


(جـ)



(د)

(١٣) فى الشكل المقابل :



أولًا : ب حـ = ...

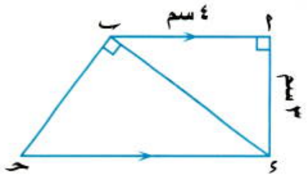
(أ) أ ب جا حـ (ب) أ ب قتا حـ

(جـ) أ ب ظا ب (د) أ ب قا حـ

ثانيًا : أ ب = ...

(أ) أ حـ ظا ب (ب) أ حـ قا ب (جـ) أ حـ قتا ب (د) أ حـ ظتا ب

(١٤) فى الشكل المقابل :

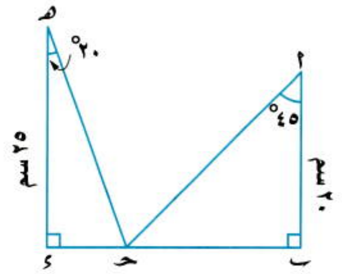


طول $\overline{\text{ب حـ}}$ = ... سم.

(أ) ٥ (ب) $\frac{٢}{٣}$ ٦

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ ٣ (د) ٣

(١٥) فى الشكل المقابل :



طول $\overline{\text{ب ء}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٩

(ب) ٢٩

(جـ) ٢٣

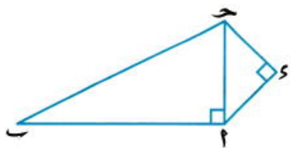
(د) ٢٨,٥

(١٦) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٤,٨ سم ، ق (∠ أ) = ٣٢َ ٦٤°

فإن : طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٢٥,٢ (ب) ١٥,٨ (جـ) ١٨,٧ (د) ٢٥,٨

(١٧) فى الشكل المقابل :



أ ء = ب حـ × ....

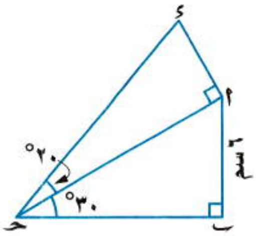
(أ) جا (∠ أ حـ ب) جا (∠ ء أ حـ)

(ب) جتا (∠ أ حـ ب) جتا (∠ ء أ حـ)

(جـ) جا (∠ أ حـ ب) ظا (∠ ء أ حـ)

(د) جتا (∠ أ حـ ب) ظتا (∠ ء أ حـ)

(١٨) فى الشكل المقابل :

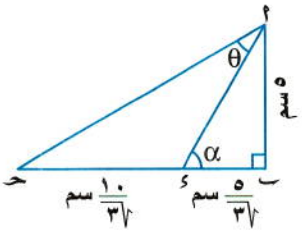


حـ ء = ... سم.

(أ) ٦ قتا ٣٠° قا ٢٠° (ب) ٦ جا ٣٠° جتا ٢٠°

(جـ) ٦ قا ٣٠° جتا ٢٠° (د) ٦ جتا ٣٠° جا ٢٠°

(١٩) فى الشكل المقابل :



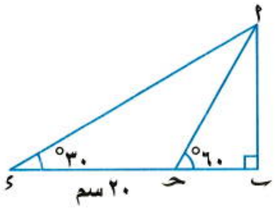
أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

وكان : أ ب = ٥ سم ، ب ء = $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ سم ، حـ ء = $\frac{١٠}{\sqrt{٣}}$ سم

فإن : قا α − جا θ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$

(٢٠) فى الشكل المقابل :



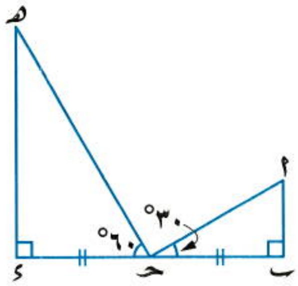
Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، ء $\in$ $\overleftarrow{ب حـ}$ بحيث حـ ء = ٢٠ سم

فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥ (د) ١٠

(٢١) فى الشكل المقابل :



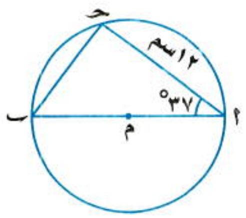
أ ب حـ ، هـ حـ ء مثلثان قائما الزاوية فى ب ، ء على الترتيب

فإذا كان : حـ منتصف $\overline{ب ء}$ فإن : $\frac{هـ ء}{أ ب}$ = ...

(أ) ٣ : ٢ (ب) ٥ : ٣

(جـ) ٢ : ١ (د) ٣ : ١

(٢٢) يبين الشكل المقابل :



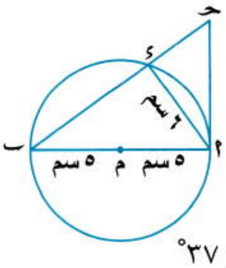
دائرة مركزها م ، $\overline{أ ب}$ قطر فيها

، فإذا كان : أ حـ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٣٧°

فإن طول نصف قطر الدائرة ≃ .... سم

(أ) ٧,٥١ (ب) ٩,٩٧ (جـ) ٧,٩٦ (د) ٤,٧٩

(٢٣) في الشكل المقابل :



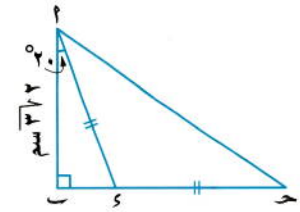
الدائرة م طول نصف قطرها ٥ سم

، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ مماس للدائرة عند أ ، أ ء = ٦ سم

فإن : ق (∠ حـ أ ء) ≃ ....

(أ) ٥٣° (ب) ٣١° (جـ) ٣٩° (د) ٣٧°

(٢٤) في الشكل المقابل :



طول $\overline{\text{أ حـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٠

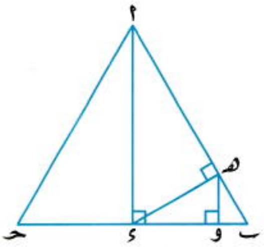
(جـ) ٤ (د) ٥

(٢٥) أ ب حـ مثلث ، رسم $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ فإذا كان : أ ء = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٥٢° ، ق (∠ حـ) = ٢٨°

فإن طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٢٦) في الشكل المقابل :



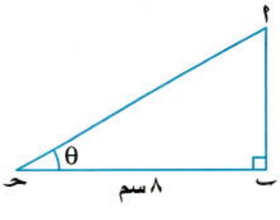
أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه = ١٠ سم

، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن : ء هـ + هـ و = ... سم.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٨}$ (د) $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٧}$

(٢٧) في الشكل المقابل :



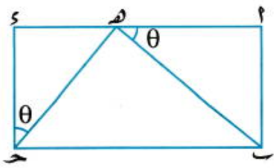
إذا كانت : $\theta \in \left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣}\right]$

فإن : أ حـ ∈ ....

(أ) [٨√٣ ، ١٦] (ب) [$\frac{١٦}{٣}$√٣ ، ١٦]

(جـ) [١٦ ، ١٦√٣] (د) [١٦√٣ ، ٢٤]

(٢٨) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل فيه : ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ ء حـ هـ) = θ

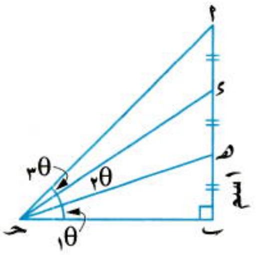
أي المعطيات الآتية تكفي لحل المثلث ب هـ حـ

(١) ب حـ = ٢٥ سم **(٢)** θ = ٤٠° **(٣)** ء حـ = ١٢ سم

(أ) **(١)** فقط. (ب) **(٢)** فقط.

(جـ) **(٣)** فقط. (د) أي زوج من المعطيات.

(٢٩) **فى الشكل المقابل :**

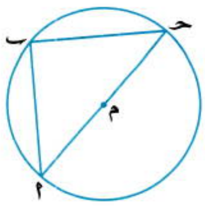


أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $\theta_3 = \theta_2 = \theta_1$ (ب) $\theta_3 > \theta_2 > \theta_1$

(جـ) $\theta_3 < \theta_2 < \theta_1$ (د) $\theta_2 > \theta_1$ ، $\theta_2 > \theta_3$

(٣٠) **فى الشكل المقابل :**



إذا كان : $\overline{\text{أحـ}}$ قطر فى الدائرة م

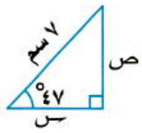
فإن مساحة الدائرة المار برؤوس Δ أ ب حـ

تساوى $\frac{\pi}{٤}$ × (أ ب)^٢ × ....

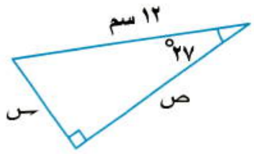
(أ) جا^٢ حـ (ب) جتا^٢ حـ (جـ) ١ + ظا^٢ أ (د) ١ − ظتا^٢ أ

ثانيًا الأسئلة المقالية

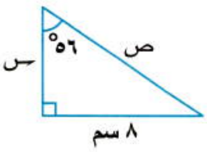
١ **أوجد قيمة كل من س ، ص فى كل شكل من الأشكال الآتية :**



(١)

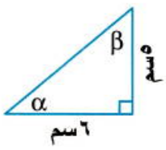


(٢)

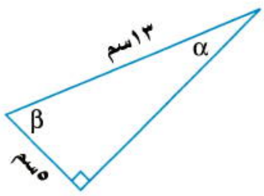


(٣)

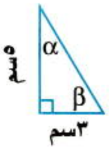
٢ **أوجد قيمة كل من الزاويتين α ، β بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية :**



(١)



(٢)



(٣)

٣ **أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ مقربًا لرقم عشرى واحد إذا كان :**

(١) ق (∠ حـ) = ٣٢° ١٨َ ، أ حـ = ٢٥ سم «١٣.٤ سم»

(٢) ق (∠ أ) = ٦٢° ٤٤َ ، ب حـ = ١٦ سم «٨.٢ سم»

(٣) ق (∠ أ) = ٤٢° ٨َ ، أ حـ = ٢٤ سم «١٧.٨ سم»

٤ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب أوجد ق (∠ جـ) لأقرب دقيقة إذا كان :

(١) أ ب = ١٢,٦ سم ، أ جـ = ١٨,٦ سم «٣٩ ٤٢ °»

(٢) ب جـ = ٥٤ سم ، أ جـ = ٨٨ سم «٩ ٥٢ °»

(٣) أ ب = ٢٧,٢ سم ، ب جـ = ٢٠,٤ سم «٨ ٥٣ °»

٥ حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب درجة والطول لأقرب سم حيث :

(١) أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم

(٢) أ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ١٧,٦ سم

(٣) أ ب = ٥,٣ سم ، أ جـ = ١٢,٢ سم

(٤) ب جـ = ٣١ سم ، أ جـ = ٤٢ سم

٦ حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه :

(١) أ جـ = ٢٤,٦ سم ، أ ب = ١٦,٢ سم

(٢) أ ب = ٣٩ سم ، ب جـ = ٦٢ سم

(٣) ق (∠ جـ) = ٦٢° ، أ جـ = ٧٦ سم

(٤) أ ب = ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٤٢ ٢٤ °

٧ حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب مقربًا الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات حيث :

(١) ق (∠ أ) = ١,١٦٩ ء ، أ ب = ١٨ سم

(٢) ق (∠ جـ) = ٠,٦٤٦ ء ، أ جـ = ١٥,٧ سم

(٣) ق (∠ جـ) = ١,٠٨٢ ء ، أ جـ = ٣٥,٨ سم

٨ مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ٧ سم وقاعدته ١٠ سم.

احسب قياسات زواياه. «٥٥ ٢٤ ٤٤ ° ، ٥٥ ٢٤ ٤٤ ° ، ١٠ ١٠ ٩١ °»

٩ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ جـ ، ب جـ = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = ٥٤ ٤٨ °

أوجد طول : $\overline{أ ب}$ لأقرب سنتيمتر. «١٥ سم»

١٠ س ص ع مثلث فيه : س ص = ١١,٥ سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، س ع = ٢٩,٩ سم

أثبت أن : المثلث قائم الزاوية فى ص ثم أوجد : قياس زاوية س «٢٣ ٦٧ °»

١١ دائرة طول نصف قطرها ٨ سم ، رسم $\overline{أحـ}$ قطر فيها ثم رسم الوتر $\overline{أب}$ طوله ١٠ سم

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ «٤ً ١٩َ ٥١°، ٩٠°، ٥٦ً ٤٠َ ٣٨°»

١٢ دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، رسم فيها وتر $\overline{أب}$ يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠° ،

احسب طول $\overline{أب}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. «١١,٤٦٨ سم»

١٣ أ ب حـ ء معين طولا قطريه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ هما ١٨,٨ سم ، ٢٤,٦ سم

أوجد : ق (∠ أ ء حـ) لأقرب دقيقة. «٤٧َ ٧٤°»

١٤ قطعة أرض على شكل معين أ ب حـ ء طول ضلعه ١٠ أمتار ، ق (∠ أ ب حـ) = ١٦َ ١٠٤°

أوجد : طولى قطريه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ «١٥,٧٩ مترًا تقريبًا ، ١٢,٢٨ مترًا تقريبًا»

١٥ أ ب حـ ء مستطيل طول قطره $\overline{أحـ}$ = ٢٤,٨ سم ، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٦َ ٢٣°

أوجد طول كل من : $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ «٩,٩ سم تقريبًا ، ٢٢,٧ سم تقريبًا»

١٦ أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه :

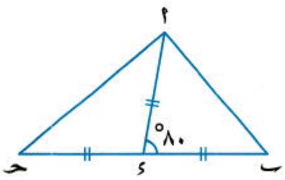
$\overline{أء}$ // $\overline{بحـ}$ ، أ ب = حـ ء = ٥ سم ، أ ء = ٤ سم ، ب حـ = ١٠ سم.

أوجد قياس كل من زواياه الأربعة. «٨َ ٥٣°، ٥٢َ ١٢٦°، ٨َ ٥٣°، ٥٢َ ١٢٦°»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



إذا كانت : ء ∈ $\overline{بحـ}$ بحيث ء أ = ء ب = ء حـ = ٥ سم

، ق (∠ أ ء ب) = ٨٠° فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ١٠ حا ٤٠° (ب) ١٠ حا ٥٠° (جـ) ٥ حا ٨٠° (د) ٥ حا ٤٠°

(٢) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه هى أ ، أ + ١ ، أ − ١ حيث أ > ١

فإن قياس أكبر زواياه الحادة يساوى .... تقريبًا.

(أ) ٥٢َ ٣٦° (ب) ١٨َ ٤٨° (جـ) ٨َ ٥٣° (د) ٤٢َ ٦٢°

(٣) إذا كان : أ ب جـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٦ سم ومحيط Δ أ ب جـ = ٢٤ سم

فإن : ق (∠ جـ) ≃ ....

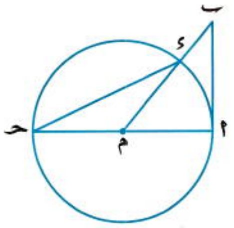
(أ) ١٤° (ب) ١٨° (جـ) ٣٧° (د) ٥٣°

(٤) إذا كان : أ ب جـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب وكان أ ب > ب جـ ، مساحة Δ أ ب جـ = ٣٠ سم^2

، أ ب + ب جـ = ٢٠ سم فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ١٩َ ٧٧° (ب) ٣٧َ ٥٤° (جـ) ١٨َ ٢٦° (د) ٤١َ ١٢°

(٥) فى الشكل المقابل :



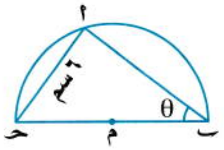
إذا كان : أ جـ قطرًا فى دائرة م ، أ ب مماسًا لها

، أ ب = ٦ سم ، نق = ٥ سم

فإن : ق (∠ ء جـ م) = ...

(أ) ١٢َ ٥٠° (ب) ٦َ ٢٥° (جـ) ٣١َ ١٨° (د) ٣٩َ ٣٧°

(٦) فى الشكل المقابل :

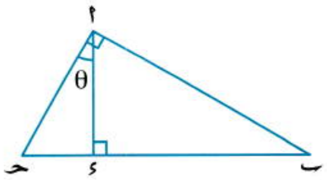


ب جـ قطر فى دائرة م ، أ جـ = ٦ سم ، ق (∠ أ ب جـ) = θ

فإن مساحة Δ أ ب جـ = ... سم^2

(أ) ٦ جا θ (ب) ٦ ظا θ (جـ) ١٨ ظا θ (د) ١٨ ظتا θ

(٧) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب جـ مثلثًا قائم الزاوية فى أ

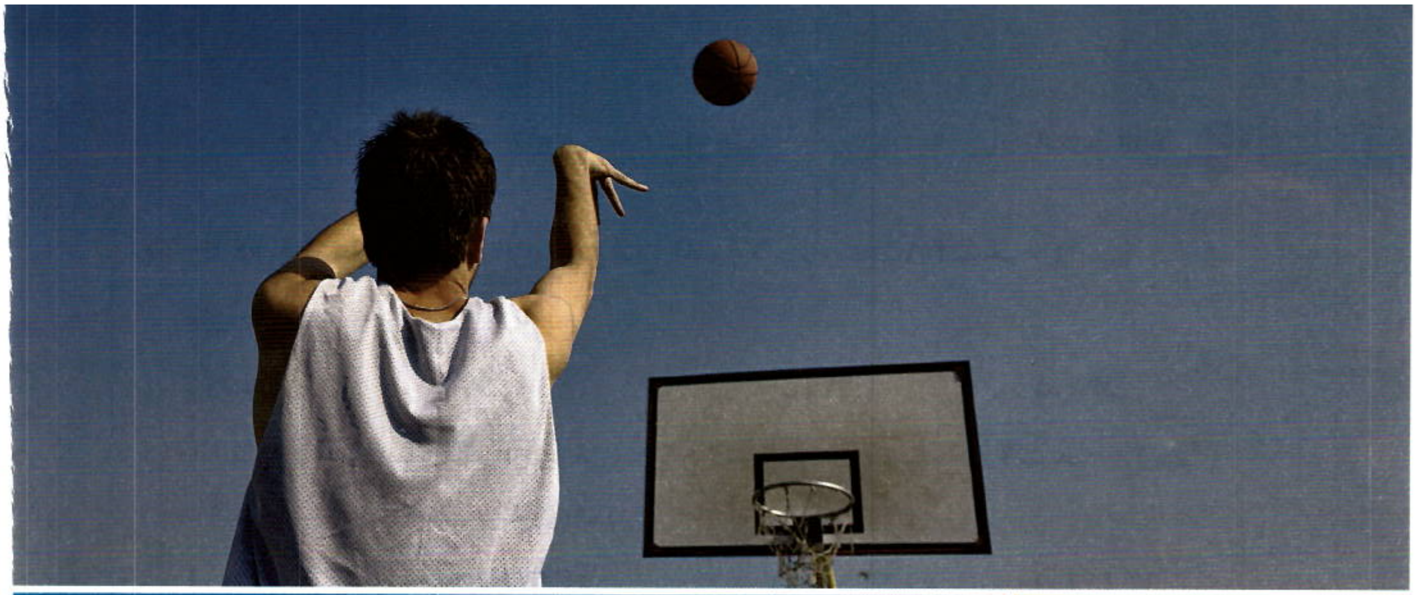
، أ ء ⊥ ب جـ ، أ ء = جا^2 θ

فإن : ب جـ = ...

(أ) جا θ (ب) ظا θ (جـ) جتا θ (د) ظا^2 θ

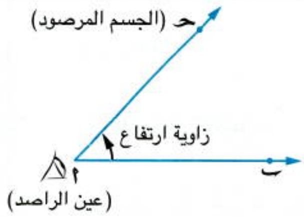
(٨) شكل خماسى منتظم طول ضلعه ٥,٨٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ≃ .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧



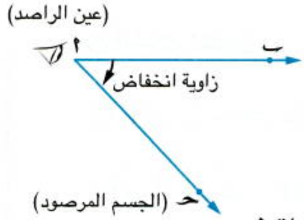
الدرس 4 زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

زاوية الارتفاع



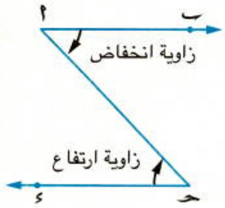
إذا فُرض أن هناك راصد عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أعلى مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{أب}$ الأفقي والشعاع $\overrightarrow{أحـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية ارتفاع** الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ

زاوية الانخفاض



إذا فُرض أن هناك راصد عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أسفل مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{أب}$ الأفقي والشعاع $\overrightarrow{أحـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية انخفاض** الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ

ملاحظة



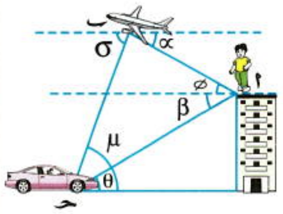
قياس زاوية انخفاض حـ بالنسبة إلى أ يساوى

قياس زاوية ارتفاع أ بالنسبة إلى حـ

وذلك لأن ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) (بالتبادل)

تحقق من فهمك

باستخدام الشكل المقابل أكمل ما يأتى :

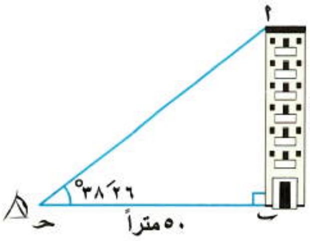


1. زاوية ارتفاع الشخص أ بالنسبة للسيارة حـ هى ....
2. زاوية انخفاض السيارة حـ بالنسبة للطائرة ب هى ....
3. زاوية ارتفاع الطائرة ب بالنسبة للشخص أ هى ....
4. زاوية انخفاض الشخص أ بالنسبة للطائرة ب هى ....

مثال 1

من نقطة على سطح الأرض على بُعد ٥٠ متراً من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى المنزل يساوى ٢٦ َ ٣٨° أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر.

الحل



بفرض أن أ ب يمثل ارتفاع المنزل

∴ ظا ٢٦ َ ٣٨° = $\frac{\text{أ ب}}{٥٠}$

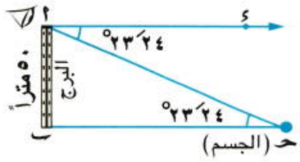
∴ أ ب = ٥٠ × ظا ٢٦ َ ٣٨° ≈ ٤٠ مترًا.

∴ ارتفاع المنزل = ٤٠ مترًا تقريبًا.

مثال 2

من قمة برج ارتفاعه ٥٠ متراً وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج يساوى ٢٤ َ ٢٣° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

الحل



بفرض أن أ ب يمثل ارتفاع البرج

∴ ∠ ء أ حـ هى زاوية انخفاض الجسم

∴ ق (∠ حـ) = ق (∠ ء أ حـ) = ٢٤ َ ٢٣° (لأن $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$)

∴ ظا ٢٤ َ ٢٣° = $\frac{٥٠}{\text{حـ ب}}$ ∴ حـ ب = $\frac{٥٠}{\text{ظا ٢٤ َ ٢٣°}}$ ≈ ١١٦ مترًا.

∴ بعد الجسم عن قاعدة البرج = ١١٦ مترًا تقريبًا.

حاول بنفسك

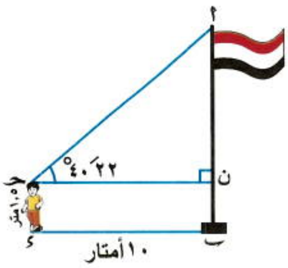
من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ مترًا عن قاعدة عمود رأسى، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة العمود هو ٣٢ َ ١٨°

أوجد لأقرب متر ارتفاع العمود عن سطح الأرض.

مثال ٣

وقف شخص طوله ١,٥ متر على بعد ١٠ أمتار من قاعدة سارية علم مثبتة رأسيًا على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى السارية يساوى ٢٢َ ٤٠° احسب طول السارية لأقرب متر.

الحل



بفرض أن : أب يمثل ارتفاع السارية ، جـ ء يمثل طول الشخص

نرسم $\overline{\text{جـ ن}} \parallel \overline{\text{ءب}}$ حيث ن $\in \overline{\text{أب}}$

∴ ظا ٢٢َ ٤٠° = $\frac{\text{أن}}{١٠}$ ∴ أن = ١٠ × ظا ٢٢َ ٤٠° ≈ ٨,٥ متر

، ∵ طول $\overline{\text{أب}}$ = أن + ن ب حيث : ن ب = جـ ء = ١,٥ مترًا

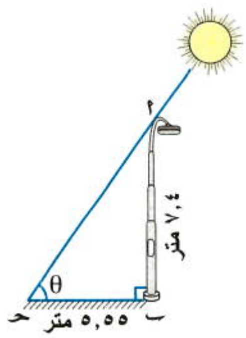
∴ أب = ٨,٥ + ١,٥ = ١٠ ∴ طول السارية = ١٠ أمتار تقريبًا.

مثال ٤

عمود إنارة ارتفاعه ٧,٤ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٥,٥٥ متر.

أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

الحل



بفرض أن : $\overline{\text{أب}}$ يمثل عمود الإنارة

، $\overline{\text{ب جـ}}$ يمثل ظل عمود الإنارة على الأرض

، θ قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

∴ ظا θ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٧,٤}{٥,٥٥}$ ∴ θ ≈ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ قياس زاوية ارتفاع الشمس بالراديان = ٥٣° ٧َ ٤٨ً × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≈ ٠,٩٢٧ ء

حاول بنفسك

من قمة صخرة ارتفاعها ٢٠٠ متر عن سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة.

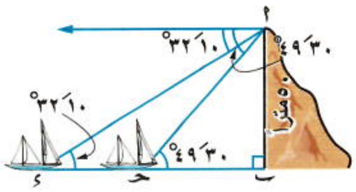
فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟

مثال ٥

من قمة صخرة ارتفاعها ٥٠ مترًا رصد شخص سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضيهما ٣٢° ١٠َ ، ٤٩° ٣٠َ أوجد البعد بين السفينتين.

الحل

بفرض أن أب يمثل ارتفاع الصخرة ، حء البعد بين السفينتين.



∴ فى Δ أبء : طا ٣٢° ١٠َ = $\frac{٥٠}{\text{بء}}$

∴ بء = $\frac{٥٠}{\text{طا } ٣٢° ١٠َ}$ = ٧٩,٥ متر تقريبًا

، فى Δ أبح : طا ٤٩° ٣٠َ = $\frac{٥٠}{\text{بح}}$

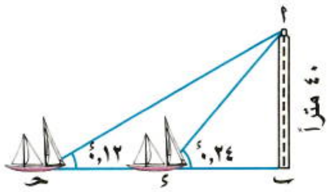
∴ بح = $\frac{٥٠}{\text{طا } ٤٩° ٣٠َ}$ = ٤٢,٧ متر تقريبًا.

∴ حء = ٧٩,٥ − ٤٢,٧ = ٣٦,٨ متر تقريبًا.

مثال ٦

تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٤٠ مترًا عن سطح البحر ، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٠,١٢ ء وبعد ٥ دقائق رصدت قمة المنارة ثانية فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٠,٢٤ ء . احسب سرعة السفينة علمًا بأن السفينة تسير بسرعة منتظمة.

الحل



بفرض أن : $\overline{\text{أب}}$ يمثل المنارة

وأن حء هى المسافة التى قطعتها السفينة فى ٥ دقائق.

∴ فى Δ أبح : طا ح = $\frac{\text{أب}}{\text{بح}}$

∴ طا ٠,١٢ ء = $\frac{٤٠}{\text{بح}}$ ∴ بح = $\frac{٤٠}{\text{طا } ٠,١٢ ء}$ ≈ ٣٣١,٧٣ مترًا.

، فى Δ أبء : طا (∠ أءب) = $\frac{\text{أب}}{\text{بء}}$

∴ طا ٠,٢٤ ء = $\frac{٤٠}{\text{بء}}$

∴ بء = $\frac{٤٠}{\text{طا } ٠,٢٤ ء}$ ≈ ١٦٣,٤٥ مترًا.

∴ ءح = ٣٣١,٧٣ − ١٦٣,٤٥ = ١٦٨,٢٨ مترًا.

∵ السفينة قطعت ١٦٨,٢٨ مترًا فى ٥ دقائق.

∴ سرعة السفينة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ = $\frac{١٦٨,٢٨}{٥}$ = ٣٣,٦٥٦ م/دقيقة.

ملاحظة

عند حساب طول $\overline{\text{بح}}$ أ، $\overline{\text{بء}}$ يجب تحويل الآلة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) بالضغط على

تمارين 11 على زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٤٠ مترًا عن قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة البرج فكان قياسها ٧٢° فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوى .... متر.

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢١ (جـ) ١٢٢ (د) ١٢٣

(٢) رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٤٠° فإن بعد الراصد عن الطائرة يساوى .... لأقرب متر.

(أ) ٦٤٣ (ب) ١١٩٢ (جـ) ١٣٠٥ (د) ١٥٥٦

(٣) من قمة برج ارتفاعه ٨٠ مترًا إذا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج ١٢َ ٢٤° فإن بُعد الجسم عن قاعدة البرج يساوى تقريبًا ....

(أ) ١٩٥ متر (ب) ١٧٨ متر (جـ) ٨٨ متر (د) ٣٦ متر

(٤) من قمة منارة ارتفاعها ٨٠ متر عن سطح البحر قيست زاوية انخفاض هدف ثابت على سطح البحر فكان قياسها ٨٠° ، فإن بُعد الهدف عن قمة المنارة يساوى .... متر تقريبًا.

(أ) ٧٨ (ب) ٧٩ (جـ) ٨٠ (د) ٨١

(٥) عمود إنارة طوله ٨ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٥ متر ، فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة يساوى ....

(أ) ٣٢° (ب) ٥١° (جـ) ٣٩° (د) ٥٨°

(٦) من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ مترًا عن سطح البحر يكون قياس زاوية انخفاض قارب يُبعد عن قاعدة الصخرة ٢٠٠ متر بالراديان ≃ .... ء

(أ) ٠,٠٨ (ب) ٠,٤٦ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٢٤

(٧) إذا سار شخص مسافة ١ كم على طريق منحدر يميل على سطح الأفقى بزاوية قياسها ١٥َ ٢٢° فإن مقدار ارتفاعه عن المستوى الأفقى عندئذ يساوى .... متر تقريبًا.

(أ) ٩٢٥,٥ (ب) ٤٠٩,١ (جـ) ٣٧٨,٦ (د) ٣٧٦,٨

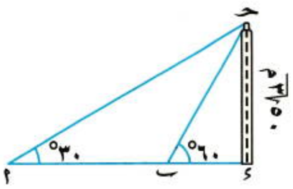
(٨) طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ مترًا ، فإذا كان قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية يساوى ٦٣°. فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض ≃ .... متر.

(أ) ٣٧ (ب) ١٩ (جـ) ٨٢ (د) ٨٠

(٩) شخص طوله ١٦٠ سم ويقف على سطح الأرض وعلى بُعد ٢٠ مترًا من شجرة رأسية وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى الشجرة يساوى ٤٨َ ٣١° فإن ارتفاع الشجرة ≃ .... متر.

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (جـ) ١٢ (د) ١١

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا قيست زاويتا ارتفاع قمة برج طوله ٥٠ $\sqrt{٣}$ متر من النقطتين أ ، ب على نفس الخط الأفقى المار بقاعدة البرج فكان قياساهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يساوى .... متر.

(أ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٥٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠٠ (د) ٥٠

(١١) 📖 من سطح منزل ارتفاعه ٨ أمتار رصد شخص زاوية ارتفاع قمة عمارة أمامه فوجد أن قياسها ٦٣° ورصد زاوية انخفاض قاعدتها فوجد أن قياسها ٢٨° فإن ارتفاع العمارة لأقرب متر يساوى .... متر.

(أ) ٣٠ (ب) ٣٨ (جـ) ٢٩ (د) ٣١

(١٢) وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٤٠ مترًا ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع أفقى واحد من قاعدة الصخرة ، وقاس زاويتى انخفاضيهما ، فوجد قياسيهما ١٢َ ٣٥° ، ٦َ ٥٣° فإن البعد بين السفينتين ≃ .... متر.

(أ) ١٩,٤ (ب) ١٧,٧ (جـ) ٢٦,٧ (د) ٨٦,٧

(١٣) إذا كان قياس زاوية ارتفاع الشمس ٣٠° فإن طول ظل برج ارتفاعه ١٥٠ متر على سطح الأرض = ... متر.

(أ) ٧٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٠٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٧٥ $\sqrt{٢}$

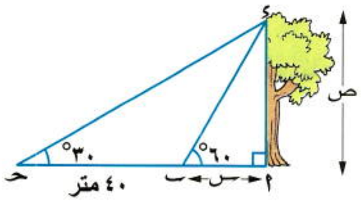
(١٤) من قمة تل ارتفاعه ٣٠٠ متر كانت زاويتى انخفاض قمة وقاعدة برج مقابل قياساهما ٣٠° ، ٤٥° على الترتيب فإذا كان كلًا من قاعدة التل والبرج على نفس المستوى الأفقى فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ٥٠ (٣ − $\sqrt{٣}$) (ب) ٢٠٠ (٣ − $\sqrt{٣}$) (جـ) ١٠٠ (٣ − $\sqrt{٣}$) (د) ١٥٠ (٣ − $\sqrt{٣}$)

(١٥) إذا كان طول ظل برج رأسى على الأرض الأفقية عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس قياسها ٣٠° أكبر من طوله عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس قياسها ٤٥° بمسافة ٦٠ متر فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٣٠ ($\sqrt{٣}$ + ١)

(١٦) في الشكل المقابل :



شخص يقف على ضفة نهر وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة على الضفة الأخرى للنهر يساوى ٦٠° وعندما تحرك ٤٠ متر مبتعدًا عن الشجرة فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ فإن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة أصبح ٣٠° فإن عرض النهر = ... متر.

(أ) ٦٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٠ (د) ٢٠

(١٧) قام شخص من قمة برج مراقبة ارتفاعه ٢٠٠ متر برصد سفينتين فى البحر فى نفس المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج وفى جهتين مختلفتين من برج المراقبة فكان زاويتى انخفاضيهما ٣٠° ، ٤٥° فإن المسافة بين السفينتين ≃ .... متر.

(أ) ٥٥٠ (ب) ٥٤٦ (جـ) ٤٣٦ (د) ٦١٥

(١٨) من قاعدة وقمة منزل ارتفاعه ١٠ أمتار تم رصد زاويتى ارتفاع قمة برج مقابل فكانتا ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب فإذا كان قاعدتى المنزل والبرج على نفس المستوى الأفقى فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٧,٥

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ من نقطة على بعد ٨ أمتار من قاعدة شجرة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة ٢٢° ، أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب رقمين عشريين. «٣,٢٣ مترًا»

---

٢ وجد شخص أن قياس زاوية ارتفاع قمة برج يساوى ٢١َ ٣٩° فإذا كان الشخص يبعد عن قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا فما ارتفاع البرج ؟ «٤١ مترًا تقريبًا»

---

٣ من نقطة على سطح الأرض تبعد ٢٠ مترًا عن قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية ارتفاع المنزل ٤٣َ ٢٧° أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر. «١١ مترًا تقريبًا»

---

٤ رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥° ، أوجد بعد الراصد عن الطائرة. «٢٣٤١,٤ مترًا تقريبًا»

---

٥ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ مترًا من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة ، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟ «٠,٥٤ ء تقريبًا»

٦ رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض، فوجد أن قياس زاوية انخفاضها هو ٦٣°. أوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة والراصد. «٢٨٧٣ مترًا تقريبًا»

---

٧ من قمة منارة ارتفاعها ٢٠٠ متر قيست زاوية انخفاض قارب فى النهر فكان قياسها يساوى ١٤َ ٣١° فما بُعد القارب عن قاعدة المنارة إذا كان القارب يقع مع قاعدة المنارة فى مستو أفقى واحد ؟ «٣٢٩,٨ مترًا تقريبًا»

---

٨ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج يساوى ٣٦َ ٢٨° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر. «١١٠ متر تقريبًا»

---

٩ عمود إنارة طوله ٧,٢ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٤,٨ متر

أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ. «٠,٩٨٣ء»

---

١٠ أوجد قياس زاوية ارتفاع الشمس عندما يكون ظل سارية علم طولها ٣,٥ متر هو ٢ متر. «١٥َ ٦٠° تقريبًا»

---

١١ من قمة برج ارتفاعه ١٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج هو ٣٥° أوجد بُعد هذا الجسم عن كل من قاعدة البرج وقمته لأقرب متر. «٢٢٩ مترًا تقريبًا ، ٢٧٩ مترًا تقريبًا»

---

١٢ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى ، ويرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر والطرف السفلى للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٤°

أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًّا من :

(١) بعد الطرف السفلى عن الحائط. (٢) طول السلم. «١,٨٥ مترًا تقريبًا ، ٤,٢٣ مترًا تقريبًا»

---

١٣ إذا كان قياس زاوية ارتفاع مئذنة من نقطة على بُعد ١٤٠ مترًا من قاعدتها يساوى ٤٦َ ٢٦° فما هو ارتفاع المئذنة لأقرب متر ؟ وإذا قيست زاوية ارتفاع المئذنة نفسها من نقطة تبعد ١١٠ أمتار من قاعدتها فأوجد لأقرب دقيقة قياس زاوية ارتفاعها عندئذ. «٧١ مترًا ، ٥٠َ ٣٢°»

---

١٤ وجد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد مثبت هو $\frac{\pi}{٦}$ ، ولما سار الراصد فى مستوى أفقى نحو المنطاد مسافة ٨٠٠ متر وجد أن قياس زاوية الارتفاع هو $\frac{\pi}{٤}$

أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر. «١٠٩٣ مترًا تقريبًا»

15 وقف رجلان فى جهتين مختلفتين من سارية علم مثبتة رأسيًا على سطح الأرض بحيث كان الرجلان وقاعدة السارية على مستقيم أفقى واحد. فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة السارية وكان قياسا زاويتى ارتفاعها هما ١٦َ ٥٤° ، ١٢َ ٤٧° أوجد البعد بين الرجلين
إذا كان طول السارية ١٢ مترًا (بفرض إهمال طولى الرجلين). «١٩,٧ مترًا»

---

١٦ $\overline{أب}$ يمثل برجًا ارتفاعه ٥٠ مترًا قاعدته ب وقمته أ ، وقف شخصان أحدهما عند حـ والآخر عند ء حيث ب ، حـ ، ء تقع على مستقيم أفقى واحد ، بحيث حـ تقع بين ب ، ء فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة البرج ، كان قياسا زاويتى ارتفاع قمة البرج ١٣َ ٥٢° ، ٣٦َ ٤٥° على الترتيب فأوجد طول $\overline{حـ ء}$ (بفرض إهمال طولى الشخصين). «١٠,٢ مترًا»

---

١٧ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا رصدت سفينتان فى البحر على شعاع أفقى واحد من قاعدة البرج فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضيهما ٤٧° ، ٣٥َ ٤١° على الترتيب.
أوجد البعد بين السفينتين لأقرب متر. «١٢ مترًا»

---

١٨ يقف شخص على بعد ٨٥ مترًا من قاعدة برج على قمته سارية علم فلاحظ أن قياسى زاويتى ارتفاع قمة السارية وقاعدة السارية ٥٦° ، ٥٤° على الترتيب.
أوجد طول سارية العلم لأقرب متر (بفرض إهمال طول الشخص). «٩ أمتار»

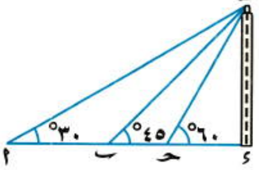
---

١٩ تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ مترًا ، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١١,٠٠ ء وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانية فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٢,٠٠ ء احسب سرعة السفينة علمًا بأنها تسير بسرعة منتظمة. «١٥,٣ متر/دقيقة»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

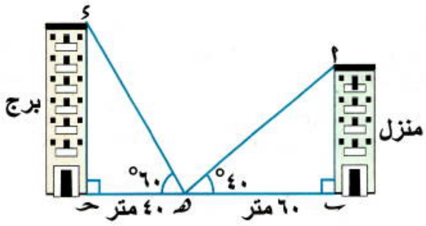


إذا كانت قياسات زوايا ارتفاع أعلى نقطة فى البرج من ثلاث نقاط على الخط المؤدى لأسفل نقطة فى البرج هى ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° على الترتيب

فإن أب : ب حـ = ...

(أ) ١ : $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ : ٣ (جـ) $\sqrt{٣}$: $\sqrt{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$: ١

(٢) فى الشكل المقابل :



ظل زاوية ارتفاع قمة البرج من قمة المنزل = ...

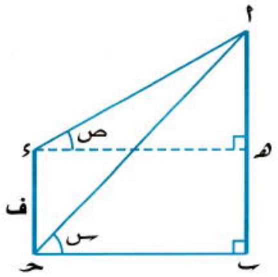
(أ) $\frac{\text{٤٠ جا ٦٠° − ٦٠ جا ٤٠°}}{\text{١٠٠}}$

(ب) $\frac{\text{٤٠ ظا ٦٠° − ٦٠ ظا ٤٠°}}{\text{١٠٠}}$

(جـ) ١٠٠ ظا ٨٠°

(د) ٤٠ ظا ٦٠° − ٦٠ ظا ٤٠°

(٣) فى الشكل المقابل :



قيست زاويتا ارتفاع قمة جبل $\overline{\text{أب}}$ من قاعدة وقمة منزل $\overline{\text{حـ ء}}$ ارتفاعه ف فوجد قياساهما على الترتيب س ، ص فإن : أب = ...

(أ) $\frac{\text{ف ظا س}}{\text{ظا ص}}$

(ب) $\frac{\text{ف ظا س}}{\text{ظا س − ظا ص}}$

(جـ) ف (ظا س − ظا ص)

(د) ف ظا س ظا ص

الدرس 5 القطاع الدائرى

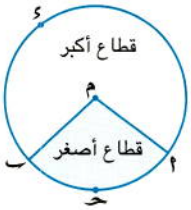
تعريف

القطاع الدائرى هو جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها وبنصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس.

فإذا رسمنا فى الدائرة م نصفى القطرين $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$

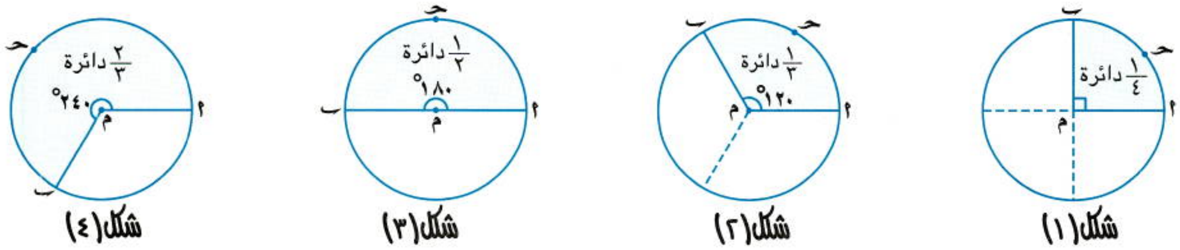
– كما فى الشكل المقابل – فإن سطح الدائرة

ينقسم بهما إلى جزأين كل منهما يسمى **«قطاع دائرى»**.



- فالجزء م أ حـ ب يسمى قطاعًا دائريًا أصغر بينما الجزء م أ ء ب يسمى قطاعاً دائريًا أكبر.
- وتسمى ∠ أ م ب بزاوية القطاع الأصغر ، ∠ أ م ب المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر.
- ويسمى $\overset{\frown}{أ حـ ب}$ بقوس القطاع الأصغر ، $\overset{\frown}{أ ء ب}$ بقوس القطاع الأكبر.

مساحة القطاع الدائرى



بملاحظة الأشكال السابقة نجد أن :

شكل (١) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م أ حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{4}$ ، $\frac{\text{ق (∠ أ م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$

شكل (٢) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م أ حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{\text{ق (∠ أ م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$

شكل(٣) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م ﺃ حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ق (د ﺃ م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$

شكل(٤) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م ﺃ حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{\text{ق (د ﺃ م ب المنعكسة)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$

أى أن النسبة بين مساحة القطاع ومساحة الدائرة هى نفس النسبة بين قياس زاوية القطاع وقياس الدائرة.

$$\boxed{\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع}}{\text{قياس الدائرة}}}$$

وإذا رمزنا إلى : قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائرى بالرمز $\theta^{ء}$ وقياسها بالتقدير الستينى بالرمز $س^\circ$ ، طول نصف قطر الدائرة بالرمز نق وطول قوس القطاع بالرمز ل فإن :

١ $\frac{\text{مساحة القطاع الدائرى}}{\pi \text{ نق}^2} = \frac{\theta^{ء}}{2\pi}$ $\therefore$ مساحة القطاع الدائرى $= \frac{\theta^{ء}}{2\pi} \times \pi \text{ نق}^2$

أى أن $\boxed{\text{مساحة القطاع الدائرى} = \frac{1}{2}\theta^{ء} \text{ نق}^2}$

٢ $\frac{\text{مساحة القطاع الدائرى}}{\pi \text{ نق}^2} = \frac{س^\circ}{360^\circ}$ $\therefore$ مساحة القطاع الدائرى $= \frac{س^\circ}{360^\circ} \times \pi \text{ نق}^2$

أى أن $\boxed{\text{مساحة القطاع الدائرى} = \frac{س^\circ}{360^\circ} \times \text{مساحة الدائرة}}$

٣ $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{\text{نق}}$

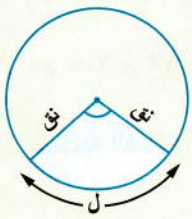
، $\because$ مساحة القطاع الدائرى $= \frac{1}{2}\theta^{ء} \text{ نق}^2$ $\therefore$ مساحة القطاع الدائرى $= \frac{1}{2} \times \frac{ل}{\text{نق}} \times \text{نق}^2$

أى أن $\boxed{\text{مساحة القطاع الدائرى} = \frac{1}{2} \text{ ل نق}}$

ملاحظتان

١ يمكن اعتبار الدائرة قطاعًا دائريًا قياس زاويته = 360°
وتكون مساحة القطاع الدائرى = مساحة الدائرة = π نق^2

٢ محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل



مثال ١

أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قوسه ل فى دائرة طول نصف قطرها نق إذا كان قياس زاويته $\theta^{ء}$ بالتقدير الدائرى ، س° بالتقدير الستينى فى كل مما يأتى :

١ نق = ١٠ سم ، $\theta^{ء}$ = ١,٥^{ء} | ٢ نق = ١٠,٥ سم ، س° = ١٤٤°

٣ نق = ٦ سم ، ل = ٤ سم

الحل

١ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^2 = $\frac{1}{2}$ × ١,٥ × (١٠)^2 = ٧٥ سم^2

٢ مساحة القطاع = $\frac{\text{س}^\circ}{360^\circ}$ × π نق^2 = $\frac{144^\circ}{360^\circ}$ × π × (١٠,٥)^2 ≈ ١٣٨,٥ سم^2

٣ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٦ = ١٢ سم^2

حاول بنفسك

١ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته = ٧ سم ، زاويته المركزية قياسها ٢,١^{ء}

٢ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته = ٦,٥ سم وطول قوسه = ٨ سم

٣ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ٦٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

مثال ٢

قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢ سم ، ومحيطه ٥٥ سم أوجد مساحته.

الحل

∵ نق = ١٢ سم ، محيط القطاع = ٥٥ سم ، ∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل

∴ ٥٥ = ٢ × ١٢ + ل ∴ ل = ٣١ سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٣١ × ١٢ = ١٨٦ سم^2

مثال ٣

قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٥ سم ، ومساحته ٢٧٠ سم^{٢} أوجد :

١ طول قوس القطاع. ٢ قياس زاوية القطاع بالقياسين الدائرى والستينى.

الحل

١ ∵ نق = ١٥ سم ، مساحة القطاع = ٢٧٠ سم^{٢} ، ∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

∴ ٢٧٠ = $\frac{١}{٢}$ ل × ١٥ ∴ ل = ٣٦ سم

٢ ∵ ل = ٣٦ سم ، نق = ١٥ سم ∴ $\theta^{د}$ = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٣٦}{١٥}$ = ٢,٤^{د}

∴ س$^{\circ}$ = ٢,٤ × $\frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$ ≈ ٣١َ ١٣٧$^{\circ}$

مثال ٤

قطاع دائرى مساحته ٧٥ سم^{٢} ومحيطه ٣٥ سم

أوجد طول نصف قطر دائرته وقياس زاويته المركزية بالقياس الستينى.

الحل

∵ مساحة القطاع = ٧٥ ∴ $\frac{١}{٢}$ ل نق = ٧٥ ∴ ل نق = ١٥٠ (١)

، ∵ محيط القطاع = ٣٥ ∴ ل + ٢ نق = ٣٥ ∴ ل = ٣٥ − ٢ نق (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ (٣٥ − ٢ نق) نق = ١٥٠

∴ ٢ نق^{٢} − ٣٥ نق + ١٥٠ = ٠ ∴ (نق − ١٠) (٢ نق − ١٥) = ٠

∴ نق = ١٠ سم ، أ نق = ٧$\frac{١}{٢}$ سم وبالتعويض فى (١)

∴ ل = ١٥ سم	∴ ل = ٢٠ سم
، ∵ $\theta^{د}$ = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{١٥}{١٠}$ = ١,٥^{د}	، ∵ $\theta^{د}$ = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٢٠}{٧,٥}$ = $\frac{٨}{٣}^{د}$
∴ س$^{\circ}$ = ١,٥^{د} × $\frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$ ≈ ٣٧ً ٥٦َ ٨٥$^{\circ}$	∴ س$^{\circ}$ = $\frac{٨}{٣}^{د}$ × $\frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$ ≈ ١٩ً ٤٧َ ١٥٢$^{\circ}$

حاول بنفسك

قطاع دائرى مساحته ١٢٠ سم^{٢} ، وطوله قوسه ٢٠ سم

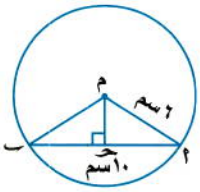
أوجد قياس زاويته بالقياسين الدائرى والستينى وأوجد محيط القطاع.

مثال ٥

دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها نصفا القطرين $\overline{م ء}$ ، $\overline{م ب}$ بحيث : ء ب = ١٠ سم

أوجد مساحة القطاع الأصغر م ء ب لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل



نرسم $\overline{م حـ} \perp \overline{ء ب}$ يقطعه فى حـ فيكون حـ منتصف $\overline{ء ب}$

$\therefore$ ء حـ = حـ ب = ٥ سم

$\because$ Δ ء حـ م فيه : ق(∠ ء حـ م) = ٩٠°

$\therefore$ جا (∠ ء م حـ) = $\frac{ء حـ}{ء م} = \frac{٥}{٦}$ $\qquad$ $\therefore$ ق(∠ ء م حـ) ≈ ٥٦° ٢٦َ ٣٤ً

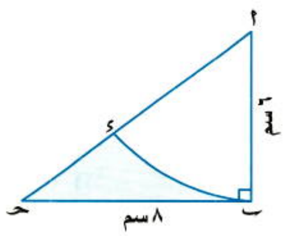
$\therefore$ ق(∠ ء م ب) = ٢ × ٣٤ً ٢٦َ ٥٦° = ٨ً ٥٣َ ١١٢°

مساحة القطاع الأصغر م ء ب = $\frac{س°}{٣٦٠°} \times \pi$ نق^٢ = $\frac{٨ً\ ٥٣َ\ ١١٢°}{٣٦٠°} \times \pi \times (٦)^٢ \approx ٣٥,٤٦$ سم^٢

مثال ٦

ء ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : ء ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم، رسم قوس دائرى مركزه ء وطول نصف قطر دائرته يساوى ء ب قطع $\overline{ء حـ}$ فى ى أوجد لأقرب سم^٢ مساحة المنطقة المحصورة بين : $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ى}$ ، $\overset{\frown}{ب ى}$

الحل



المساحة المطلوبة = مساحة Δ ء ب حـ − مساحة القطاع ء ب ى

إيجاد مساحة Δ ء ب حـ :

مساحة Δ ء ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ء ب × ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^٢

إيجاد مساحة القطاع ء ب ى :

$\because$ نق = ء ب = ٦ سم ، ظا (∠ ب ء ى) = $\frac{ب حـ}{ء ب} = \frac{٨}{٦}$ $\qquad$ $\therefore$ ق(∠ ب ء ى) ≈ ٤٨ً ٧َ ٥٣°

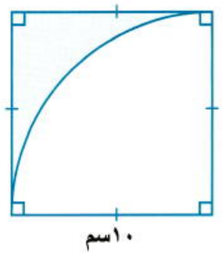
$\therefore$ مساحة القطاع ء ب ى = $\frac{س°}{٣٦٠°} \times \pi$ نق^٢ = $\pi \times ٦^٢ \times \frac{٤٨ً\ ٧َ\ ٥٣°}{٣٦٠°} \approx ١٧$ سم^٢

$\therefore$ المساحة المطلوبة = ٢٤ − ١٧ = ٧ سم^٢

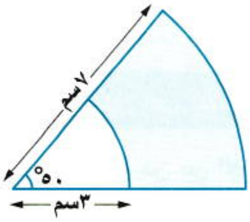
حاول بنفسك

أوجد مساحة الجزء المظلل فى كل مما يأتى بدلالة π :

١



٢

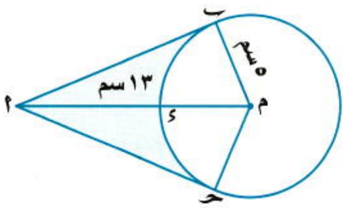


مثال ٧

أ نقطة خارج دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، أ م = ١٣ سم ، رسمت $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ مماستين للدائرة فى ب ، جـ فأوجد لأقرب سم^2 مساحة المنطقة بين : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

الحل

مساحة المنطقة المطلوبة = مساحة الشكل أ ب م جـ − مساحة القطاع ب م جـ د



إيجاد مساحة الشكل أ ب م جـ :

∵ $\overline{\text{أب}}$ مماسة للدائرة ، $\overline{\text{بم}}$ نصف قطر فيها.

∴ ق (∠ م ب أ) = ٩٠°

وبالمثل ق (∠ أ جـ م) = ٩٠°

∴ أ ب = أ جـ = $\sqrt{(١٣)^2 - (٥)^2}$ = ١٢ سم (فيثاغورث)

∴ مساحة الشكل أ ب م جـ = ٢ × مساحة Δ أ ب م = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ = ٦٠ سم^2

إيجاد مساحة القطاع ب م جـ د :

فى Δ م ب أ القائم الزاوية فى ب : جتا (∠ ب م أ) = $\frac{٥}{١٣}$ ∴ ق (∠ ب م أ) ≈ ٤٨ َ ٢٢ ً ٦٧°

∴ ق (∠ ب م جـ) = ٢ × ٤٨ َ ٢٢ ً ٦٧° ≈ ٣٦ َ ٤٥ ً ١٣٤°

∴ مساحة القطاع ب م جـ د = π نق^2 × $\frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠^\circ}$ = π × ٢٥ × $\frac{٣٦\,َ\ ٤٥\,ً\ ١٣٤^\circ}{٣٦٠^\circ}$ ≈ ٢٩ سم^2

∴ مساحة المنطقة المطلوبة = ٦٠ − ٢٩ = ٣١ سم^2

تمارين 12

على القطاع الدائرى

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) محيط القطاع الدائرى الذى طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم يساوى .... سم

(أ) ١٤ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٠

(٢) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٨

(٣) مساحة القطاع الدائرى الذى طول قوسه ١٠ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢,٥ (د) ١٠٠

(٤) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ^{ء}١,٢ وطول نصف قطر دائرته ٤ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٤,٨ (ب) ٩,٦ (جـ) ١٢,٨ (د) ١٩,٦

(٥) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته °١٢٠ وطول نصف قطر دائرته ٣ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٣ π (ب) ٦ π (جـ) ٩ π (د) ١٢ π

(٦) إذا كان محيط قطاع دائرى ٨ سم وطول قوسه ٢ سم فإن : نق = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) القطاع الدائرى الذى محيطه ٤٤ سم وطول نصف قطر دائرته ١٤ سم فإن طول قوسه يساوى .... سم

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٣٢ (د) ٤

(٨) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٩) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤ سم ، ومحيطه ٢٠ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(١٠) قطاع دائرى مساحته ١٥ سم^2 وطول قوسه ٣ سم فإن : نق = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢,٥ (د) ١٥

(١١) قطاع دائرى مساحته ٤٠٠ سم^{٢} ، وطول نصف قطر دائرته ٢٠ سم فإن طول قوسه يساوى .... سم

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

(١٢) إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ١١٠ سم^{٢} وقياس زاويته ٢,٢^{ء}

فإن طول نصف قطر دائرته يساوى .... سم

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ٢٤ سم^{٢} ، طول قوسه ٨ سم يساوى .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٤ (جـ) ٣٢ (د) ٢٤

(١٤) قطاع دائرى مساحته ٤٥ سم^{٢} وطول قطر دائرته ٢٠ سم ، فإن محيطه يساوى .... سم

(أ) ٢٩ (ب) ١٩ (جـ) ٣٩ (د) ٤٩

(١٥) مساحة قطاع دائرى ٢٧ سم^{٢} وطول نصف قطر دائرته ٦ سم

، فإن القياس الدائرى لزاويته المركزية = ...^{ء}

(أ) ١,٥ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤,٥

(١٦) قطاع دائرى محيطه ٤ نق سم حيث نق طول نصف قطر دائرته ، فإن القياس الدائرى لزاويته المركزية يساوى .... راديان.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٧) قطاع دائرى طول قوسه (ل) وقياس زاويته ١,٢^{ء} مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها (نق)

فإن محيطه = ... وحدة طول.

(أ) ١,٢ نق (ب) ٣,٢ نق (جـ) ١,٢ نق^{٢} (د) ٣,٢ نق^{٢}

(١٨) قياس زاوية القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته نق سم ومساحته $\frac{\pi}{٦}$ نق^{٢} سم^{٢}

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(١٩) قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم وطول قوسه ١٠ سم فإن مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٧ π (ب) ١٤ π (جـ) ٤٩ π (د) ١٥٤ π

(٢٠) دائرة مساحتها ٥٣,٦ سم^{٢} فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة قياس زاويته ٣٠َ ٦٧° ≃ .... سم^{٢}

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٢١) دائرة مساحتها $\frac{٥}{٨}$ ٤٩٠ سم^{٢} فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة طول قوسه ٣٢ سم ≃ .... سم^{٢}

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٣٠٠

(٢٢) قطاع دائرى طول قوسه ٤ ل سم وطول نصف قطر دائرته نق سم فإن محيطه = ... سم

(أ) ل + ٢ نق (ب) نق + ٢ ل (جـ) ٢ (نق + ٢ ل) (د) ٢ (ل + ٢ نق)

(٢٣) قطاع دائرى طول قوسه (ل) وقياس زاويته ($\theta^{ء}$) وطول نصف قطر دائرته (نق)

فإن محيطه = ...

(أ) نق + ل (ب) نق + ٢ ل (جـ) نق ($٢ + \theta^{ء}$) (د) ٢ نق ($١ + \theta^{ء}$)

(٢٤) قطاع دائرى محيطه ٣٥ سم ، ومساحته ٧٥ سم^{٢} فإن قياس زاويته بالقياس الدائرى = ...ء

(أ) $\frac{٣}{٢}$ ، أ $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ ، أ $\frac{٧}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ ، أ $\frac{٨}{٣}$ (د) ١ ، أ $\frac{٨}{٣}$

(٢٥) قطاع دائرى مساحته م زاد طول قطر دائرته إلى الضعف فإن مساحته تصبح .... باعتبار أن زاويته المركزية لا تتغير.

(أ) ٢ م (ب) ٤ م (جـ) $\frac{١}{٢}$ م (د) ٣ م

(٢٦) دائرة طول نصف قطرها نق سم وكان محيط قطاع دائرى فيها (٢ نق + ٨) سم

فإن مساحة هذا القطاع .... سم^{٢}

(أ) نق^{٢} (ب) ٤ نق^{٢} (جـ) ٨ نق^{٢} (د) ٤ نق

(٢٧) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائرى إلى مساحة دائرته كنسبة ٢ : ٥

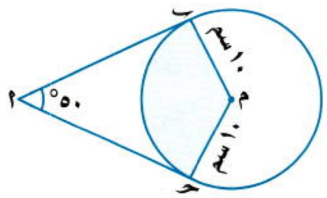
فإن قياس زاوية القطاع = ...

(أ) °٣٦ (ب) °٧٢ (جـ) °١٠٨ (د) °١٤٤

(٢٨) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائرى إلى مساحة دائرته كنسبة ٣ : ٧ وكان محيط الدائرة يساوى ٤٢ سم فإن طول قوس القطاع = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٢٩) فى الشكل المقابل :

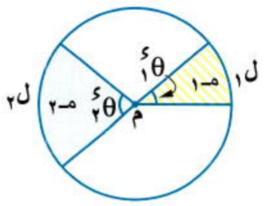


مساحة المنطقة المظللة تساوى ....

(أ) $\frac{٥٠}{٩}\pi$ (ب) $\frac{١٢٥}{٩}\pi$

(جـ) $\frac{٢٠٠}{٩}\pi$ (د) $\frac{٣٢٥}{٩}\pi$

(٣٠) فى الشكل المقابل :



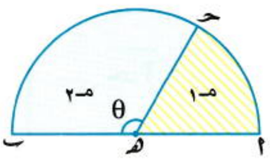
دائرة مركزها م ، م$_١$ ، م$_٢$ هما مساحتى القطاعين المظللين

فإن : $\frac{م_١}{م_٢}$ = ...

(١) $\frac{ل_١}{ل_٢}$ (٢) $\frac{\theta_1^{ء}}{\theta_2^{ء}}$ (٣) $\frac{ل_١^٢}{ل_٢^٢}$

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط.

(جـ) (١) ، (٢) فقط. (د) (٢) ، (٣) فقط.



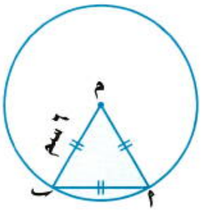
(٣١) فى الشكل المقابل :

نصف دائرة مركزها هـ

إذا كان : $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{٢}{٣}$

فإن : θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٠٥° (جـ) ١٠٨° (د) ١٢٠°

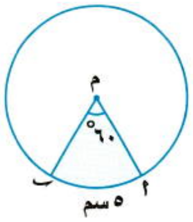


(٣٢) فى الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ١٨ (ب) ١٨ $\sqrt{٣}$

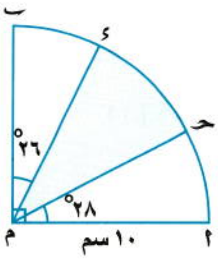
(جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ π (د) ٦ π



(٣٣) فى الشكل المقابل : مساحة القطاع المظلل = ... سم٢

(أ) ٣٠ π (ب) $\frac{٢٢٥}{π}$

(جـ) $\frac{٧٥}{٢π}$ (د) ٥٠ π



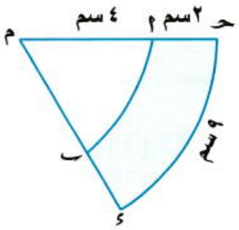
(٣٤) فى الشكل المقابل :

ربع دائرة مركزها م

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ١٠ π (ب) ٢٠ π

(جـ) ٣٠ π (د) ٤٠ π



(٣٥) فى الشكل المقابل :

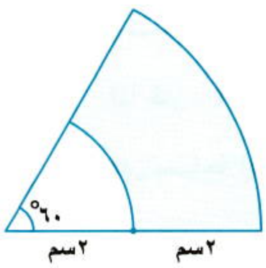
دائرتان متحدتا المركز (م)

طولا نصفا قطريهما ٤ سم ، ٦ سم

وطول $\overset{\frown}{حـ ء}$ = ٩ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ١٠ (ب) ٩ π (جـ) ١٢ π (د) ١٥



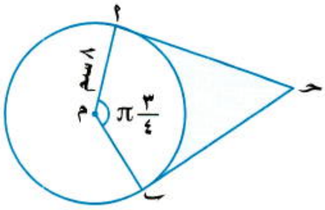
(٣٦) فى الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) π (ب) ٢ π

(جـ) $\frac{π}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$ π

(٣٧) في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{حـ أ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ب}$ مماسان للدائرة م

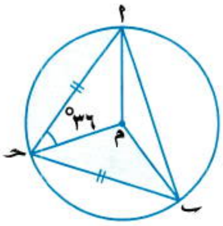
، طول نصف قطر الدائرة م = ٨ سم

فإذا كان : ق (∠ أ م ب) = $\frac{٣}{٤}\pi$

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٧٩,١ (ب) ٩٧,١ (جـ) ٧,٩١ (د) ٩,٧١

(٣٨) في الشكل المقابل :



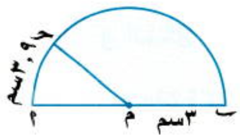
دائرة م طول نصف قطرها ١٠ سم

، ب حـ = أ حـ ، ق (∠ أ حـ م) = ٣٦°

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٢٠ π (ب) ٣٠ π (جـ) ٤٠ π (د) ٥٠ π

(٣٩) في الشكل المقابل :

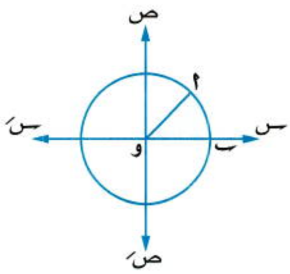


نصف دائرة مركزها م فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^{٢}

(أ) ٨,٢٩ (ب) ١٦,٦

(جـ) ٥,٥٢ (د) ١١,٠٤

(٤٠) في الشكل المقابل :



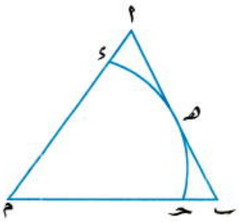
إذا كانت : أ (٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$)

فإن : مساحة الجزء المظلل تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٦٤ π (ب) ١٦ π

(جـ) ٤ π (د) ٨ π

(٤١) في الشكل المقابل :



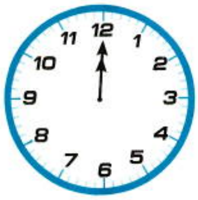
$\overline{أ ب}$ مماس للدائرة م التى تمر بالنقط حـ ، ء ، هـ

إذا كان : أ ب = ٨ سم ، م ء = ١١ سم ، طول $\overset{\frown}{حـ هـ ء}$ = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٢٢ (ب) ١٨ (جـ) ١٢ (د) ١١

(٤٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان طول عقرب الدقائق = ١٨ سم

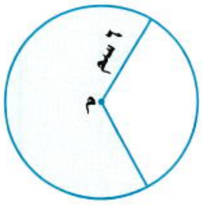
فإن المساحة التى يغطيها خلال ٥ دقائق

من حركته = ... سم^{٢}

(أ) ١٨ π (ب) ٢٧ π

(جـ) ٣٦ π (د) ٥٤ π

(٤٣) فى الشكل المقابل :

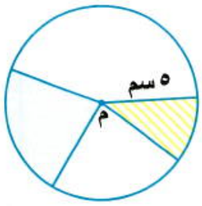


م مركز الدائرة ، محيط الجزء المظلل = ٤٥,٧ سم

فإن مساحة هذا الجزء = ... سم^{٢}

(أ) ١١٣,٢ (ب) ١٠١,١ (جـ) ٣٤ π (د) ٣٣ π

(٤٤) فى الشكل المقابل :



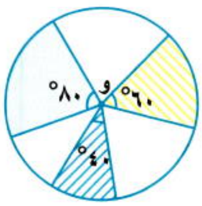
قطاعان دائريان فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

، مجموع محيطيهما ٣٠ سم فإن مجموع مساحتيهما

يساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٢ (د) ٢٠

(٤٥) فى الشكل المقابل :

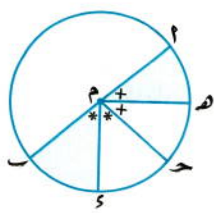


دائرة طول نصف قطرها ٧ سم

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^{٢} $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ١١ (ب) ٧٧ (جـ) ٥٣٧ (د) ٧٧٠

(٤٦) فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ قطر فى دائرة م طول نصف قطرها ٤ سم

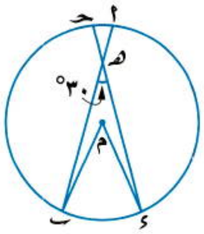
، $\overrightarrow{\text{مء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

، $\overrightarrow{\text{مهـ}}$ ينصف ∠ أ م جـ

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٤ π (ب) ٣ π (جـ) ٢ π (د) π

(٤٧) **فى الشكل المقابل :**



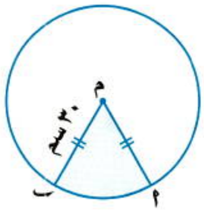
دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٣ سم ، ق (أحـ⌢) = ٢٠°

، ق (∠ ء هـ ب) = ٣٠°

فإن مساحة القطاع ء م ب تساوى .... سم²

(أ) π (ب) $\frac{١}{٢}\pi$ (جـ) ٢ π (د) $\frac{٣}{٤}\pi$

(٤٨) **فى الشكل المقابل :**

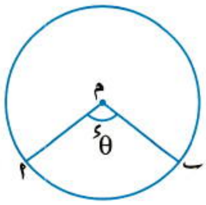


إذا كان طول أب⌢ : طول أب⌢ الأكبر = ١ : ٥

فإن مساحة القطاع المظلل = ... سم²

(أ) ٩٠ π (ب) ١٢٠ π (جـ) ١٥٠ π (د) ١٨٠ π

(٤٩) **فى الشكل المقابل :**

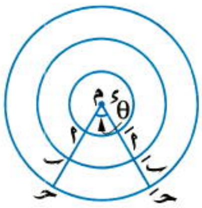


إذا كان : $\frac{\text{مساحة القطاع الأصغر}}{\text{مساحة القطاع الأكبر}} = \frac{٢}{٧}$

فإن θ ء = ...

(أ) $\frac{٢\pi}{٩}$ (ب) $\frac{٤\pi}{٩}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٥٠) **فى الشكل المقابل :**



إذا كان : م أ : م ب : م حـ = ٤ : ٦ : ٩

فإن : $\frac{\text{مساحة القطاع الأصغر م أ أَ}}{\text{مساحة القطاع الأصغر م حـ حـَ}} = $ ....

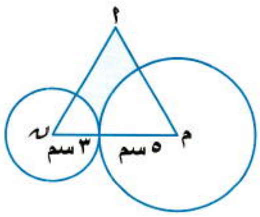
(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{١٦}{٨١}$

(٥١) دائرة طول نصف قطرها نق قسمت إلى ن من القطاعات الدائرية المتساوية فى المساحة

فإن مساحة القطاع الواحد = ...

(أ) $\frac{ن}{٣٦٠}\pi$ نق² (ب) $\frac{١}{٢}$ ن ء نق² (جـ) $\frac{١}{ن}\pi$ نق² (د) $\frac{ن}{\pi}$ نق²

(٥٢) **فى الشكل المقابل :**



دائرتان م ، ن متماستان من الخارج ، المثلث أ م ن متساوى الأضلاع

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم²

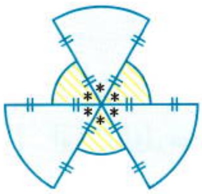
(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ − $\frac{٢}{٣}\pi$ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١٧}{٣}\pi$

(جـ) ١١ $\sqrt{٣}$ − ١٧ π (د) ٨ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١٧}{٣}\pi$

(٥٣) إذا كانت م مساحة قطاع دائرى فى دائرة فإذا نقص طول نصف قطر الدائرة إلى النصف دون تغيير زاويته المركزية فإن مساحة القطاع تنقص بمقدار .... المساحة الأصلية.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٥٤) فى الشكل المقابل :



٣ قطاعات دائرية من دائرة طول نصف قطرها نق سم

و ٣ قطاعات دائرية أخرى من دائرة طول نصف قطرها ٢ نق سم

فإن المساحة الكلية للشكل = ... سم^٢

(أ) ٣ π نق^٢ (ب) ٥ π نق^٢ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ π نق^٢ (د) $\frac{٣}{٢}$ π نق^٢

(٥٥) فى الشكل المقابل :

٧ دوائر متطابقة ومتماسة من الخارج

كما بالشكل طول نصف قطر كل منها نق سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ نق^٢ (ب) $\frac{٧\pi}{٦}$ نق^٢ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ نق^٢ (د) $\frac{٥}{٦}$ π نق^٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة قطاع دائرى طول قوسه ١٢ سم ، وطول نصف قطر دائرته ٨ سم «٤٨ سم^٢»

٢ قطاع دائرى طول قوسه ١٦ سم وطول نصف قطر دائرته ٩ سم. أوجد مساحته. «٧٢ سم^٢»

٣ قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٣٠° ، وطول نصف قطر دائرته ٣,٥ سم

احسب لأقرب سم^٢ مساحة القطاع. «٣ سم^٢ تقريبًا»

٤ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قطر دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠° «١٠٤,٧ سم^٢ تقريبًا»

٥ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ٤٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٦ سم لأقرب سم^٢

«١٣ سم^٢»

٦ قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٤٨° وطول نصف قطر دائرته ٦ سم أوجد مساحة القطاع لأقرب سم^٢

«١٥ سم^٢»

٧ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وقياس زاويته ١,٢ ء «٦٠ سم^2»

٨ قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، ومحيطه ٢٥ سم أوجد مساحته. «٣١,٥ سم^2»

٩ قطاع دائرى محيطه ٢٨ سم ، وطول نصف قطر دائرته ٧ سم أوجد مساحته وقياس زاويته المركزية بكلا القياسين الدائرى والستينى. «٤٩ سم^2 ، ٢ ء ، ٣٥َ ١١٤°»

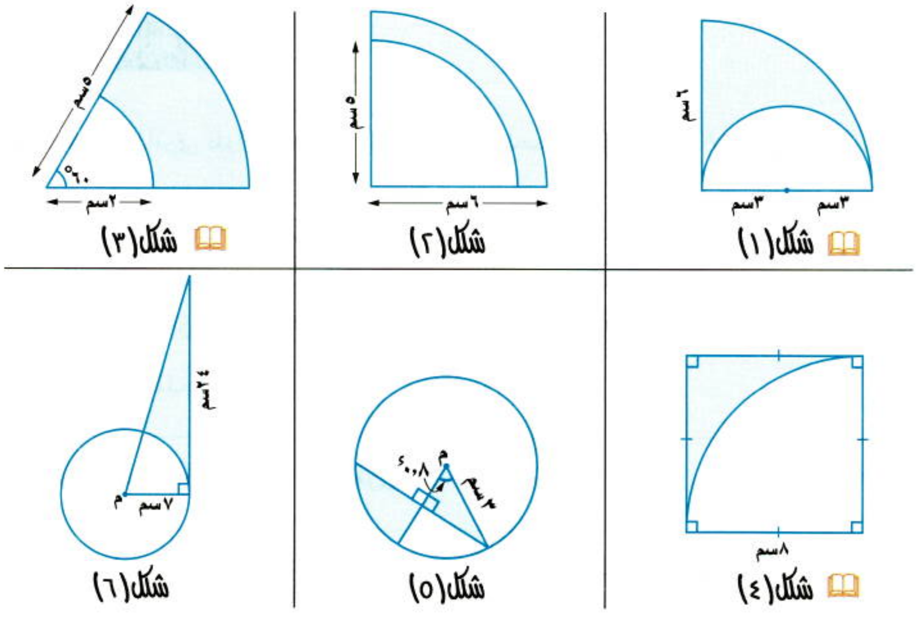
١٠ قطاع دائرى مساحته تساوى ٢٧٠ سم^2 وطول نصف قطر دائرته يساوى ١٥ سم
أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته المركزية بالراديان. «٣٦ سم ، ٢,٤ ء»

١١ قطاع دائرى مساحته ٤٠ سم^2 ، وطول قوسه ٨ سم أوجد محيطه. «٢٨ سم»

١٢ قطاع دائرى مساحته ٢٥ سم^2 ، وقياس زاويته المركزية ٠,٥ ء احسب طول نصف قطر دائرته وطول قوسه.
«١٠ سم ، ٥ سم»

١٣ إذا كانت مساحة قطاع دائرى = $\frac{٢}{٥}$ مساحة دائرته فأوجد قياس زاوية القطاع بالقياس الستينى والقياس الدائرى.
وإذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم فأوجد محيط القطاع لأقرب سنتيمتر. «١٤٤° ، ٢,٥١ ء ، ٤٥ سم»

١٤ أوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل فى كل شكل من الأشكال الآتية :



١٥ دائرة م طول نصف قطرها ٧,٥ سم ، رسم فيها نصفا القطرين $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ بحيث : أ ب = ١٢ سم
أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب لأقرب سم^2 «٥٢ سم^2 تقريبًا»

١٦ ثلاث دوائر طول نصف قطر كل منها ٥ سم ومراكزها هى رؤوس المثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ١٠ سم أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوائر الثلاث. «٤ سم^2 تقريبًا»

---

١٧ أ نقطة خارج دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، م أ = ١٢ سم رسمت $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ مماستين للدائرة فى ب ، حـ أوجد لأقرب سم^2 مساحة المنطقة المحصورة بين المماسين ، $\widehat{\text{ب حـ}}$ الأصغر. «٢٥ سم^2 تقريبًا»

---

١٨ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ $\sqrt{٣}$ سم ، رسم قوس دائرى مركزه أ ويمس $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء ويقطع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ فى س ، ص أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع مساحة المنطقة المحصورة بين $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\widehat{\text{س ص}}$ ($\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢) «٧,٧ سم^2 تقريبًا»

---

١٩ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ وتران فى دائرة م حيث : أب = أحـ = ٨ سم فإذا كان ق (∠ أ) = ٦٠° ، فأوجد لأقرب سم^2 مساحة القطاع الأصغر م ب حـ «٢٢ سم^2 تقريبًا»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان جذرا المعادلة ٣ س^2 − ١٩ س + ١٣ = ٠ يساويان طول قطر دائرة وطول قوس فيها فإن محيط القطاع الدائرى المرسوم على هذا القوس = ... سم

(أ) ١٩ (ب) ١٣ (جـ) $\frac{١٩}{٣}$ (د) $\frac{١٣}{٣}$

(٢) إذا كان جذرا المعادلة س^2 − ١٣ س + ١٩ = ٠ يساويان طول قطر دائرة وطول قوس فيها فإن مساحة القطاع الدائرى المرسوم على هذا القوس = ... سم^2

(أ) ١٩ (ب) $\frac{١٩}{٢}$ (جـ) $\frac{١٣}{٤}$ (د) $\frac{١٩}{٤}$

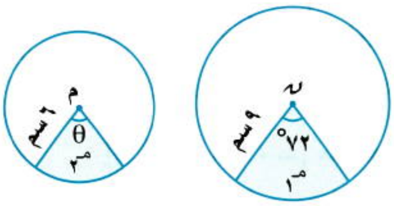
(٣) فى الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متباعدتان

إذا كان م$_1$ ، م$_2$ هما مساحتا القطاعين

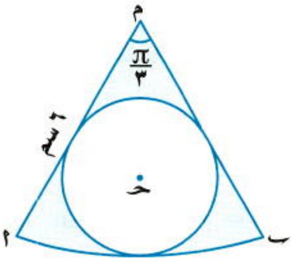
وكان : $\frac{م_1}{م_2} = \frac{٩}{٥}$

فإن : θ = ...



(أ) ٧٢° (ب) ٨٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

(٤) في الشكل المقابل :



م أ ب قطاع دائرى من دائرة مركزها (م)

، طول نصف قطرها ٦ سم ، ق (∠ أ م ب) = $\frac{\pi}{٣}$

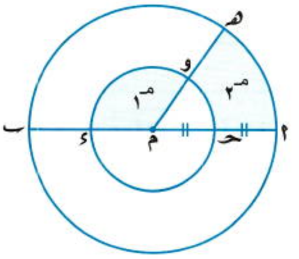
، ودائرة (ح) بداخل القطاع

تمس $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ ، $\overset{\frown}{أب}$

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٤ π (د) ٦ π

(٥) في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز (م) ، م ح = ح أ

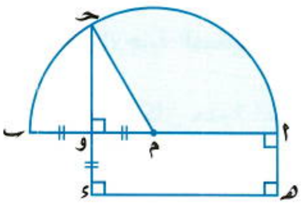
إذا كان م$_١$ ، م$_٢$ هما مساحتا المنطقتين المظللتين

وكان : م$_١$ = م$_٢$

فإن ق (∠ أ م هـ) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

(٦) في الشكل المقابل :

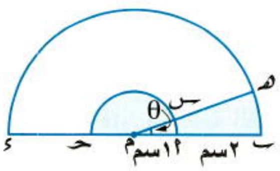


إذا كانت مساحة المستطيل أ هـ ء و = ٢٧ سم^٢

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) ٩ π (ب) ١٢ π (جـ) ١٥ π (د) ١٨ π

(٧) في الشكل المقابل :



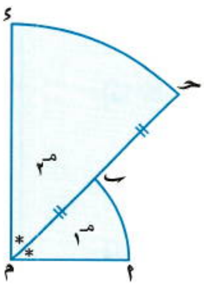
نصفا دائرتين متحدتى المركز (م)

إذا كانت مساحتا الجزئين المظللين متساويتين

، م أ = ١ سم ، أ ب = ٢ سم فإن : θ = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

(٨) في الشكل المقابل :



$\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{حء}$ قوسان فى دائرتين متحدتى المركز م

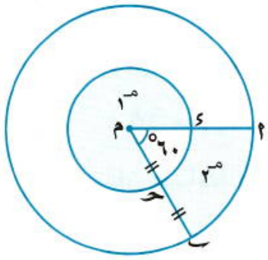
، م ب = ب ح ، ق (∠ أ م ب) = ق (∠ ح م ء)

إذا كان : م$_١$ ، م$_٢$ مساحتى القطاعين

فإن : $\frac{م_١}{م_٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٩) فى الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز (م)

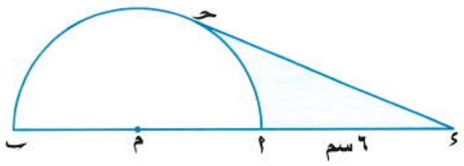
إذا كان : ق (∠ أ م ب) = ٦٠° ، م جـ = جـ ب

وكان م١ ، م٢ مساحتى المنطقتين المظللتين

فإن : م١ / م٢ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥/٣ (جـ) ٤/٣ (د) ١

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ءجـ↔ مماس لنصف دائرة (م)

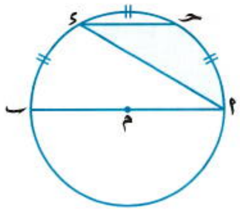
وكان : ءب = √٣ ءجـ ، أء = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ٢√٣ (ب) ١٢√٣ − ٣π

(جـ) ١٨√٣ − ٦π (د) ١٨√٣ − ٨π

(١١) فى الشكل المقابل :



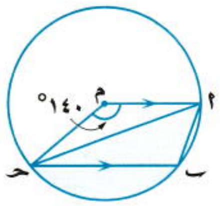
أب قطر فى الدائرة م طوله ١٢ سم

إذا كان : ق (⌒أجـ) = ق (⌒جـء) = ق (⌒ءب)

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ٥ π (ب) ٦ π (جـ) ٨ π (د) ١٠ π

(١٢) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها (م) ، أم // ب جـ

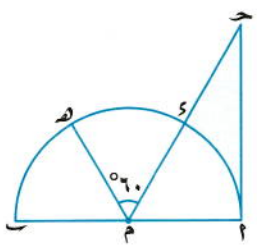
، ق (∠ أ م جـ) = ١٤٠°

، طول نصف قطر الدائرة = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ٥ π (ب) ٦ π (جـ) ٨ π (د) ١٠ π

(١٣) فى الشكل المقابل :



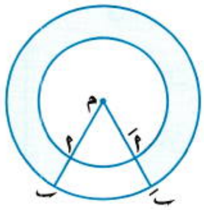
إذا كان طول القوس ⌒أءهـ = طول أجـ

، أ م = ١٢ سم ، أجـ↔ مماس للدائرة م عند أ

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ٦ π (ب) ١٨ π (جـ) ٢٤ π (د) ٣٦ π

(١٤) في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفي قطريهما ١٢ سم ، ١٨ سم إذا كان : ق (∠ أ م أَ) = ٣٠°

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^2

(أ) ١٢٥ π (ب) ١٥٠ π (جـ) ١٦٥ π (د) ١٨٠ π

---

٢ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم ، رسم قوس من دائرة مركزها أ ويمس $\overline{ب جـ}$ عند ب ويقطع $\overline{أ جـ}$ في ء فأوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع مساحة الجزء المحصور بين $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ ، $\overset{\frown}{ب ء}$ «٤,١ سم^2»

---

٣ م ، ن مركزا دائرتين متماستين من الخارج في أ ، المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس مشترك لهما يمس الأولى في ب والثانية في جـ فإذا كان طولا نصفي قطرى الدائرتين ٥ سم ، ١٥ سم على الترتيب فأوجد لأقرب سم^2 مساحة المنطقة المحصورة بين المماس المشترك والدائرتين ($\sqrt{3}$ = ١,٧٣٢) «٢٩ سم^2 تقريبًا»

تطبيقات حياتية

١ **الربط بالزراعة :** حوض زهور على شكل قطاع دائرى مساحته ٤٨ م^2 وطول قوسه ٦ م أوجد محيطه وطول نصف قطر دائرته. «٣٨ متر ، ١٦ متر»

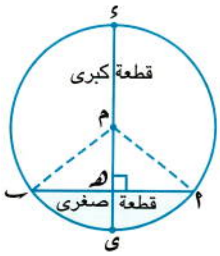
---

٢ قطعة من الورق على شكل مربع قطع منها ربع دائرة مركزها أحد رؤوس المربع وطول نصف قطرها يساوى طول ضلع المربع فإذا كانت مساحة الجزء الباقى من المربع ٤٨,٢٨٥ سم^2 فأوجد طول ضلع المربع. «١٥ سم»

الدرس 6 القطعة الدائرية

تعريف

القطعة الدائرية هى جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس.



- فإذا رسمنا فى الدائرة م الوتر $\overline{\text{أب}}$ – كما فى الشكل المقابل
  فإن سطح الدائرة ينقسم بهذا الوتر إلى جزأين كل منهما يسمى **«قطعة دائرية»**.
- والزاوية المركزية التى تقابل قوس القطعة تسمى زاوية القطعة فالزاوية أ م ب فى الشكل هى زاوية القطعة الصغرى أ ى ب بينما ∠ أ م ب المنعكسة هى زاوية القطعة الكبرى أ د ب
- وإذا كان $\overline{\text{دى}}$ قطرًا عموديًا على الوتر $\overline{\text{أب}}$ بحيث : $\overline{\text{دى}} \cap \overline{\text{أب}} = \{\text{هـ}\}$
  فإن ى هـ يسمى ارتفاع القطعة الصغرى.

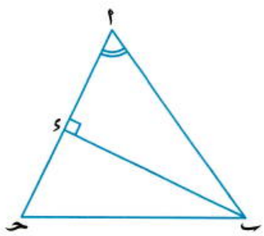
- **ويلاحظ أن** مساحة القطعة الصغرى = مساحة القطاع م أ ى ب – مساحة Δ م أ ب
  ، مساحة القطعة الكبرى = مساحة القطاع م أ د ب + مساحة Δ م أ ب

وعلى ذلك فإن مساحة القطعة الدائرية يتطلب حسابها إيجاد مساحة المثلث الذى قاعدته وتر القطعة ورأسه مركز الدائرة ، لذلك نمهد لمساحة القطعة بقانون يستفاد به فى إيجاد مساحة المثلث.

مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما :

نفرض أن لدينا Δ أ ب جـ المعلوم فيه : طول $\overline{\text{أب}}$ ، طول $\overline{\text{أجـ}}$ ، ق (∠ أ)

فإذا رسمنا العمود $\overline{\text{بد}}$ على $\overline{\text{أجـ}}$ (كما فى الشكل المقابل) فإن :



مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ × ب د   (١)

ولكن من Δ أ ب د القائم الزاوية فى د :

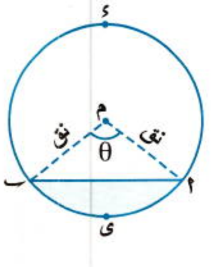
$\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}}$ = جا أ أى ب د = أ ب جا أ   (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ × أ ب جا أ

وهذا القانون صحيح لأى مثلث

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما.

إيجاد مساحة القطعة الدائرية



نفرض أن المطلوب إيجاد مساحة القطعة الصغرى أ ى ب

من دائرة طول نصف قطرها «نق» وأن قياس الزاوية

المركزية للقطعة = θ بالقياس الدائرى.

لذلك نقول : مساحة القطاع م أ ى ب = $\frac{١}{٢}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢}

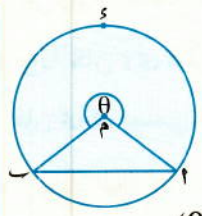
، مساحة Δ م أ ب = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب × جا (∠ أ م ب) = $\frac{١}{٢}$ نق × نق جا θ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا θ

∴ مساحة القطعة أ ى ب = مساحة القطاع م أ ى ب − مساحة Δ م أ ب

= $\frac{١}{٢}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢} − $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا θ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − جا θ)

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − جا θ)

مـلاحظات



١ مساحة القطعة الكبرى أ ء ب

= مساحة القطاع م أ ء ب + مساحة Δ م أ ب

= $\frac{١}{٢}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢} + $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا (٢ π − θ)

= $\frac{١}{٢}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢} − $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا θ (لأن جا (٢ π − θ) = − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − جا θ)

٢ يمكن إيجاد مساحة القطعة الكبرى بطرح مساحة القطعة الصغرى من مساحة الدائرة.

٣ محيط القطعة الدائرية = طول قوسها + طول وترها

مثـال ١

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها المركزية ١٢٠°

الحـل

∵ $\theta^{ء}$ = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≈ ٢,٠٩٤٤^{ء}

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ × ٨^{٢} (٢,٠٩٤٤^{ء} − جا ١٢٠°) ≈ ٣٩,٣ سم^{٢}

ملاحظة

فى المثال السابق : يمكن استخدام القياس الدائرى للزاوية المركزية فى حساب مساحة القطعة بدلاً من استخدام القياس الستينى فتكون :

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢} \times ٨^٢$ (٢,٠٩٤٤^د − جا ٢,٠٩٤٤) ≈ ٣٩,٣ سم^٢

مع ملاحظة أنه يجب تحويل نظام الآلة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) قبل حساب المساحة وذلك بالضغط على SHIFT ثم MODE ثم 4

مثال ٢

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وقياس زاويتها المركزية ١,٠٢^د مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

الحل

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^د$ − جا θ) = $\frac{١}{٢} \times ١٠^٢$ (١,٠٢^د − جا ١,٠٢^د)

≈ ٨,٣٩ سم^٢

حاول بنفسك

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها نق وقياس زاويتها المركزية θ إذا كان :

١ نق = ١٢ سم ، θ = ١٥٠°

٢ نق = ٨ سم ، $\theta^د$ = ٢,٠٢^د

مثال ٣

قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول قوسها ٢٦,١٩ سم

أوجد مساحة هذه القطعة.

الحل

∵ $\theta^د = \frac{ل}{نق} = \frac{٢٦,١٩}{١٠}$ = ٢,٦١٩^د

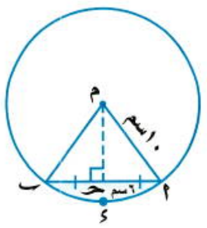
∴ مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^د$ − جا θ)

= $\frac{١}{٢} \times (١٠)^٢$ [٢,٦١٩^د − جا ٢,٦١٩^د] ≈ ١٠٥,٩٩ سم^٢

مثال ٤

إذا كان طول وتر قطعة دائرية فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم يساوى ١٢ سم فأوجد مساحة هذه القطعة علمًا بأنها قطعة صغرى فى الدائرة.

الحل



نفرض أن $\overline{\text{أب}}$ هو وتر القطعة ، م هو مركز الدائرة

ونرسم $\overline{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ فتكون حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

أى أ حـ = حـ ب = ٦ سم

ومن Δ أ م حـ يكون : م حـ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم ، جا (د أ م حـ) = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

$\therefore$ ق (د أ م حـ) $\approx$ ٣٦ َ٥٢ ْ٣٦ ∴ ق (د أ م ب) = ٢ × ٣٦ َ٥٢ ْ٣٦ = ٤٤ َ٧٣ ْ٧٣

$\therefore \theta^{ء}$ = ٤٤ َ٧٣ ْ٧٣ × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ $\approx$ ١,٢٨٦٩ ء

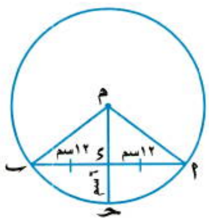
$\therefore$ مساحة القطعة الدائرية أءب = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{ء}$ − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ (١,٢٨٦٩ ء − جا ٤٤ َ٧٣ ْ٧٣) $\approx$ ١٦,٣٥ سم^٢

مثال ٥

أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى طول وترها ٢٤ سم ، وارتفاعها ٦ سم

الحل



نفرض أن : $\overline{\text{أب}}$ هو وتر القطعة فى دائرة م

ونرسم $\overline{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ يقطع $\overline{\text{أب}}$ فى ء ويقطع الدائرة فى حـ

فيكون حـ ء هو ارتفاع القطعة ∴ حـ ء = ٦ سم

، ∵ $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أب}}$ ∴ أ ء = ء ب = ١٢ سم

، ∵ م حـ = م أ = نق ∴ م ء = نق − ٦

∵ Δ أ ء م فيه ق (د أ ء م) = ٩٠ ْ ∴ (أ م)^٢ = (أ ء)^٢ + (م ء)^٢

∴ نق^٢ = ١٤٤ + (نق − ٦)^٢ ∴ نق^٢ = ١٤٤ + نق^٢ − ١٢ نق + ٣٦

∴ ١٢ نق = ١٨٠ ∴ نق = ١٥ سم

، ∵ جا (∠ أ م ء) = $\frac{\text{أ ء}}{\text{م أ}}$ = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ ∴ ق (∠ أ م ء) = ٤٨ً ٧َ ٥٣°

∴ ق (∠ أ م ب) = ٢ × ٤٨ً ٧َ ٥٣° = ٣٦ً ١٥َ ١٠٦°

، ∵ θ ء = ٣٦ً ١٥َ ١٠٦° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٨٥ ء

∴ مساحة القطعة الدائرية الصغرى = $\frac{١}{٢}$ × نق^{٢} (θ ء − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٥^{٢} (١,٨٥ ء − جا ٣٦ً ١٥َ ١٠٦°) = ١٠٠,١٢٥ سم^{٢}

حاول بنفسك

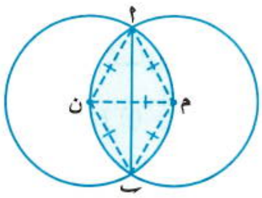
أوجد مساحة قطعة دائرية ارتفاعها ٣ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم

مثال ٦

دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ٦ سم وتمر إحداهما بمركز الأخرى

أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

الحل



بفرض أن الدائرتين متقاطعتان فى أ ، ب

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ يقسم المنطقة المحصورة بين الدائرتين إلى قطعتين متساويتين فى المساحة.

، ∵ △ أ م ن متساوى الأضلاع فيه : م أ = م ن = أ ن = ٦ سم

، △ ب م ن متساوى الأضلاع فيه : م ب = م ن = ن ب = ٦ سم

∴ ق (∠ أ م ن) = ق (∠ ب م ن) = ٦٠° ∴ ق (∠ أ م ب) = ق (∠ أ ن ب) = ١٢٠°

، ∵ θ ء = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٢}{٣}\pi$

∴ مساحة القطعة الصغرى أ ن ب = $\frac{١}{٢}$نق^{٢} (θ ء − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦^{٢} ($\frac{٢}{٣}\pi$ − جا ١٢٠°) ≃ ٢٢,١١ سم^{٢}

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرتين = ٢ × ٢٢,١١ = ٤٤,٢٢ سم^{٢}

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠°
تساوى تقريبًا .... سم^{٢}

(أ) ٩٥ (ب) ٥١ (جـ) ٨٣ (د) ٣٩

(٢) مساحة القطعة الدائرية التى طول قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ١,٢^{ء}
تساوى تقريبًا .... سم^{٢}

(أ) ٨,٥٧ (ب) ٢,١٤ (جـ) ٤,٢٨ (د) ١,٠٧

(٣) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول قوسها ٥ سم
تساوى تقريبًا .... سم^{٢}

(أ) ١,٠٣ (ب) ٢,٠٦ (جـ) ٠,٠١ (د) ٠,٠٥

(٤) مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها ٣٠° ، وطول نصف قطر دائرتها ٢ $\sqrt{٣}$ سم
تساوى .... سم^{٢}

(أ) $\frac{\pi}{٣} + ٢$ (ب) $\pi - ٣$ (جـ) $\pi + ٣$ (د) $\frac{\pi}{٣} - ٢$

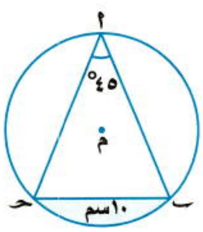
(٥) مساحة القطعة الدائرية المرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وقياس زاويتها المحيطية ٦٠°
تساوى تقريبًا .... سم^{٢}

(أ) ١٨ (ب) ٥٥ (جـ) ٦١ (د) ٢٧

(٦) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٨ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٨ سم لأقرب سم^{٢}
تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٢٩ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

(٧) فى الشكل المقابل :



مساحة الجزء المظلل تساوى تقريبًا .... سم^{٢}

(أ) ٧,١ (ب) ٢٨,٥
(جـ) ١٤,٣ (د) ٢,٠٢

(٨) مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها يساوى طول نصف قطر دائرتها
يساوى ١٢ سم ≃ .... سم^{٢}

(أ) ٤٣٩ (ب) ٣١٥ (جـ) ١٣٧ (د) ١٣

(٩) $\triangle$ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم

فإن مساحة القطعة الصغرى التى وترها $\overline{\text{ب جـ}}$ ≃ .... سم^2

(أ) ٣٥ (ب) ٧٢ (جـ) ٤٥ (د) ٥

(١٠) القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحة سطحها ٥٦ سم^2 يكون طول نصف قطر دائرتها يساوى تقريبًا .... سم

(أ) ٩,٩ (ب) ١٩,٨ (جـ) ٧ (د) ١٤

(١١) دائرة مساحتها ٧٠٦,٥ سم^2 فإن مساحة قطعة من هذه الدائرة قياس زاويتها المركزية ١٣٥° (π = ٣,١٤) تساوى .... سم^2 تقريبًا.

(أ) ٢٦٤,٩ (ب) ١٨٥,٥ (جـ) ١٢,٤ (د) ٣٤٤,٦

(١٢) مساحة القطعة الدائرية التى ارتفاعها ٥ سم وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم تساوى تقريبًا .... سم^2

(أ) ٩,١ (ب) ١٢٢,٨ (جـ) ١٢,٣ (د) ٦١,٤

(١٣) مساحة قطعة دائرية طول وترها ٨ سم ، ويبعد عن مركز الدائرة ٥ سم تساوى تقريبًا .... سم^2

(أ) ٤٨ (ب) ١٢١ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٤) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٦ سم ، وارتفاعها ٤ سم ≃ .... سم^2

(أ) ١٤١ (ب) ٤٥ (جـ) ٧٩ (د) ١٠٧

(١٥) مساحة القطعة الدائرية تساوى مساحة القطاع الدائرى المشترك معها فى القوس إذا كان قياس زاويته المركزية يساوى ....°

(أ) ٩٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٧٠ (د) ٤٥

(١٦) أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٨ سم ، ق($\angle$ ب) = ٦٠°

فإن مساحة المثلث = ... سم^2

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٣}$

(١٧) قطعة دائرية طول قوسها $\frac{٤\pi}{٣}$ سم وطول نصف قطر دائرتها ٨ سم فإن مساحة سطحها = ... سم^2

(أ) $\frac{١٦\pi}{٣}$ (ب) ٤٨ (π − ٣) (جـ) ١٦ ($\frac{\pi}{٣}$ − ١) (د) ٨ (π − ١)

(١٨) فى دائرة واحدة إذا كانت القطعة الدائرية تشترك مع القطاع الدائرى فى نفس القوس فيكون لها نفس المساحة إذا كان ....

(أ) ل = ٢ نق (ب) $\theta = \pi$ (جـ) $\theta = \frac{٣\pi}{٢}$ (د) ل = نق

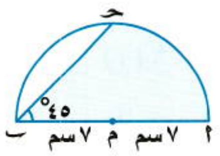
(١٩) قطعة دائرية من دائرة طول نصف قطرها نق سم وطول وترها $\sqrt{٢}$ نق سم

فإن مساحتها .... سم^٢

(أ) نق^٢ $\left(\frac{\pi}{٢} - ١\right)$ (ب) $\frac{١}{٤}$ نق^٢ $(\pi - ٢)$

(جـ) ٢ نق^٢ $(\pi - ١)$ (د) $\frac{١}{٤}$ نق^٢ $\left(\frac{\pi}{٢} - ١\right)$

(٢٠) في الشكل المقابل :

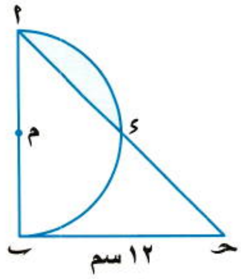


ق(∠ أ ب جـ) = ٤٥° ، $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م بحيث أ ب = ١٤ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢ حيث $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ٧٧ (ب) ٦٣ (جـ) ١٤ (د) ٩١

(٢١) في الشكل المقابل :



نصف دائرة م ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ مماس للدائرة م عند ب

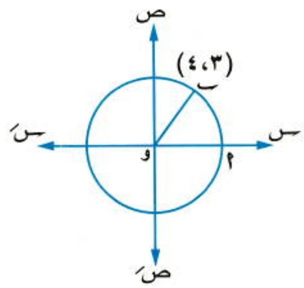
، أ ب = ب جـ = ١٢ سم

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^٢

(أ) ٢٠,٥٥ (ب) ٣,٤٢

(جـ) ١٠,٢٧ (د) ١,٤

(٢٢) في الشكل المقابل :



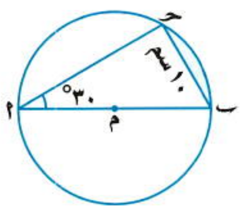
مساحة القطعة الدائرية الصغرى

التي وترها $\overline{أب}$ ≃ .... وحدة مربعة.

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٦

(جـ) ١,٣ (د) ١,٦

(٢٣) في الشكل المقابل :



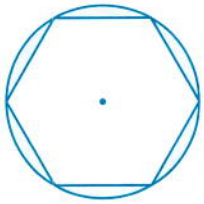
إذا كان $\overline{أب}$ قطر في دائرة م

فإن : مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^٢

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

(٢٤) في الشكل المقابل :



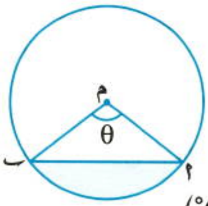
دائرة طول نصف قطرها ٦ سم تمر برؤوس سداسى منتظم

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^٢

(أ) ١٦,٢٤ (ب) ١٩,٥٧

(جـ) ٢٠,٤١ (د) ٢٢,١٥

(٢٥) فى الشكل المقابل :



دائرة طول نصف قطرها نق

فإن محيط القطعة الدائرية المظللة = ...

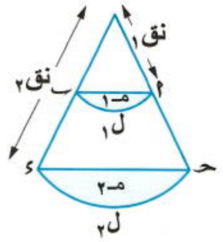
(أ) نق (θ^{ء} + جا θ°)

(ب) ٢ نق ($\frac{1}{2}$ θ^{ء} + جا $\frac{1}{2}$ θ°)

(جـ) ٢ نق (θ^{ء} + جا $\frac{1}{2}$ θ°)

(د) نق ($\frac{1}{2}$ θ^{ء} + جا θ°)

(٢٦) فى الشكل المقابل :



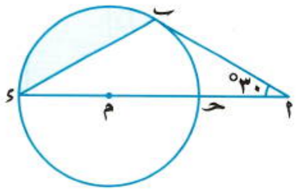
إذا كان : م$_1$ مساحة القطعة الدائرية التى وترها $\overline{\text{أب}}$

، م$_2$ مساحة القطعة الدائرية التى وترها $\overline{\text{جـ ء}}$

فإن : $\frac{م_1}{م_2}$ تساوى كل مما يأتى ما عدا ....

(أ) $\frac{ل_1\ نق_2}{ل_2\ نق_1}$ (ب) $\left(\frac{ل_1}{ل_2}\right)^2$ (جـ) $\left(\frac{نق_1}{نق_2}\right)^2$ (د) $\left(\frac{أب}{جـ ء}\right)^2$

(٢٧) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م ، أجـ = ٣ سم ، ق(∠أ) = ٣٠°

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^2

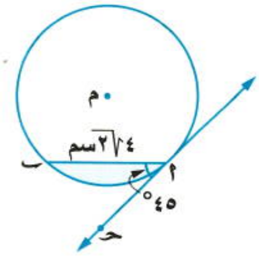
(أ) ١٨,٥٦

(ب) ١٠,٤٩

(جـ) ٨,٩

(د) ٥,٥٣

(٢٨) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة عند أ ، ق(∠ب أ جـ) = ٤٥°

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^2

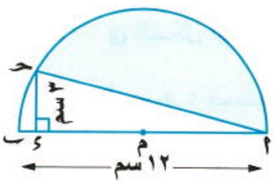
(أ) ٤ π − ٦

(ب) ٤ π − ٨

(جـ) ٢ π − ٤

(د) ٢ π − ٦

(٢٩) فى الشكل المقابل :



نصف دائرة م طول قطرها ١٢ سم

، $\overline{\text{جـ ء}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، جـ ء = ٣ سم

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^2

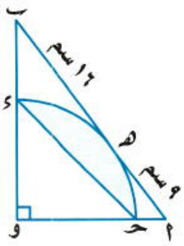
(أ) ١٥ π − ٩

(ب) ١٥ π − ١٨

(جـ) ١٢ π − ٩

(د) ١٢ π − ١٨

(٣٠) في الشكل المقابل :

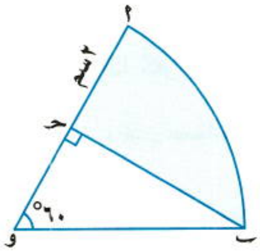


$\overset{\frown}{جـ هـ ء}$ ربع دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ يمسها في هـ

فإن مساحة القطعة الدائرية المظللة = ... سم٢

(أ) ٣٦ π
(ب) ٧٢ π
(جـ) ٣٦ (π − ٢)
(د) ٧٢ (π − ٢)

(٣١) في الشكل المقابل :

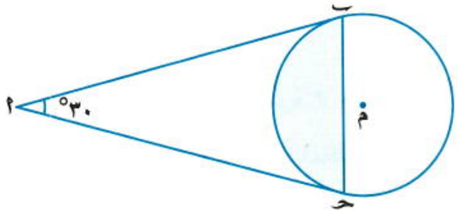


دائرة مركزها (و) ، ق(∠ و) = ٦٠° ، أ جـ = ٢ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ٤ π − ٢ $\sqrt{٣}$
(ب) $\frac{٨ π}{٣}$ − $\sqrt{٣}$
(جـ) $\frac{٨ π}{٣}$ − ٢ $\sqrt{٣}$
(د) ٢ π − $\sqrt{٣}$

(٣٢) في الشكل المقابل :



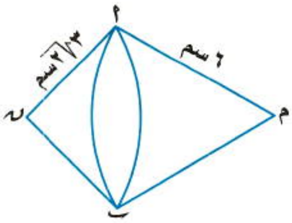
إذا كان : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

، قياس الزاوية بينهما ٣٠° ، أ ب = ٥ سم

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ سم٢

(أ) ١,٩
(ب) ٢,٧
(جـ) ٣,٢
(د) ٦,٦

(٣٣) في الشكل المقابل :



قطاعان دائريان من الدائرتين م ، ن اللتان طولا نصفا قطريهما ٦ سم

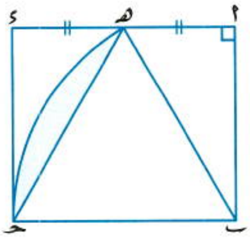
، ٣ $\sqrt{٢}$ سم على الترتيب ، فإذا كانت مساحة القطاع م أ ب = ٦ π سم٢

، مساحة القطاع ن أ ب = ٤,٥ π سم٢

فإن مساحة الشكل الرباعي أ م ب ن = ... سم٢

(أ) ١٠,٥ π
(ب) ٩ $\sqrt{٣}$
(جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ π
(د) ٩ + ٩ $\sqrt{٣}$

(٣٤) في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء مستطيل فيه هـ منتصف $\overline{أ ء}$ ، أ هـ = هـ ء = ٦ سم

رسمت دائرة مركزها (ب) تمر بالنقطتين هـ ، جـ

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ٩ π − ٣٦ $\sqrt{٣}$
(ب) ١٨ π − ٣٦ $\sqrt{٣}$
(جـ) ٢٤ π − ٣٦ $\sqrt{٣}$
(د) ٣٦ π − ٣٦ $\sqrt{٣}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى :

(١) طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم ، وقياس زاويتها يساوى ١,٤ ء «٣٠ سم^{٢} تقريبًا»

(٢) طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها يساوى ١٣٥° «٥٣ سم^{٢} تقريبًا»

---

٢ أوجد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٢٤َ ١١٥° ، وطول نصف قطر دائرتها ٢٠ سم

«٢٢٢ سم^{٢} تقريبًا»

---

٣ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٤ سم ، وطول قوسها ٢٢ سم. «٥٦ سم^{٢} تقريبًا»

---

٤ دائرة مساحتها $\frac{٧}{٨}$ ٤٩٠ سم^{٢} أوجد مساحة قطعة من هذه الدائرة طول قوسها ٢٦,١٨ سم «٩٦ سم^{٢}»

---

٥ $\overline{أب}$ وتر فى دائرة طوله ١٠ سم يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° أوجد مساحة القطعة الكبرى التى وترها $\overline{أب}$ «٣٠٥ سم^{٢}»

---

٦ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى :

(١) طول وترها ٦ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ٥ سم «٤ سم^{٢} تقريبًا»

(٢) ارتفاعها ٥ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم «٦١ سم^{٢} تقريبًا»

---

٧ أوجد مساحة قطعة دائرية طول وترها = طول نصف قطر دائرتها = ٦ سم «٣,٢٦ سم^{٢}تقريبًا»

---

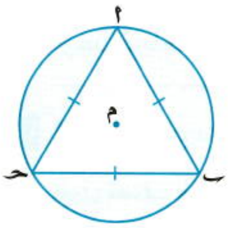
٨ أوجد مساحة قطعة دائرية كبرى طول وترها ١٤ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠,٥ سم «٣٢١ سم^{٢}»

---

٩ وتر فى دائرة طوله ٨ سم على بعد ٣ سم من مركزها ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة. «١١ سم^{٢} تقريبًا»

---

١٠ فى الشكل المرسوم :



أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م التى طول نصف قطرها ٨ سم ، أوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظللة. «٣٩ سم^{٢} تقريبًا»

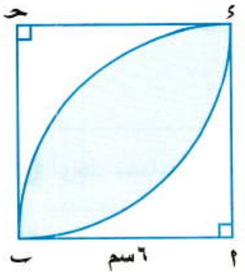
---

١١ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ، رسمت دائرة برؤوسه أوجد طول نصف قطر الدائرة ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الى وترها $\overline{ب حـ}$ «١١٨ سم^{٢}»

١٢ $أ ب حـ$ مثلث مرسوم داخل دائرة فإذا كان $أ ب = أ حـ = ١٥$ سم ، $ب حـ = ١٨$ سم فأوجد مساحة كل من القطع الصغرى الثلاث التى أوتارها أضلاع المثلث $أ ب حـ$ «٣٩٫٣ سم^٢ ، ٣٩٫٣ سم^٢ ، ٨٩٫٥ سم^٢ تقريبًا»

١٣ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ وتران متساويا الطول فى دائرة م طول كل منهما ٦ $\sqrt{٣}$ سم ، ق ($\angle ب أ حـ$) = ٦٠°
أوجد مساحة الجزء من سطح الدائرة المحصور بين الوترين والقوس الأصغر $\overset{\frown}{ب حـ}$ «٦٩ سم^٢»

١٤ فى الشكل المقابل :



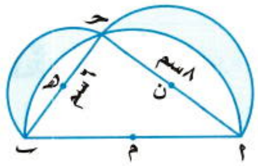
$أ ب حـ ء$ مربع طول ضلعه ٦ سم
رسم قوسان دائريان مركزاهما أ ، حـ
، وطول نصف قطر كل منهما = ٦ سم
أوجد مساحة الجزء المظلل.

«٢١ سم^٢ تقريبًا»

١٥ دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ١٢ سم ، وتمر كل منهما بمركز الأخرى.
أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما. «١٧٧ سم^٢ تقريبًا»

١٦ $أ ب حـ$ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : $أ ب = ٦$ سم ، $ب حـ = ٨$ سم مرسوم داخل دائرة
أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة كل من القطع الثلاث الصغرى التى أوتارها أضلاع المثلث.
«٤ سم^٢ ، ١١ سم^٢ ، ٣٩ سم^٢ تقريبًا»

١٧ فى الشكل المقابل :



م ، ن ، هـ مراكز أنصاف دوائر
، $أ حـ = ٨$ سم ، $حـ ب = ٦$ سم
أوجد مساحة الجزء المظلل.

«٢٤ سم^٢»

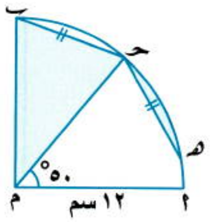
١٨ أ نقطة خارج دائرة مركزها م ، رسم من أ القطعتان المماستان $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ يمسانها فى ب ، حـ فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ، أ م = ١٠ سم
فأوجد مساحة القطعة الصغرى التى قوسها $\overset{\frown}{ب حـ}$ «١٥٫٣٥٥ سم^٢»

١٩ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٦ سم ، ٨ سم ، والبعد بين مركزيهما ١٠ سم
أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين لأقرب جزء من عشرة. «٢٦٫٦ سم^٢»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



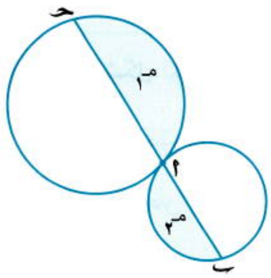
ربع دائرة م ، ق (∠ أ م حـ) = °٥٠

، حـ هـ = حـ ب

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٣ π + ١٨ (ب) ١٦ π (جـ) ٩ + ٨ π (د) ١٢ π

(٢) فى الشكل المقابل :



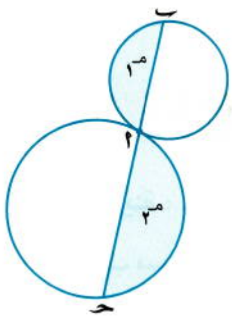
دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، إذا كان : أ ب = ٤ سم

، أ حـ = ٦ سم وكانت م١ ، م٢ مساحتى الجزأين المظللين

فإن : $\frac{م_٢}{م_١}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{٤}{٢٥}$

(٣) فى الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الخارج فى أ

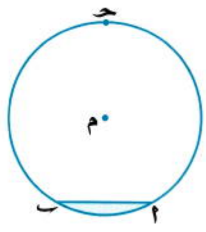
إذا كانت م١ ، م٢ مساحتى الجزأين المظللين

وكان : ٤ م٢ = ٩ م١ ، ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول $\overline{أ ب}$ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٤) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، ق ($\overset{\frown}{أ حـ ب}$) = °٣٠٠

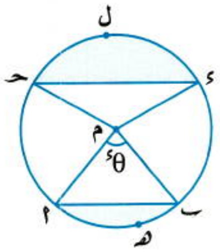
، محيط الشكل المظلل = (٣ π + ٩) سم

فإن مساحة الشكل المظلل = ... سم^{٢}

(أ) $\frac{٢٧}{٢}$ (٣ π − ٣ $\sqrt{٣}$) (ب) $\frac{٢٧}{٢}$ (٢ π − ٣ $\sqrt{٣}$)

(جـ) $\frac{٢٧}{٤}$ (٣ π − ٣ $\sqrt{٣}$) (د) $\frac{٢٧}{٤}$ (٢ π − ٣ $\sqrt{٣}$)

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ أ م ب) + ق (∠ ء م حـ) = ١٨٠°

فإن مساحة القطعة الصغرى (ء ل حـ)

– مساحة القطعة الصغرى (أ هـ ب) = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ نق^2 (٢ π – θ)　　(ب) $\frac{1}{2}$ نق^2 (π – ٢ θ)

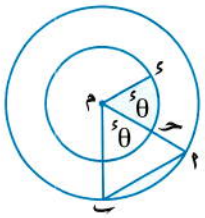
(جـ) نق^2 (٢ π – θ)　　(د) نق^2 (π – ٢ θ)

---

٢ إذا كان وتر التقاطع لدائرتين متقاطعتين هو قطر إحداهما وطوله يساوى طول نصف قطر الدائرة الأخرى ويساوى ١٠ سم فأوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين. «٤٨,٣٣ سم^2»

---

٣ فى الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز فى م فإذا كان نق هو طول

نصف قطر الدائرة الصغرى وكان م ء = نق ، م أ = ٢ نق

حيث أ تقع على الدائرة الكبرى

، ق (∠ أ م ب) = ق (∠ حـ م ء) = θ

أوجد النسبة بين θ ، θ إذا علم أن مساحتى الجزأين المظللين متساويتان. «٤ : ٣»

تطبيقات حياتية

١ **زينة :** حوض زهور على شكل دائرة طول نصف قطرها ٨ أمتار ، رسم فى الدائرة وتر طوله ٨ أمتار. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى لأقرب رقم عشرى واحد. «٥,٨ م^2»

---

٢ **زراعة :** حوض للزرع على شكل دائرة طول نصف قطرها ٤ أمتار ، قُسم إلى أربعة أجزاء بواسطة مثلث متساوى الأضلاع تقع رؤوسه على الدائرة.

احسب مساحة إحدى القطع الدائرية الصغرى لأقرب رقمين عشريين. «٩,٨٣ م^2»

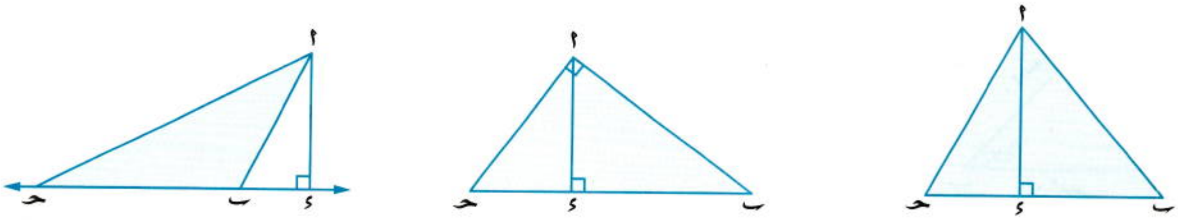
الدرس 7 المساحات

أولًا مساحة المثلث

سبق أن درست مساحة المثلث وعلمت أن :

أولًا مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها

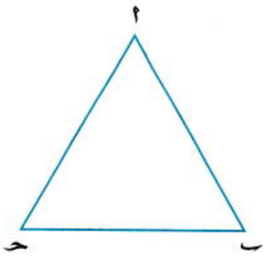
أى أنه فى أى مثلث أ ب ح إذا كان $\overline{\text{أ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ فإن :



مساحة Δ أ ب ح = $\frac{1}{2}$ ب ح × أ ء

ثانيًا مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

أى أنه فى أى مثلث أ ب ح



مساحة المثلث أ ب ح = $\frac{1}{2}$ أ ب × أ ح × جا أ

= $\frac{1}{2}$ أ ب × ب ح × جا ب

= $\frac{1}{2}$ أ ح × ب ح × جا ح

مثـال ١

احسب مساحة المثلث أ ب جـ فى كل من الحالات الآتية :

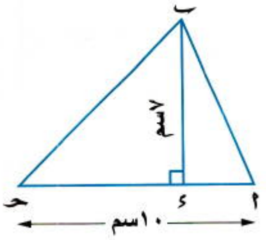
١ أ جـ = ١٠ سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{\text{أ جـ}}$ يساوى ٧ سم

٢ أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٥ سم ، ق(∠ب) = ٩٠°

٣ أ ب = ١١ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، ق(∠ب) = ٤٧° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٤ أ ب = ٢٥ سم ، ب جـ = ١٧ سم ، أ جـ = ٢٦ سم

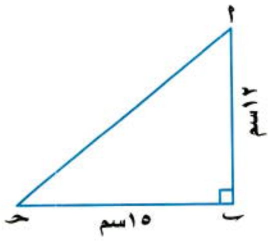
الحـل



١ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ × ب ء

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧

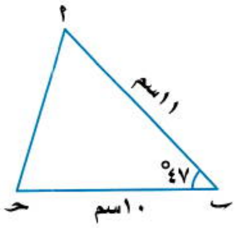
= ٣٥ سم^{٢}



٢ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٥ × ١٢

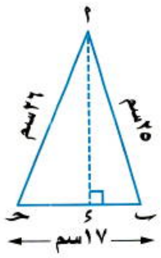
= ٩٠ سم^{٢}



٣ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب جـ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١١ × ١٠ × جا ٤٧°

≈ ٤٠,٢٢ سم^{٢}



٤ نرسم $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، نفرض أن ب ء = س سم

فيكون : ء جـ = (١٧ − س) سم

∵ Δ أ ب ء فيه : ق(∠أ ء ب) = ٩٠° ∴ (أ ء)^{٢} = (أ ب)^{٢} − (ب ء)^{٢}

∴ (أ ء)^{٢} = ٦٢٥ − س^{٢} (١)

∵ Δ أ ء جـ فيه : ق(∠أ ء جـ) = ٩٠° ∴ (أ ء)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ء جـ)^{٢}

∴ (أ ء)^{٢} = ٦٧٦ − (١٧ − س)^{٢} (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ٦٢٥ − س^{٢} = ٦٧٦ − (٢٨٩ − ٣٤ س + س^{٢})

∴ ٦٢٥ − $\cancel{\text{س}^{٢}}$ = ٦٧٦ − ٢٨٩ + ٣٤ س − $\cancel{\text{س}^{٢}}$ ∴ ٣٤ س = ٢٣٨ ∴ س = ٧ سم

بالتعويض فى (١) : ∴ (أ ء)^{٢} = ٦٢٥ − ٤٩ = ٥٧٦ ∴ أ ء = ٢٤ سم

∴ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ ء = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٢٤ = ٢٠٤ سم^{٢}

قاعدة هيرو لحساب مساحة المثلث

إذا رمزنا لمحيط المثلث ٩ ب حـ (مجموع أطوال أضلاع المثلث) بالرمز ٢ ع

فإن : مساحة المثلث ٩ ب حـ = $\sqrt{\text{ع (ع - ٩ب) (ع - ب حـ) (ع - ٩حـ)}}$

تأكد من الحل فى المثال السابق باستخدام قاعدة هيرو.

حاول بنفسك

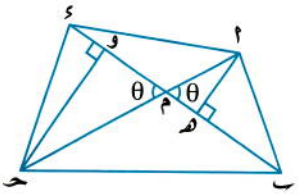
احسب مساحة المثلث ٩ ب حـ فى كل من الحالتين الآتيتين مقربًا الناتج لرقمين عشريين :

١ المثلث ٩ ب حـ متساوى الأضلاع وطول ضلعه ٦ سم.

٢ ٩ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، ق (∠ب) = ٦٢°

ثانيًا مساحة الشكل الرباعى المحدب

فى الشكل المقابل :



٩ ب حـ ء شكل رباعى قطراه $\overline{\text{٩حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ متقاطعان فى م ويحصران

بينهما زاوية قياسها θ

فإذا كان : $\overline{\text{٩هـ}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{حـ و}} \perp \overline{\text{ب ء}}$

فإن : مساحة المضلع ٩ ب حـ ء = مساحة Δ ٩ ب ء + مساحة Δ ب حـ ء

$= \frac{1}{2}$ ب ء × ٩هـ + $\frac{1}{2}$ ب ء × حـ و = $\frac{1}{2}$ ب ء (٩هـ + حـ و)

∵ Δ ٩ هـ م فيه : ق (∠٩ هـ م) = ٩٠° ∴ جا θ = $\frac{\text{٩هـ}}{\text{٩م}}$ ∴ ٩هـ = ٩م جا θ

، Δ حـ و م فيه : ق (∠حـ و م) = ٩٠° ∴ جا θ = $\frac{\text{حـ و}}{\text{حـ م}}$ ∴ حـ و = حـ م جا θ

∴ مساحة المضلع ٩ ب حـ ء = $\frac{1}{2}$ ب ء (٩م جا θ + حـ م جا θ) = $\frac{1}{2}$ ب ء جا θ (٩م + حـ م)

$= \frac{1}{2}$ ب ء جا θ × ٩حـ = $\frac{1}{2}$ ب ء × ٩حـ × جا θ

أى أن مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

ملاحظة

إذا استخدمنا الزاوية ∠٩ م ء التى قياسها (١٨٠° - θ) أى الزاوية المكملة للزاوية ∠٩ م ب التى قياسها θ فإن مساحة الشكل الرباعى ٩ ب حـ ء لا تتغير لأن : جا (١٨٠° - θ) = جا θ

مثال ٢

احسب مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٢°

الحل

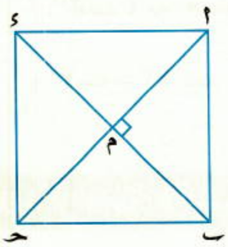
مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٢ × جا ٦٢° ≈ ٥٢,٩٨ سم^{٢}

ملاحظة

يمكن استخدام القانون السابق فى حساب مساحات بعض الأشكال الرباعية الخاصة مثل :

١ المربع :



فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء مربع

∴ أ حـ = ب ء ، $\overline{أحـ} \perp \overline{بء}$

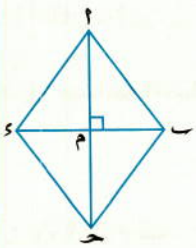
∴ مساحة المربع أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × ب ء × جا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × أ حـ × ١ = $\frac{١}{٢}$ (أ حـ)^{٢}

∴ $\boxed{\text{مساحة المربع} = \frac{١}{٢} \text{ مربع طول قطره}}$

فمثلًا المربع الذى طول قطره ٦ سم تكون مساحته = $\frac{١}{٢}$ × (٦)^{٢} = ١٨ سم^{٢}

٢ المعين :



فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء معين ∴ $\overline{أحـ} \perp \overline{بء}$

∴ مساحة المعين أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × ب ء × جا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × ب ء

∴ $\boxed{\text{مساحة المعين} = \frac{١}{٢} \text{ حاصل ضرب طولى قطريه}}$

فمثلًا المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم تكون مساحته = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^{٢}

حاول بنفسك

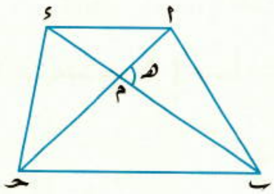
أوجد ما يأتى :

١ مساحة المربع الذى طول قطره ٨ سم

٢ مساحة المعين الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٦ سم

٣ مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

ملاحظة



في الشكل الرباعي : أ ب حـ ء إذا تقاطع قطراه في م

فإن : م (Δ أ ب م) × م (Δ ء حـ م) = م (Δ أ ء م) × م (Δ ب حـ م)

الإثبات

م (Δ أ ب م) × م (Δ ء حـ م) = $\left[\frac{1}{2}\right.$ (م أ) (م ب) جا هـ$\left.\right]$ × $\left[\frac{1}{2}\right.$ (م ء) (م حـ) جا هـ$\left.\right]$

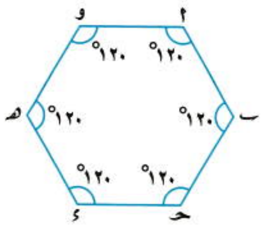
= $\left[\frac{1}{2}\right.$ (م أ) (م ء) جا (180° − هـ)$\left.\right]$

× $\left[\frac{1}{2}\right.$ (م ب) (م حـ) جا (180° − هـ)$\left.\right]$

= م (Δ أ ء م) × م (Δ ب حـ م)

ثالثًا مساحة المضلع المنتظم

- **المضلع المنتظم :** هو مضلع جميع زواياه الداخلة متساوية في القياس وجميع أضلاعه متساوية في الطول.

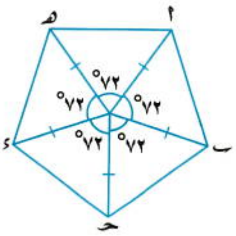


- قياس زاوية رأس المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ن ضلعًا = $\frac{(ن - 2) \times 180^\circ}{ن}$

فمثلًا قياس زاوية رأس المضلع السداسي المنتظم = $\frac{(6 - 2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$

- يمكن تقسيم المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ن ضلعًا إلى عدد ن

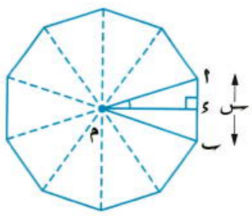
من المثلثات المتساوية الساقين والمتطابقة والتي قياس زاوية رأس كل منها = $\frac{2\pi}{ن}$



فمثلًا المضلع الخماسي المنتظم ينقسم إلى ٥ مثلثات متطابقة

كل منها متساوي الساقين وقياس زاوية رأسه = $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$

- **مساحة المضلع المنتظم :**



في الشكل المقابل :

مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ضلعًا

وطول ضلعه = س وحدة طول.

فإن : مساحة المضلع = مساحة Δ أ م ب × ن

$\because$ Δ أ م ب متساوي الساقين فيه : م أ = م ب ، ق (∠ أ م ب) = $\frac{2\pi}{ن}$

، $\because$ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ $\therefore$ ق (∠ أ م ء) = $\frac{\pi}{ن}$

، ∵ ظا (د ا م ء) $= \frac{\text{م ء}}{\text{ا ء}}$ ∴ ظا $\frac{\pi}{\text{ن}} = \frac{\text{م ء}}{\frac{1}{2}\text{ س}}$ ∴ م ء $= \frac{1}{2}$ س ظا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

، ∵ مساحة Δ ا م ب $= \frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع $= \frac{1}{2} \times$ ا ب × م ء

$= \frac{1}{2} \times$ س × $\frac{1}{2}$ س ظا $\frac{\pi}{\text{ن}} = \frac{1}{4}$ س^2 ظا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

∴ مساحة المضلع $= \left(\frac{1}{4}\text{ س}^2 \text{ ظا } \frac{\pi}{\text{ن}}\right) \times$ ن $= \frac{1}{4}$ ن س^2 ظا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

أى أن مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن ضلعًا وطول ضلعه س $= \frac{1}{4}$ ن س^2 ظا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

مثال ٣

أوجد مساحة كل من :

١ شكل ثمانى منتظم طول ضلعه ٧ سم (لأقرب رقمين عشريين)

٢ مضلع منتظم عدد أضلاعه = ١٢ ضلعًا وطول ضلعه = ١٠ سم (لأقرب سنتيمتر مربع)

٣ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ٩ سم (لأقرب ثلاثة أرقام عشرية)

الحل

١ مساحة المضلع الثمانى المنتظم $= \frac{1}{4}$ ن س^2 ظا $\frac{\pi}{\text{ن}} = \frac{1}{4} \times ٨ \times ٧^2 \times$ ظا $\frac{\pi}{٨}$

$\approx ٢٣٦,٥٩$ سم^2

٢ مساحة المضلع الذى عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا $= \frac{1}{4}$ ن س^2 ظا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

$= \frac{1}{4} \times ١٢ \times ١٠^2 \times$ ظا $\frac{\pi}{١٢} \approx ١١٢٠$ سم^2

٣ مساحة المثلث المتساوى الأضلاع $= \frac{1}{4}$ ن س^2 ظا $\frac{\pi}{\text{ن}} = \frac{1}{4} \times ٣ \times ٩^2 \times$ ظا $\frac{\pi}{٣}$

$\approx ٣٥,٠٧٤$ سم^2

حل آخر:

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

$= \frac{1}{2} \times ٩ \times ٩ \times$ جا $٦٠° \approx ٣٥,٠٧٤$ سم^2

ملاحظتان

- المثلث المتساوى الأضلاع هو مضلع ثلاثى منتظم ولذلك يمكن استخدام قانون حساب مساحة المضلع المنتظم فى إيجاد مساحته كما فى المثال السابق ويكون :

مساحة المثلث المتساوى الأضلاع $= \frac{1}{٤} \times ٣ \times س^٢ \times ظتا \frac{\pi}{٣}$

$= \frac{٣}{٤} س^٢ \times ظتا ٦٠°$

$= \frac{٣}{٤} س^٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^٢$

أى أن $\boxed{\text{مساحة المثلث المتساوى الأضلاع} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^٢ \text{ حيث } س \text{ طول ضلع المثلث}}$

- وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مساحة السداسى المنتظم :

مساحة السداسى المنتظم $= \frac{1}{٤} \times ٦ \times س^٢ \times ظتا \frac{\pi}{٦}$

$= \frac{٣}{٢} س^٢ \times ظتا ٣٠° = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} س^٢$

أى أن $\boxed{\text{مساحة السداسى المنتظم} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} س^٢ \text{ حيث } س \text{ طول ضلعه}}$

حاول بنفسك

استخدم قانون حساب مساحة المضلع المنتظم فى إيجاد مساحة كل من :

١ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٥ سم (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

٢ مربع طول ضلعه ٦ سم

٣ مضلع خماسى منتظم طول ضلعه ١٢ سم (مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية)

تمارين 14

على المساحات

اختبر نفسك

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا ● من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق(∠ ب) = ٥٠°
تساوى .... سم^{2}

(أ) ٢١,٤ (ب) ٤٢,٩ (جـ) ١٨ (د) ٣٣,٤

(٢) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٠ سم وقياس زاوية رأسه ٦٠°
تساوى .... سم^{2}

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ٢٥ $\sqrt{3}$ (د) ٥٠

(٣) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول قاعدته ٦ سم ، طول أحد ساقيه ٥ سم تساوى .... سم^{2}

(أ) ١٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٤) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم تساوى .... سم^{2}

(أ) ١٨ (ب) ١٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٩ (د) ٩ $\sqrt{3}$

(٥) مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم وقياس الزاوية بينهما ٣٠° تساوى .... سم^{2}

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ $\sqrt{3}$ (د) ٢٤ $\sqrt{3}$

(٦) الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم ومساحته تساوى ٣٠ سم^{2} يكون قياس الزاوية الحادة بين قطريه ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٤٥°

(٧) إذا كان س هو طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٩ $\sqrt{3}$ سم^{2}
فإن : س = ... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٦ (جـ) ٦ $\sqrt{3}$ (د) ٣ $\sqrt{2}$

(٨) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٤ سم تساوى .... سم^{2}

(أ) ١٢ $\sqrt{3}$ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ $\sqrt{3}$ (د) ٢٤

(٩) مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٠ سم ≃ .... سم^{2}

(أ) ١٧٢,٠٥ (ب) ٩٠,٨٢ (جـ) ٦٨٨,١٩ (د) ١٣٧,٦٤

(١٠) المعين الذى قياس إحدى زواياه ٥٠° وطول ضلعه ٦ سم تكون مساحته .... سم^{2}

(أ) ١٣,٧٩ (ب) ١١٠,٣١ (جـ) ٢٧,٦ (د) ١١,٥٧

(١١) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه س سم تساوى .... سم^٢

(أ) س^٢ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س^٢ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^٢ (د) $\frac{١}{٢}$ س^٢

(١٢) مساحة المربع الذى طول قطره س سم تساوى .... سم^٢

(أ) س^٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ س^٢ (جـ) $\sqrt{٢}$ س^٢ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ س^٢

(١٣) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه س سم تساوى .... سم^٢

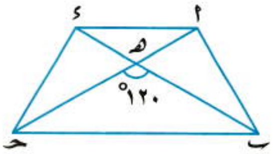
(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ س^٢ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ س^٢ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س^٢ (د) $\frac{٣}{٢}$ س^٢

(١٤) مساحة الشكل الثمانى المنتظم الذى طول ضلعه س سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٢ س^٢ ظتا ٤٥° (ب) ٢ س^٢ ظا ٤٥°

(جـ) ٨ س^٢ ظتا ٢٢,٥° (د) ٢ س^٢ ظتا ٢٢,٥°

(١٥) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ب ء = ٦ سم

، مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^٢

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(١٦) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ سم تساوى .... سم^٢

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\frac{١}{٢}\sqrt{٦}$ (جـ) $\sqrt{٣٠}$ (د) $\frac{١}{٢}\sqrt{٣٠}$

(١٧) مثلث حاد الزوايا مساحته ١٤,٤ سم^٢ ، طولا ضلعين فيه ٦ سم ، ٨ سم فإن جيب تمام الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين يساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٨) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه ٤ سم ، ٦ سم ، ٨ سم ≃ .... سم^٢

(أ) ١٧٣,٩ (ب) ١١,٦ (جـ) ١٣,٩ (د) ٤١,٦

(١٩) أ ب حـ مثلث حاد الزوايا مساحته ٤٠,١٣ سم^٢ فإذا كان : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم

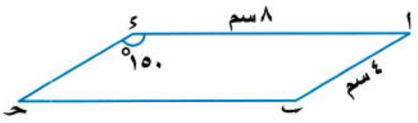
فإن : ق (∠ب) = ...° (لأقرب درجة)

(أ) ٣٢ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٨ (د) ٨٨

(٢٠) طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٣٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢ يساوى .... سم

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٢١) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازي أضلاع

مساحته = ... سم^{٢}

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

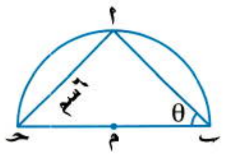
(٢٢) مساحة الشكل الرباعي الذي طولا قطريه ١٢ سم ، ١٣ سم ، ويحصران زاوية جيب تمامها $\frac{٥}{١٣}$ تساوي .... سم^{٢}

(أ) ٣٠ (ب) ٧٢ (جـ) ٦٠ (د) ١٤٤

(٢٣) إذا كانت مساحة شكل سداسي منتظم $٥٤\sqrt{٣}$ سم^{٢} ، فإن طول ضلعه يساوي .... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $١٢\sqrt{٣}$

(٢٤) في الشكل المقابل :



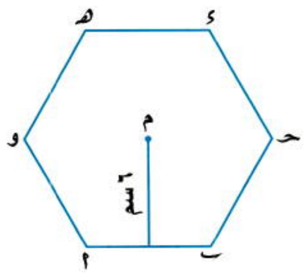
$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر في دائرة م ، أ حـ = ٦ سم ، ق(∠ أ ب حـ) = θ

فإن : مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^{٢}

(أ) ٦ جا θ (ب) ٦ ظا θ (جـ) ١٨ ظا θ (د) ١٨ ظتا θ

(٢٥) إذا كان طول العمود المرسوم من مركز سداسي منتظم على أحد أضلاعه يساوي ٦ سم

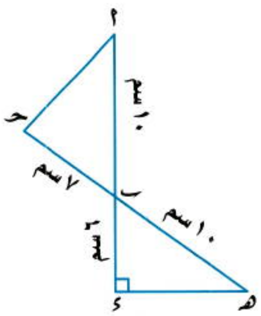
فإن مساحة المسدس تساوي ....



(أ) $٢٧\sqrt{٣}$ سم^{٢} (ب) $٣٦\sqrt{٣}$ سم^{٢}

(جـ) $٥٤\sqrt{٣}$ سم^{٢} (د) $٧٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}

(٢٦) في الشكل المقابل :

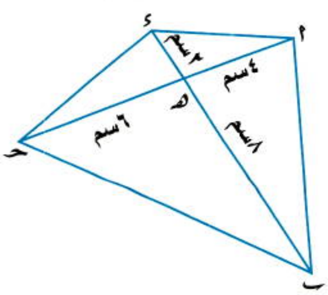


مساحة Δ أ ب حـ تساوي .... سم^{٢}

(أ) ٢٤ (ب) ٢٨

(جـ) ٣٢ (د) ٣٥

(٢٧) في الشكل المقابل :



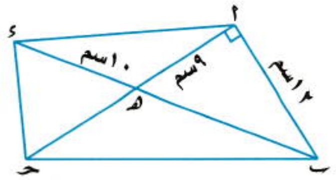
إذا كانت مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٥٠ سم^{٢}

فإن : ق(∠ أ هـ ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٧٥° (د) ٩٠°

(٢٨) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة الشكل أ ب جـ ء = ١٩٠ سم^{٢}

فإن : طول $\overline{\text{هـ جـ}}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٢٩) في Δ أ ب جـ : إذا رمزنا لنصف محيط المثلث بالرمز ع وكان ع − أ ب = ٦ سم ،

ع − ب جـ = ٨ سم ، ع − أ جـ = ١٠ سم فإن مساحة Δ أ ب جـ = ... سم^{٢}

(أ) ٨ $\sqrt{٣٠}$ (ب) ٢٤ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٣٠}$ (د) ٤٨ $\sqrt{٥}$

(٣٠) مضلع منتظم طول ضلعه ٦ سم وقياس الزاوية الخارجة عن أحد رؤوسه تساوى ٣٦°

فإن مساحته ≃ .... سم^{٢}

(أ) ٢٧٧ (ب) ٢٢٤ (جـ) ٢١٨ (د) ١٩٦

(٣١) أ ب جـ مثلث فيه : ب جـ = ٨ سم وكان طول المتوسط $\overline{\text{أ ء}}$ = ٤ سم فإن أكبر مساحة للمثلث أ ب جـ

تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٦ $\sqrt{٣}$

(٣٢) مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ٦ سم فإن مساحته .... سم^{٢}

(أ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ $\sqrt{٢}$ (د) ١٨

(٣٣) إذا كان ل هو ارتفاع المثلث المتساوى الأضلاع فإن مساحته = ... سم^{٢}

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل^{٢} (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ل^{٢} (جـ) $\sqrt{٣}$ ل^{٢} (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢}

(٣٤) مثلث محيطه ١٥٠ سم والنسبة بين أطوال أضلاعه ٥ : ١٢ : ١٣ فإن مساحته = ... سم^{٢}

(أ) ٢٥٠ (ب) ٣٧٥ (جـ) ٥٠٠ (د) ٧٥٠

(٣٥) أى المثلثات الآتية يمكن إيجاد مساحته ؟

(أ) مثلث متساوى الساقين محيطه = ٣٠ سم (ب) مثلث قائم الزاوية محيطه = ٣٠ سم

(جـ) مثلث متساوى الأضلاع محيطه = ٣٠ سم (د) مثلث قائم الزاوية طول وتره = ٣٠ سم

(٣٦) إذا كان قطرا الشكل الرباعى متعامدان فإن مساحته = ...

(أ) حاصل ضرب طولا قطريه. (ب) $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه.

(جـ) حاصل ضرب أطوال أضلاعه. (د) $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب أطوال أضلاعه.

(٣٧) إذا كانت مساحة مثلث طولا ضلعين فيه هما أ سم ، ب سم وقياس الزاوية بينهما ٦٠° هى س سم^{٢}
فإن مساحة سطح المضلع الرباعى المحدب الذى طولا قطراه هما أ سم ، ب سم وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° تساوى .... سم^{٢}

(أ) س (ب) ٢ س (جـ) س^{٢} (د) ٢ س^{٢}

(٣٨) إذا كان : س هو محيط المثلث أ ب جـ
فإن : $\sqrt{\text{س (س − ٢ أ ب) (س − ٢ ب جـ) (س − ٢ أ جـ)}}$ = ...

(أ) مساحة Δ أ ب جـ (ب) ٢ مساحة Δ أ ب جـ
(جـ) ٣ مساحة Δ أ ب جـ (د) ٤ مساحة Δ أ ب جـ

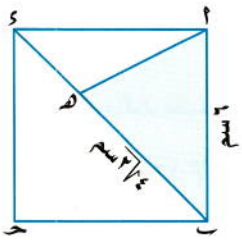
(٣٩) مساحة المعين الذى طول ضلعه ل سم وقياس إحدى زواياه الداخلة θ تساوى .... سم^{٢}

(أ) ل^{٢} (ب) $\frac{١}{٢}$ ل^{٢} جا θ (جـ) ل^{٢} جا θ (د) ل^{٢} جتا θ

(٤٠) أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم ، $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط
فإن مساحة Δ أ ب ء = ... سم^{٢}

(أ) $\frac{٣\sqrt{١٥}}{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{١٥}$ (جـ) ٣ $\sqrt{١٥}$ (د) $\frac{٥\sqrt{١٥}}{٢}$

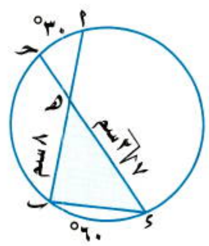
(٤١) في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث ب هـ = ٤ $\sqrt{٢}$ سم
فإن مساحة Δ أ ب هـ = ... سم^{٢}

(أ) ١٢ (ب) ٢٤
(جـ) ١٢ $\sqrt{٢}$ (د) ٢٤ $\sqrt{٢}$

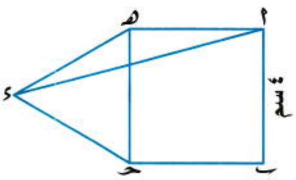
(٤٢) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران متقاطعان فى هـ ، هـ ء = ٧ $\sqrt{٢}$ سم
، هـ ب = ٨ سم ، ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ٦٠° ، ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٣٠°
فإن : مساحة Δ ء هـ ب = ... سم^{٢}

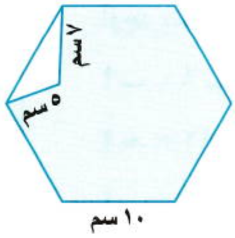
(أ) ٢٨ $\sqrt{٢}$ (ب) ٢٨ (جـ) ١٦ $\sqrt{٢}$ (د) ١٦

(٤٣) في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء مربع ، ء جـ هـ مثلث متساوى الأضلاع
فإن مساحة Δ أ ء هـ = ... سم^{٢}

(أ) ١٦ (ب) ٨
(جـ) ٤ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

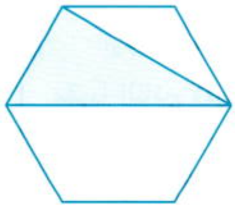


(٤٤) في الشكل المقابل :

شكل سداسى منتظم فإن مساحة المنطقة المظللة ≃ سم٢

(أ) ٢٤١,٦ (ب) ٢٤٦,١

(جـ) ٢٤٣,٦ (د) ٢٤٨,٣



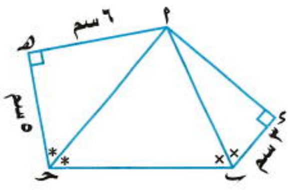
(٤٥) في الشكل المقابل :

سداسى منتظم ، إذا كانت مساحة الجزء المظلل = ٤ وحدة مساحة

فإن مساحة المسدس = ... وحدة مساحة.

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ٢٠ (د) ٢٤

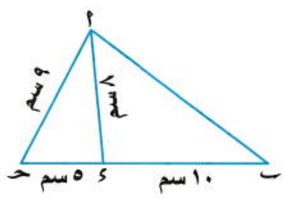


(٤٦) في الشكل المقابل :

مساحة Δ أ ب جـ = ... سم٢

(أ) ٢٤ (ب) ٣٢

(جـ) ٣٦ (د) ٤٨



(٤٧) في الشكل المقابل :

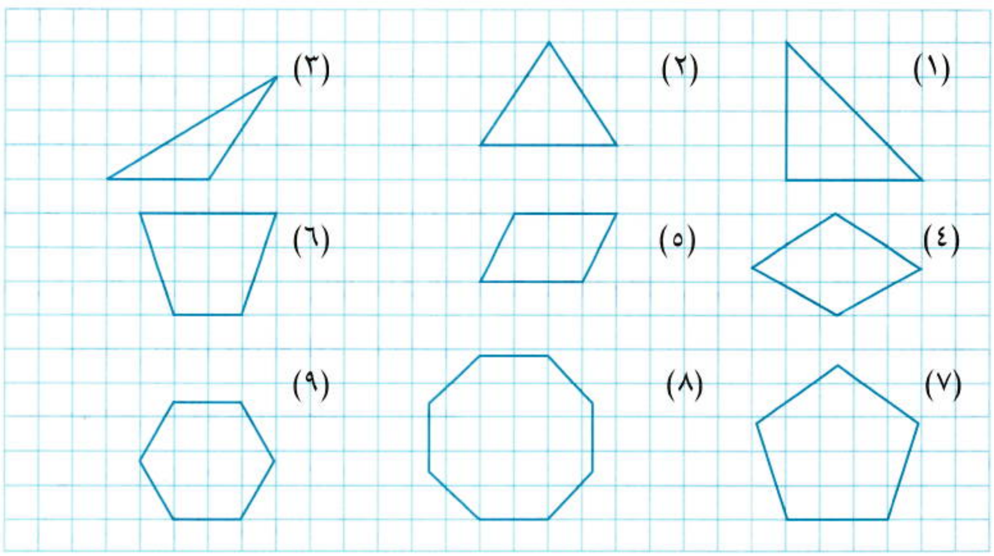
مساحة Δ أ ب جـ = ... سم٢

(أ) ٦ $\sqrt{١٦}$ (ب) ١٢ $\sqrt{١١}$

(جـ) ١٨ $\sqrt{١١}$ (د) ٣٦ $\sqrt{١١}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة كل شكل من الأشكال الآتية باعتبار أن □ هى وحدة المساحة :



٢ أوجد مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالات الآتية :

(١) أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق(∠ ب) = ٩٠° «٢٤ سم^2»

(٢) أ حـ = ١٢ سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{\text{أ حـ}}$ يساوى ٧ سم «٤٢ سم^2»

(٣) أ ب = ١٦ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، ق(∠ ب) = ٤٦° «١١٥ سم^2 تقريبًا»

---

٣ أوجد مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : ب حـ = ١٦ سم ، ب أ = ٢٢ سم ، ق(∠ ب) = ٦٣°
مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. «١٥٦,٨١٧ سم^2»

---

٤ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٤° «٦٤,٧ سم^2»

---

٥ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٨° مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع. «٨٩ سم^2»

---

٦ أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء فى كل من الحالات الآتية :

(١) متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ق(∠ ب) = ٦٠° «$44\sqrt{3}$ سم^2»

(٢) شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ يساوى ٧ سم ، ١١ سم
على الترتيب وطول العمود المرسوم من ء على $\overline{\text{ب حـ}}$ يساوى ٦ سم. «٥٤ سم^2»

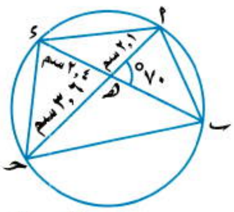
(٣) معين فيه أ ب = ٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه يساوى ٥٨° «٥٤ سم^2»

---

٧ أ ب حـ ء متوازى أضلاع طولا قطريه $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ هما ١٦ سم ، ٢٤ سم على الترتيب فإذا كانت مساحته ١٩٢ سم^2
فأوجد : ق(∠ أ م ء) «٩٠°»

---

٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، $\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ب ء}}$ = {هـ}
فإذا كان أ هـ = ٢,١ سم ، هـ حـ = ٣,٦ سم ، هـ ء = ٢,٤ سم ،
ق(∠ أ هـ ب) = ٧٠° فاحسب مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء «١٥ سم^2 تقريبًا»

---

٩ أوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الآتية (مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة) :

(١) خماسى منتظم طول ضلعه = ١٦ سم «٤٤٠,٤ سم^2»

(٢) سداسى منتظم طول ضلعه = ١٢ سم «٣٧٤,١ سم^2»

(٣) ثمانى منتظم طول ضلعه = ٨ سم «٣٠٩ سم^2»

(٤) سباعى منتظم طول ضلعه = ١٠ سم «٣٦٣,٤ سم^2»

١٠ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة شكل منتظم ذو ١٢ ضلعًا وطول ضلعه ١٠ سم «١١١٩,٦ سم^٢»

١١ احسب مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٧ سم ، أ حـ = ١١ سم «٢٨ سم^٢ تقريبًا»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مثلث أ ب حـ محيطه = ١٤ سم ومساحته = ٢ $\sqrt{١٤}$ سم^٢ وطول أحد أضلاعه ٣ سم

فإن الفرق بين طولى الضلعين الأخرين = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٧ (د) ١١

(٢) سداسى منتظم مساحته (م$_١$) مرسوم داخل دائرة مساحتها (م$_٢$) فإن م$_٢$: م$_١$ = ...

(أ) π : $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ π : $\sqrt{٣}$ (جـ) π : ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٢ π : ٣ $\sqrt{٣}$

(٣) مضلعان منتظمان مرسومان داخل نفس الدائرة ، أحدهما مكون من ٦ أضلاع مساحته (م$_١$) والآخر مكون من ١٢ ضلعًا مساحته (م$_٢$) فإن م$_١$: م$_٢$ = ...

(أ) ١ : $\sqrt{٢}$ (ب) ١ : ٢ (جـ) $\sqrt{٢}$: ٣ (د) $\sqrt{٣}$: ٢

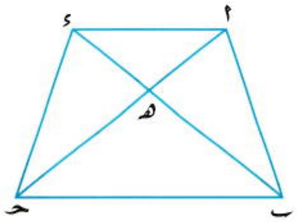
(٤) مساحة مضلع منتظم ذى ٤٠٠ ضلعًا ، وطول ضلعه $\sqrt{\text{طا}\left(\frac{٩}{٢٠}\right)^\circ}$ وحدة طول

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٥٠ (ب) ١٠٠

(جـ) ١٠٠ طتا $\left(\frac{٩}{٢٠}\right)^\circ$ (د) ٥٠ طا $\left(\frac{٩}{٢٠}\right)^\circ$

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ب ء}}$ = {هـ}

، مساحة (Δ أ هـ ء) = ٩ سم^٢ ، مساحة (Δ أ هـ ب) = ١٨ سم^٢

، مساحة (Δ حـ هـ ب) = ١٦ سم^٢

فإن مساحة Δ ء هـ حـ = ... سم^٢

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٦) إذا كان : أ ب حـ ء هـ شكل خماسى منتظم طول ضلعه = ل سم وطول $\overline{\text{أ حـ}}$ = م سم

فإن : $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ حـ ء})}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ (ب) $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$ (جـ) $\frac{٢ \text{ ل}}{٣ \text{ م}}$ (د) $\frac{٣ \text{ ل}}{٢ \text{ م}}$

(٧) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overline{أحـ} \cap \overline{بء} = \{هـ\}$

إذا كانت مساحة (Δ ء هـ حـ) = مـ سم^2 ، مساحة (Δ أ هـ ء) = (مـ − ٢) سم^2

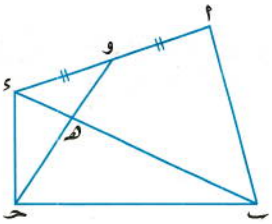
، مساحة (Δ أ هـ ب) = (مـ + ١٠) سم^2 ، مساحة (Δ ب هـ حـ) = (مـ + ١٦) سم^2

فإن مساحة الشكل : أ ب حـ ء = ... سم^2

(أ) ٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٥٦ (د) ٨٨

---

٢ في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة (Δ و هـ ء) = ٣ سم^2

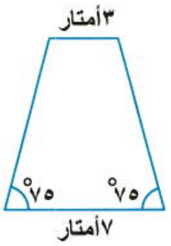
، مساحة (Δ ء هـ حـ) = ٨ سم^2

، مساحة (Δ هـ ب حـ) = ٢٤ سم^2

وكانت و منتصف $\overline{أء}$ أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء «٥٦ سم^2»

تطبيقات حياتية

١ **إنشاءات :** الشكل المقابل يرسم مجموعة من الدرجات تؤدى إلى مدخل مجمع سكنى على شكل شبه منحرف متساوى الساقين قاعدته الكبرى لأسفل وعرضها ٧ أمتار وقاعدته الصغرى لأعلى وعرضها ٣ أمتار ، ويميل كل من ساقيه على القاعدة السفلى بزاوية قياسها °٧٥ **أوجد :**



(١) طول قاعدته عند منتصف الساقين (القاعدة المتوسطة)

(٢) طول كل من ساقيه (لأقرب جزء من عشرة)

(٣) مساحة شبه المنحرف لأقرب متر مربع «٥ م ، ٧,٧ م ، ٣٨ م^2»

---

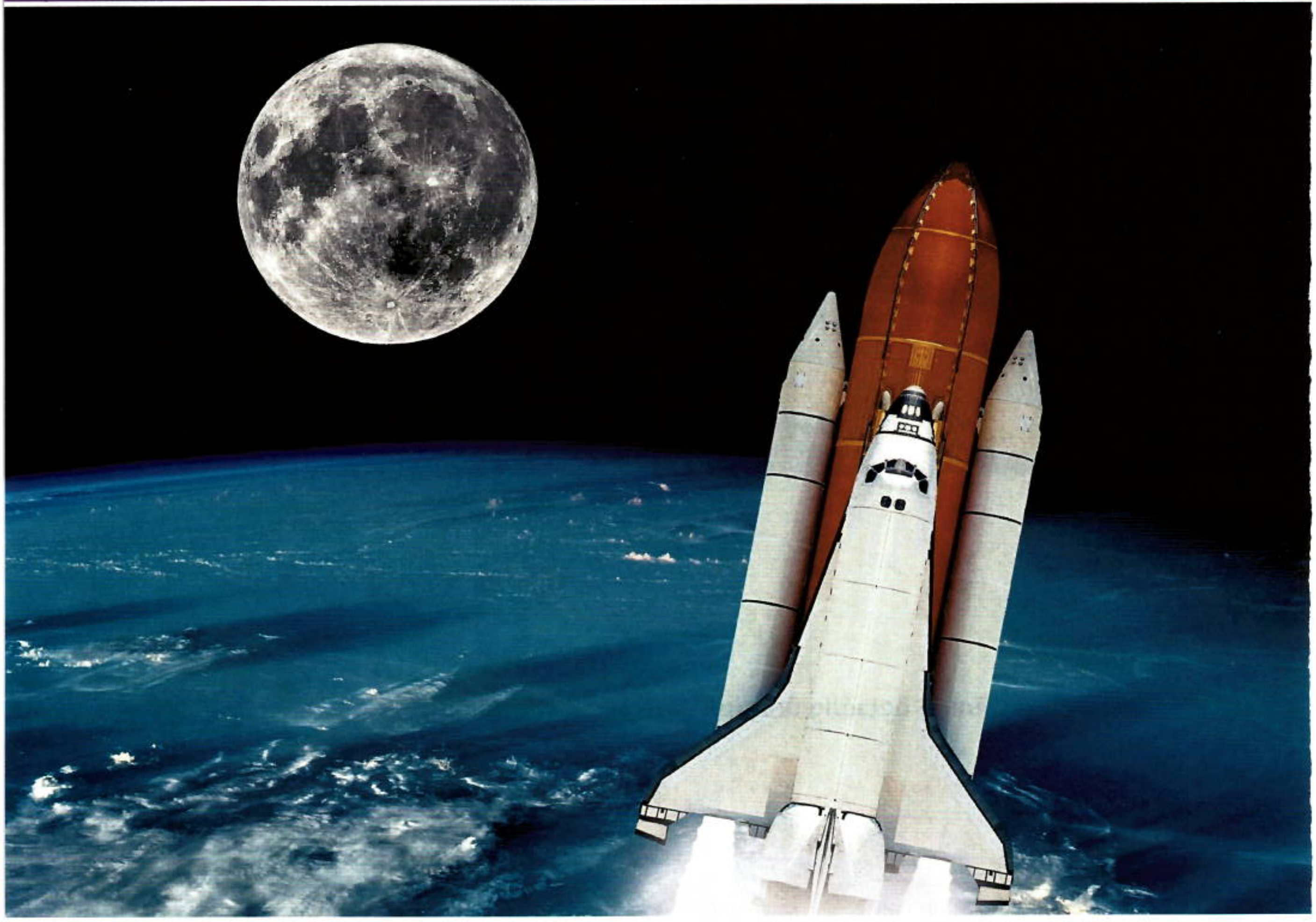
٢ **أحواض زينة :** صمم حوض لأسماك الزينة قاعدته على شكل خماسى منتظم طول قطره ٧٢ سم ، أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة قاعدته. «٣٤٠٧ سم^2»

---

٣ **زهور :** يصمم كريم حديقة لمنزله ، ويرغب أن يكون الجزء المخصص للزهور على شكل سداسى منتظم مساحته ٥٤ $\sqrt{3}$ متر مربع. أوجد طول ضلعه. «٦ م»

ثانيًا

الهندسة التحليلية



الوحدة **4** المتجهات.

الوحدة **5** الخط المستقيم.

الوحدة 4

المتجهات

دروس الوحدة

الدرس 1 الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة.

الدرس 2 المتجهات.

الدرس 3 العمليات على المتجهات.

الدرس 4 تطبيقات على المتجهات.

نواتج التعلُّم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة ، ويعبر عنها بدلالة طرفيها فى مستوى الإحداثيات.
- يتعرف متجه الموضع ويضعه فى الصورة القطبية.
- يوجد معيار المتجه ، والمتجه الصفرى.
- يتعرف ويحل تمارين على تكافؤ متجهين.
- يتعرف متجه الوحدة ويعبر عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.
- يتعرف توازى متجهين وتعامد متجهين.
- يضرب متجهًا فى عدد حقيقى.
- يجمع متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الإحداثيات - طريقة متوازى الأضلاع) - يطرح متجهين.
- يثبت بعض النظريات الهندسية باستخدام المتجهات.
- يحل تطبيقات فيزيائية على المتجهات.

الدرس 1 الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

الكميات القياسية والكميات المتجهة

* **تنقسم الكميات التى نتعامل معها فى حياتنا إلى نوعين :**

١ **الكمية القياسية :** هى كمية تتعين تمامًا بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية.

ومن أمثلتها : الطول – الكتلة – الزمن – درجة الحرارة – الحجم – المسافة.

٢ **الكمية المتجهة :** هى كمية تتعين بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية بالإضافة إلى الاتجاه.

ومن أمثلتها : القوة – الإزاحة – متجه السرعة.

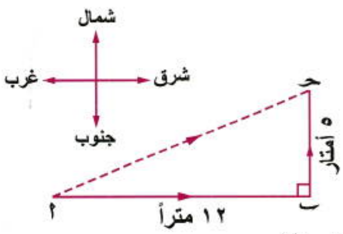
ولتوضيح الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة نوضح على سبيل المثال الفرق بين المسافة ككمية قياسية والإزاحة ككمية متجهة :

١ **المسافة :** هى طول المسار الفعلى المقطوع أثناء الحركة من موضع إلى آخر.

وهى كمية قياسية لأنها تتعين تمامًا بمقدارها فقط وليس لها اتجاه.

٢ **الإزاحة :** هى أقصر بُعد بين نقطة البداية ونقطة النهاية ، وفى اتجاهٍ من نقطة البداية إلى نقطة النهاية ، أى أنها مسافة مقطوعة فى اتجاه معين.

وهى كمية متجهة لأنها تتعين تمامًا بمقدارها بالإضافة إلى اتجاهها.



فمثلًا فى الشكل المقابل :

إذا تحرك جسم من النقطة (أ) مسافة ١٢ مترًا شرقًا ثم غير اتجاهه وسار مسافة ٥ أمتار شمالاً ثم توقف عند النقطة (حـ)

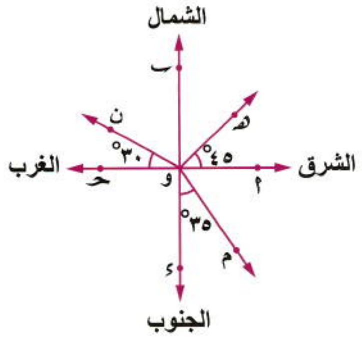
فإن : المسافة التى قطعها الجسم أثناء الحركة = أب + ب حـ = ١٢ + ٥ = ١٧ مترًا

وتكون : الإزاحة الحادثة خلال الحركة هى طول $\overline{\text{أحـ}}$ وفى الاتجاه من أ إلى حـ

أى أن الإزاحة = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢}$ = ١٣ مترًا فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

الاتجـــــاه

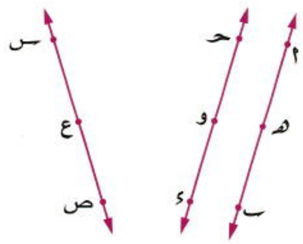
كل شعاع فى المستوى يعين اتجاهًا معينًا.



فمثلاً فى الشكل المقابل :

- $\overrightarrow{\text{وأ}}$ يحدد اتجاه الشرق.
- $\overrightarrow{\text{وهـ}}$ يحدد اتجاه الشمال الشرقى.
- $\overrightarrow{\text{ون}}$ يحدد اتجاه ٣٠° شمال الغرب.
- $\overrightarrow{\text{وم}}$ يحدد اتجاه ٣٥° شرق الجنوب.

لاحظ أنه فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ متوازيين وكل منهما لا يوازى $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

، هـ $\in$ $\overline{\text{أب}}$ ، و $\in$ $\overline{\text{حـ ء}}$ ، ع $\in$ $\overline{\text{س ص}}$

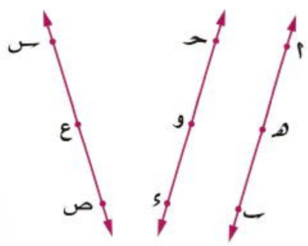
فإن :
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيم واحد.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و حـ}}$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيمان متوازيان.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$ فى اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيم واحد.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ء}}$ فى اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيمان متوازيان.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع س}}$ مختلفان فى الاتجاه ويحملهما مستقيمان غير متوازيين.

وبصفة عامة :

* الشعاعان المتحدان فى الاتجاه أو المتضادان فى الاتجاه يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.
* الشعاعان المختلفان فى الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ متوازيان وكل منهما لا يوازى $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

، هـ $\in$ $\overline{\text{أب}}$ ، و $\in$ $\overline{\text{حـ ء}}$ ، ع $\in$ $\overline{\text{س ص}}$

بيِّن ما إذا كان الشعاعان فى كل مما يأتى متحدين فى الاتجاه أو متضادين فى الاتجاه أو مختلفى الاتجاه :

١ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{وء}}$	٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{س ص}}$	٣ $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$
٤ $\overrightarrow{\text{ع ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع س}}$	٥ $\overrightarrow{\text{حـ و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع س}}$	

القطعة المستقيمة الموجهة

- إذا حددنا للقطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ نقطة بداية أ ونقطة نهاية ب فإنه يترتب على ذلك أن يصبح للقطعة المستقيمة اتجاه من أ إلى ب وتسمى قطعة مستقيمة موجهة ويرمز لها بالرمز $\overleftarrow{\text{أب}}$ مع ملاحظة أن : $\overleftarrow{\text{أب}} \neq \overleftarrow{\text{بأ}}$ لاختلافهما فى نقطتى البداية والنهاية مما يؤدى إلى تضادهما فى الاتجاه.

- **مما سبق نرى أن القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد بثلاثة عناصر هى :**

[١] نقطة البداية. [٢] نقطة النهاية.

[٣] الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

تعريف

[١] **القطعة المستقيمة الموجهة :** هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه.

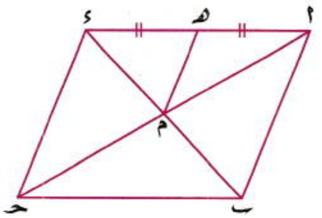
[٢] **معيار القطعة المستقيمة الموجهة (معيار $\overleftarrow{\text{أب}}$) :** هو طول $\overline{\text{أب}}$ ويرمز له بالرمز $\| \overleftarrow{\text{أب}} \|$

ولاحظ أن $\| \overleftarrow{\text{أب}} \| = \| \overleftarrow{\text{بأ}} \| = \text{أب}$

[٣] **تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين :** تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان :

(١) لهما نفس الطول (المعيار). (٢) لهما نفس الاتجاه.

مثال ١



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{\text{أء}}$

أولًا : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ :

[١] $\overleftarrow{\text{أب}}$ [٢] $\overleftarrow{\text{ءأ}}$ [٣] $\overleftarrow{\text{مب}}$

[٤] $\overleftarrow{\text{أم}}$ [٥] $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ [٦] $\overleftarrow{\text{مهـ}}$

ثانيًا : بيِّن لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

[١] $\overleftarrow{\text{ءم}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءب}}$ [٢] $\overleftarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـب}}$ [٣] $\overleftarrow{\text{أم}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـم}}$

الحــل

أولًا :

١ $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ٢ $\overrightarrow{\text{حـب}}$ ٣ $\overrightarrow{\text{ءم}}$

٤ $\overrightarrow{\text{محـ}}$ ٥ $\overrightarrow{\text{هـء}}$ ٦ لا يوجد.

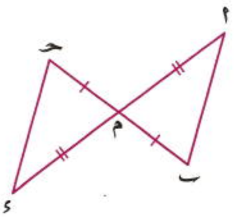
ثانيًا :

١ لأن : $\|\overrightarrow{\text{ءم}}\| \neq \|\overrightarrow{\text{ءب}}\|$ ٢ لأن : $\overrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـب}}$ متضادتان فى الاتجاه.

٣ لأن : $\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـم}}$ متضادتان فى الاتجاه.

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



إذا كانت : $\overline{\text{أء}} \cap \overline{\text{بحـ}} = \{\text{م}\}$

، م أ = م ء ، م ب = م حـ

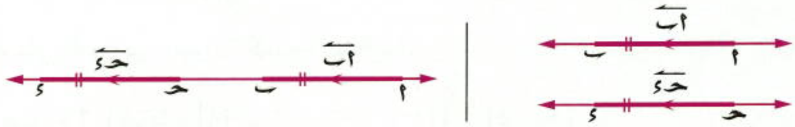
فأكمل ما يأتى بوضع «تكافئ» أو «لا تكافئ» مع ذكر السبب :

١ $\overrightarrow{\text{أم}}$ .... $\overrightarrow{\text{مء}}$ لأنهما .... ٢ $\overrightarrow{\text{مب}}$ .... $\overrightarrow{\text{محـ}}$ لأنهما ....

٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ .... $\overrightarrow{\text{حـء}}$ لأنهما .... ٤ $\overrightarrow{\text{بم}}$ .... $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ لأنهما ....

مـلاحظـات

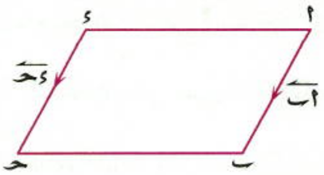
١ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـء}}$ لا يمكن أن تتكافئا إلا إذا كان يحملهما مستقيمان متوازيان أو مستقيم واحد كما بالشكلين الآتيين :



٢ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء لا تقع على استقامة واحدة

وكانت : $\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$

فإن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.



٣ من نقطة فى المستوى ولتكن حـ لا يمكن رسم

إلا قطعة مستقيمة موجهة وحيدة $\overrightarrow{\text{حـء}}$

تكافئ قطعة مستقيمة أخرى $\overrightarrow{\text{أب}}$ فى نفس المستوى.

٤ يوجد عدد لا نهائى من القطع المستقيمة الموجهة التى يمكن رسمها فى المستوى وكل منها تكافئ قطعة مستقيمة موجهة أخرى.

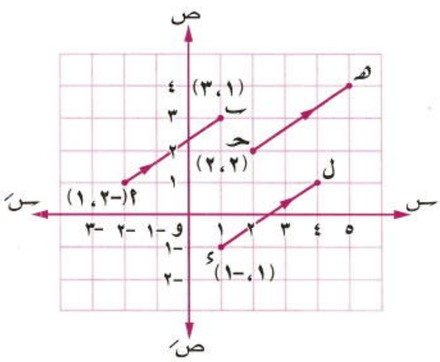
مثال ٢

فى مستوى إحداثى متعامد عيِّن النقط :

أ(−٢ ، ١) ، ب(١ ، ٣) ، حـ(٢ ، ٢) ، ء(١ ، −١)

ثم ارسم $\overleftarrow{حـهـ}$ ، $\overleftarrow{ءل}$ كل منهما تكافئ $\overleftarrow{أب}$ ، أوجد إحداثيى كل من : هـ ، ل

الحـل



لرسم $\overleftarrow{حـهـ}$ تكافئ $\overleftarrow{أب}$ يجب أن تكون $\overleftarrow{حـهـ}$ ، $\overleftarrow{أب}$

لهما نفس الاتجاه ونفس المعيار.

* نرسم $\overleftarrow{حـهـ}$ // $\overleftarrow{أب}$

(ميل $\overleftrightarrow{حـهـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$)

* نحدد طول $\overline{حـهـ}$ = طول $\overline{أب}$ باستخدام الفرجار

أو بحساب عدد المربعات الأفقية والرأسية فنجد أن : هـ = (٥ ، ٤)

* وبالمثل : نرسم $\overleftarrow{ءل}$ نجد أن : ل = (٤ ، ١)

حل آخر :

∵ الانتقال يحافظ على التوازى وأطوال القطع المستقيمة.

∴ النقطة حـ هى صورة أ بالانتقال [(٢ ، ٢) − (−٢ ، ١)] = (٤ ، ١)

ولرسم $\overleftarrow{حـهـ}$ تكافئ $\overleftarrow{أب}$ نجد أن $\overleftarrow{حـهـ}$ هى صورة $\overleftarrow{أب}$ بالانتقال (٤ ، ١)

∴ النقطة هـ هى صورة النقطة ب بالانتقال (٤ ، ١)

∴ النقطة هـ = (١ + ٤ ، ٣ + ١) = (٥ ، ٤)

وبالمثل يمكن إيجاد إحداثيي النقطة ل

تمارين 1

على الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) 📖 أى مما يأتى يمثل كمية متجهة ؟

(أ) الزمن. (ب) درجة الحرارة. (جـ) الإزاحة. (د) الكتلة.

(٢) إذا كان : أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م فإن :

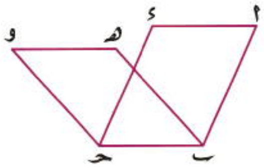
أولًا $\overleftarrow{\text{جء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overleftarrow{\text{أب}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{بأ}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{جأ}}$ (د) $\overleftarrow{\text{أء}}$

ثانيًا : $\overleftarrow{\text{مء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overleftarrow{\text{ءم}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{مب}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{بم}}$ (د) $\overleftarrow{\text{مأ}}$

(٣) **فى الشكل المقابل :**



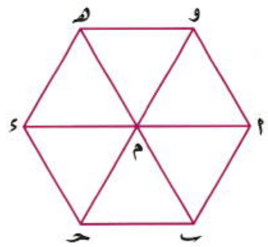
إذا كان : أ ب جـ ء ، هـ ب جـ و متوازيى أضلاع

فإن : $\overleftarrow{\text{أء}}$ تكافئ كلًا من ....

(أ) $\overleftarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جء}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{بج}}$ ، $\overleftarrow{\text{جو}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{بج}}$ ، $\overleftarrow{\text{هو}}$ (د) $\overleftarrow{\text{بج}}$ ، $\overleftarrow{\text{بأ}}$

(٤) **فى الشكل المقابل :**



أ ب جـ ء هـ و سداسى منتظم ، مركزه النقطة م فإن :

أولًا : $\overleftarrow{\text{أب}}$ تكافئ كلًا من القطع المستقيمة الموجهة الآتية ماعدا ....

(أ) $\overleftarrow{\text{هء}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{بج}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{مج}}$ (د) $\overleftarrow{\text{وم}}$

ثانيًا : $\overleftarrow{\text{مء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overleftarrow{\text{مأ}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{بج}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{هو}}$ (د) $\overleftarrow{\text{جب}}$

(٥) 📖 أ ب جـ ء مربع تقاطع قطراه فى م ، فإن أزواج القطع المستقيمة الموجهة الآتية متكافئة ما عدا ....

(أ) $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءج}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{أم}}$ ، $\overleftarrow{\text{مج}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{بج}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ (د) $\overleftarrow{\text{أم}}$ ، $\overleftarrow{\text{مء}}$

(٦) إذا كان أ ب ح ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى (ن) أى من القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة ؟

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ون}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـء}}$ (ج) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{نح}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{نء}}$

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أح}}$ فإن : ....

(أ) ب منتصف $\overline{\text{أح}}$ (ب) ح منتصف $\overline{\text{أب}}$

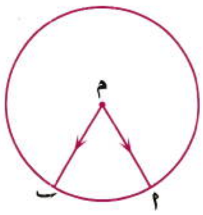
(ج) ب تنطبق على ح (د) أ تنطبق على ح

(٨) إذا كان ح منتصف $\overline{\text{أب}}$ فأى مما يأتى يكون صحيح ؟

(١) $\overrightarrow{\text{أح}} = \overrightarrow{\text{بح}}$ (٢) $\|\overrightarrow{\text{أح}}\| = \|\overrightarrow{\text{بح}}\|$ (٣) $\overrightarrow{\text{أح}} = -\overrightarrow{\text{حب}}$

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط. (ج) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{مأ}}$ ، $\overline{\text{مب}}$ أنصاف أقطار فى دائرة (م)

فأى مما يأتى صحيح ؟

(١) $\overrightarrow{\text{مأ}} = \overrightarrow{\text{مب}}$ (٢) $\|\overrightarrow{\text{مأ}}\| = \|\overrightarrow{\text{مب}}\|$ (٣) $\overrightarrow{\text{مأ}} = -\overrightarrow{\text{بم}}$

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط. (ج) (١) ، (٢) فقط. (د) (٢) ، (٣) فقط.

(١٠) إذا تحرك جسم من نقطة أ إلى نقطة ب فإن المسافة التى قطعها تكون ....

(أ) $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ (ب) أقل من $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$

(ج) أكبر من أو يساوى $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ (د) $\overrightarrow{\text{أب}}$

(١١) إذا تحرك جسم من نقطة أ إلى نقطة ب ثم إلى نقطة ح فإن ....

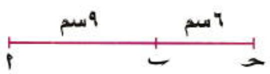
(أ) المسافة التى قطعها الجسم تساوى $\|\overrightarrow{\text{أح}}\|$

(ب) المسافة التى قطعها الجسم تساوى $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بح}}$

(ج) الإزاحة التى قطعها الجسم تساوى $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| + \|\overrightarrow{\text{بح}}\|$

(د) الإزاحة التى قطعها الجسم تساوى $\overrightarrow{\text{أح}}$

(١٢) فى الشكل المقابل :



إذا تحرك جسم من النقطة أ شرقًا إلى النقطة ح

ثم عاد غربًا إلى النقطة ب فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... سم.

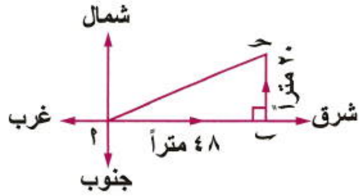
(أ) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٥ (د) ٢١

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٩ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ (ب) ٦ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

(جـ) ٩ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ (د) ٢١ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$

(١٣) فى الشكل المقابل :



إذا تحرك جسم من النقطة أ مسافة ٤٨ مترًا شرقًا ثم غير اتجاهه وسار مسافة ٢٠ مترًا شمالاً ثم توقف عند النقطة حـ فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... مترًا

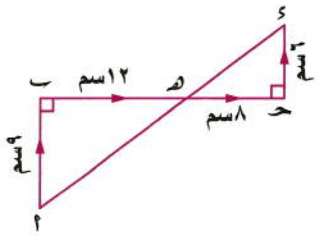
(أ) ٥٢ (ب) ٦٨ (جـ) ٤٨ (د) ٢٨

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٦٨ متر فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ (ب) ٦٨ متر فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$

(جـ) ٥٢ متر فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ (د) ٥٢ متر فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$

(١٤) فى الشكل المقابل :



إذا كانت كل من : $\overline{\text{ءحـ}}$ ، $\overline{\text{أب}}$ عمودية على $\overline{\text{ب حـ}}$

وإذا تحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة ب ثم حـ

وتوقف عند النقطة ء فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... سم

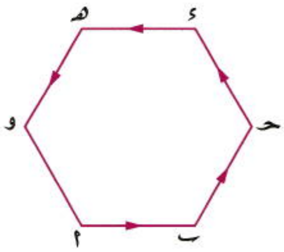
(أ) ٢٥ (ب) ٣٥ (جـ) ٢٩ (د) ٢٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٣٥ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أء}}$ (ب) ٣٥ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ءأ}}$

(جـ) ٢٥ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أء}}$ (د) ٢٥ سم فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ءأ}}$

(١٥) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٨ أمتار

، إذا تحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة ب

ثم حـ ثم ء ثم هـ وتوقف عند النقطة و فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... متر.

(أ) ٨ (ب) ٤٨ (جـ) ٣٢ (د) ٤٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٨ متر فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أو}}$ (ب) ٤٠ متر فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وأ}}$

(جـ) ٨ متر فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وأ}}$ (د) ٤٠ متر فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أو}}$

(١٦) سيارة قطعت ٢٠ متر فى اتجاه الشمال ثم قطعت نفس المسافة فى اتجاه الغرب فإن إزاحة السيارة هى ....

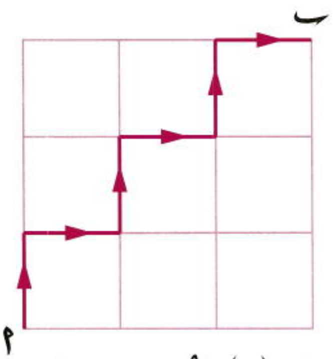
(أ) ٤٠ متر فى اتجاه الغرب. (ب) ٤٠ متر فى اتجاه الشمال الغربى.

(جـ) ٢٠ $\sqrt{2}$ متر فى اتجاه الشمال الغربى. (د) ٢٠ $\sqrt{2}$ متر فى اتجاه الجنوب الغربى.

(١٧) فى المستوى الإحداثى المتعامد إذا كانت : أ (١ ، ٣) ، ب (−٣ ، ١) ، جـ (٠ ، ٤)
وكان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ يكافئ $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ فإن : ء = ...

(أ) (−٤ ، ٢) (ب) (٤ ، −٢) (جـ) (−٣ ، ١) (د) (−٤ ، −٢)

(١٨) **فى الشكل المقابل :**



حديقة مربعة الشكل مساحتها ٩٠٠ متر مربع تم عمل مسارات مستقيمة للترجل بها حتى لا تؤذى النباتات فقسمت تلك المسارات الحديقة إلى ٩ مربعات متطابقة كما بالشكل فإذا تحرك شخص من نقطة أ إلى ب متخذًا المسار الموضح بالشكل فإن :

أولًا : المسافة المقطوعة = ... متر.

(أ) ٣٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

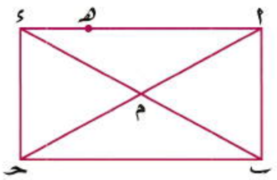
ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٦٠ متر فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ (ب) ٣٠ متر فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$

(جـ) ٣٠ $\sqrt{2}$ متر فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ (د) ٦٠ متر فى اتجاه $\overrightarrow{\text{بأ}}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ فى الشكل المقابل :



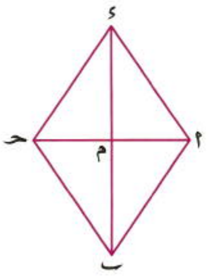
أ ب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م ، هـ $\in$ $\overline{\text{أء}}$

بيِّن ما إذا كان الشعاعان فى كل مما يأتى متحدين فى الاتجاه أو متضادين فى الاتجاه أو مختلفى الاتجاه :

(١) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ (٢) $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ (٣) $\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$

(٤) $\overrightarrow{\text{بم}}$ ، $\overrightarrow{\text{مجـ}}$ (٥) $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ (٦) $\overrightarrow{\text{بم}}$ ، $\overrightarrow{\text{مء}}$

٢ **فى الشكل المقابل :**



أ ب ح ء معين فيه :

$\overline{\text{أ ح}} \cap \overline{\text{ب ء}} = \{\text{م}\}$

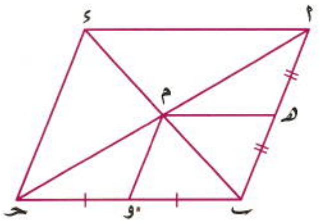
اكتب القطع المستقيمة الموجهة والتى تكافئ كلاً مما يأتى :

(١) $\overleftarrow{\text{م أ}}$ | (٢) $\overleftarrow{\text{م ء}}$

(٣) $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ | (٤) $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

---

٣ **فى الشكل المقابل :**



أ ب ح ء متوازى أضلاع فيه : $\overline{\text{أ ح}} \cap \overline{\text{ب ء}} = \{\text{م}\}$

، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب ح}}$

أولًا : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ :

(١) $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ | (٢) $\overleftarrow{\text{م ب}}$ | (٣) $\overleftarrow{\text{م هـ}}$

(٤) $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ | (٥) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ | (٦) $\overleftarrow{\text{ب ح}}$

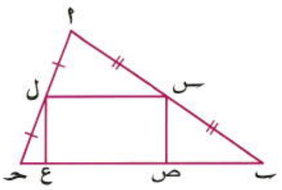
ثانيًا : بيِّن لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

(١) $\overleftarrow{\text{م هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب و}}$ | (٢) $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ح}}$

(٣) $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ح}}$ | (٤) $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء ح}}$

---

٤ **فى الشكل المقابل :**



أ ب ح مثلث فيه : س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، ل منتصف $\overline{\text{أ ح}}$ ، س ص ع ل مستطيل

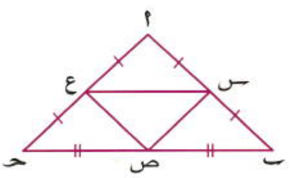
اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ كلاً مما يأتى :

(١) $\overleftarrow{\text{س ص}}$ | (٢) $\overleftarrow{\text{س ل}}$ | (٣) $\overleftarrow{\text{أ ل}}$

(٤) $\overleftarrow{\text{ب س}}$ | (٥) $\overleftarrow{\text{ب ص}}$

---

٥ 📖 **فى الشكل المقابل :**



أ ب ح مثلث فيه : أ ب = أ ح

، س ، ص ، ع منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ح}}$ ، $\overline{\text{ح أ}}$ على الترتيب.

أولًا : أى العبارات التالية صحيحة :

(١) $\|\overleftarrow{\text{س ص}}\| = \|\overleftarrow{\text{ع ص}}\|$ | (٢) $\overleftarrow{\text{س ص}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{ع ص}}$ | (٣) $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{ع س}}$

ثانيًا : اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ كلاً من :

(١) $\overleftarrow{\text{ب س}}$	(٢) $\overleftarrow{\text{أ ع}}$	(٣) $\overleftarrow{\text{س ع}}$
(٤) $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$	(٥) $\overleftarrow{\text{س ص}}$	(٦) $\overleftarrow{\text{ع ص}}$

---

٦ **فى مستوى إحداثى متعامد :** إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (-٣ ، ١) ، حـ (٥ ، -١)

(١) ارسم $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ وعين إحداثيى النقطة ء

(٢) عين إحداثيى النقطة م منتصف $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ثم حدد القطع المستقيمة الموجهة التى تكافئ :

(أ) $\overleftarrow{\text{ب م}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{أ م}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ (د) $\overleftarrow{\text{ء ب}}$

(٣) هل الشكل أ حـ ء ب متوازى أضلاع ؟ فسر إجابتك.

---

٧ **فى مستوى إحداثى متعامد :** إذا كانت أ (٤ ، -٣) ، ب (٤ ، ٤) ، حـ (-٣ ، -١) وكانت كل من القطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{و م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن و}}$ متكافئة حيث و نقطة الأصل. **أوجد إحداثيى كل من : ء ، م ، ن**

---

٨ **فى مستوى إحداثى متعامد :**

إذا كانت أ (٣ ، -٢) ، ب (٦ ، ٢) ، حـ (١ ، ٣) ، ء (٤ ، ٧)

(١) **أوجد من الرسم :** ‖ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ‖ ، ‖ $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ‖

(٢) **أثبت أن :** $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$

(٣) إذا كانت القطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ر}}$ متكافئة.

أوجد إحداثيى كل من : م ، ن ، ر حيث و نقطة الأصل.

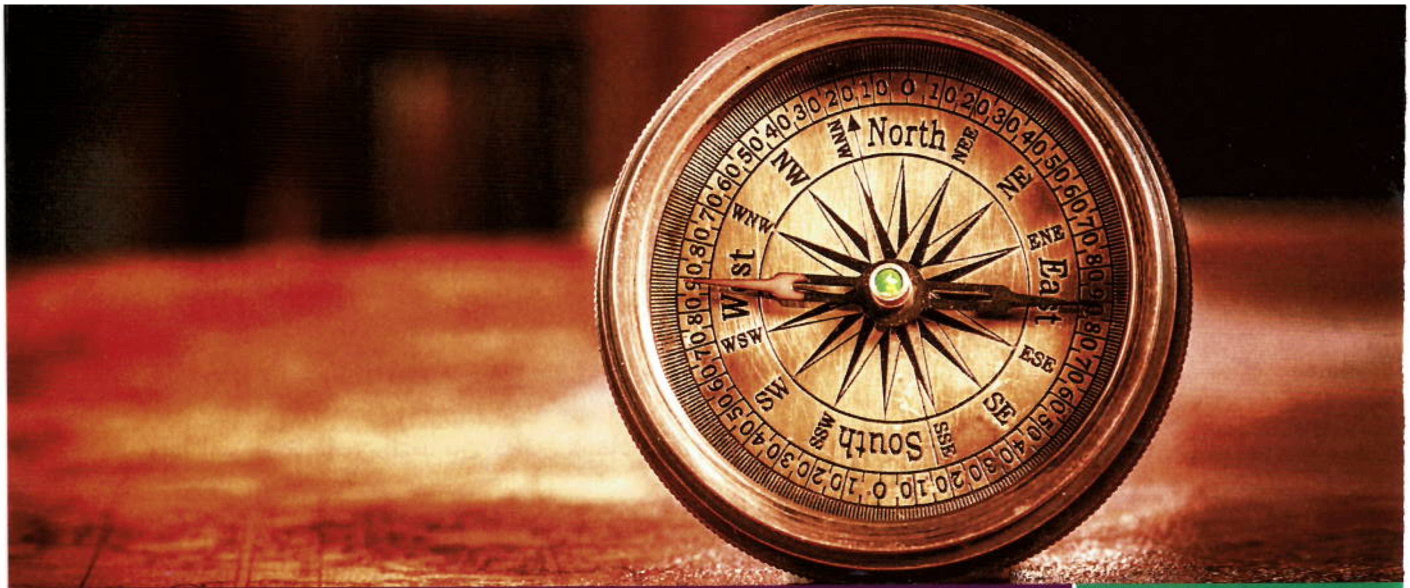
---

٩ **أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) نقطة الأصل وعيِّن عليه النقط :**

أ (-٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٠) ، حـ (٢ ، -٣) ، ن (-٣ ، ١) ، ط (٤ ، ١)

ثم ارسم القطع المستقيمة الموجهة : $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن ل}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق ط}}$ كل منها تكافئ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

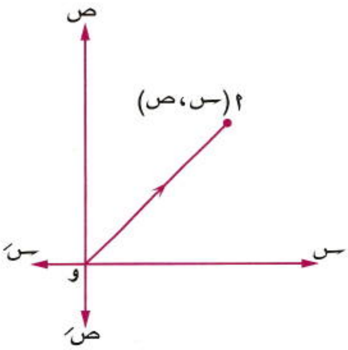
وعيِّن من الرسم إحداثيات : ء ، هـ ، ل ، ق



الدرس 2

المتجهات

متجه الموضع



نعلم أن كل نقطة أ فى المستوى الإحداثى المتعامد تُعين بزوج مرتب وحيد (س ، ص) ولذلك يكون لها موضع وحيد بالنسبة لنقطة الأصل و يتحدد بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{وأ}$ التى تُسمى متجه الموضع لنقطة أ

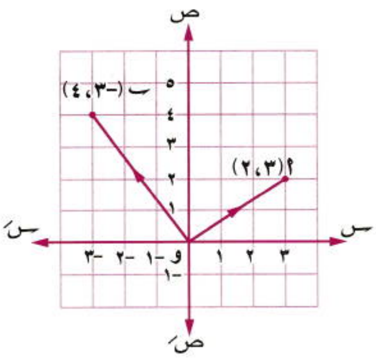
ويُكتب : $\overrightarrow{وأ}$ = (س ، ص)

تعريف

متجه الموضع لنقطة معلومة أ بالنسبة لنقطة الأصل و :

هو القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{وأ}$ التى بدايتها نقطة الأصل و ونهايتها النقطة المعلومة أ

فمثلًا فى الشكل المقابل



* $\overrightarrow{وأ}$ هو متجه الموضع لنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و

ويُكتب : $\overrightarrow{وأ}$ = (٣ ، ٢)

* $\overrightarrow{وب}$ هو متجه الموضع لنقطة ب بالنسبة لنقطة الأصل و

ويُكتب : $\overrightarrow{وب}$ = (-٣ ، ٤)

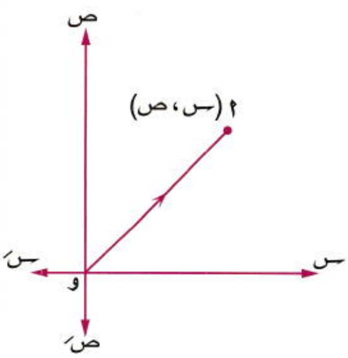
ملاحظة

نظرًا لأن كل متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية و لذلك نرمز لمتجه الموضع $\overrightarrow{وأ}$ بالرمز $\overrightarrow{أ}$

ففى الشكل السابق : نكتب : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٣ ، ٤)

معيار المتجه

هو طول القطعة المستقيمة التى تمثل المتجه.



فإذا كان : $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| =$ طول $\overline{و أ}$

وإذا استخدمنا قانون البعد بين نقطتين لإيجاد طول $\overline{و أ}$

فإن : طول $\overline{و أ} = \sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢}$

$\therefore \boxed{\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}}$

فمثلًا

- إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٤)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢} = ٥$ وحدة طول.
- إذا كان : $\overrightarrow{ب} = (-٣ ، ٣\sqrt{٣})$ فإن : $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(-٣)^٢ + (٣\sqrt{٣})^٢} = ٦$ وحدة طول.
- إذا كان : $\overrightarrow{حـ} = (-٣ ، ك)$ وكان $\|\overrightarrow{حـ}\| = ٣\sqrt{٢}$ فإن : $\sqrt{(-٣)^٢ + ك^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$\therefore ٩ + ك^٢ = ١٨$ $\therefore ك^٢ = ٩$ $\therefore ك = \pm ٣$

متجه الوحدة

هو متجه معياره الواحد الصحيح.

فمثلًا $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ متجه وحدة لأن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢} = ١$ وحدة طول.

المتجه الصفرى

هو متجه معياره يساوى الصفر ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{٠}$ حيث $\overrightarrow{و} = (٠ ، ٠)$ وهو متجه غير معين الاتجاه.

تحقق من فهمك

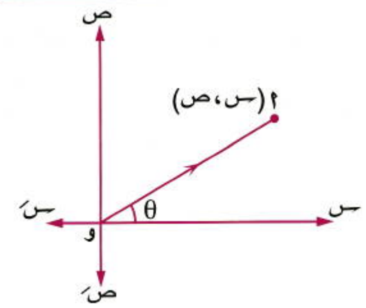
1. إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٦ ، -٨)$ فأوجد : $\|\overrightarrow{أ}\|$
2. هل $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ متجه وحدة أم لا ؟ ولماذا ؟
3. إذا كان : $\left(ك ، \frac{-٣}{٥}\right)$ متجه وحدة فأوجد قيمة : ك

الصورة القطبية لمتجه الموضع

إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{\text{و أ}}$ يصنع زاوية قياسها θ

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

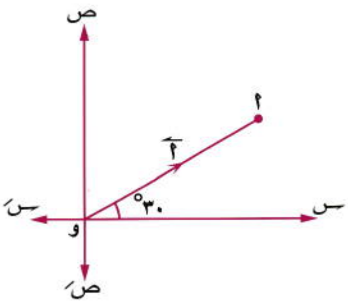
الصورة القطبية لمتجه الموضع $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (‖ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ‖ ، θ)



فمثلًا إذا كان $\overrightarrow{\text{و أ}}$ يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وكان ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ = ٦ وحدة طول

فإن : الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٦ ، ٣٠°)

أى أن $\boxed{\overrightarrow{\text{و أ}} = (٦ ، \frac{\pi}{٦})}$



ملاحظة

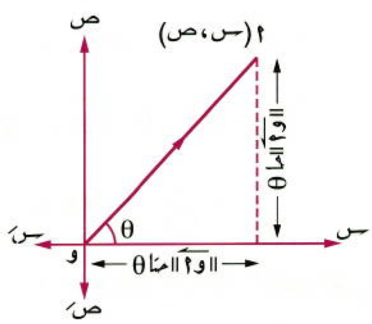
إذا كان : متجه موضع النقطة أ (س ، ص)

على الصورة القطبية $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (‖ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ‖ ، θ) فإن :

س = ‖ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ‖ جتا θ ، ص = ‖ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ‖ جا θ حيث طا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

وتكون الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$ هى :

$\boxed{\overrightarrow{\text{و أ}} = (\ \|\overrightarrow{\text{و أ}}\| \text{ جتا } \theta \ ، \ \|\overrightarrow{\text{و أ}}\| \text{ جا } \theta\ )}$



مثال ١

إذا كان $\overrightarrow{\text{و أ}}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل

فأوجد إحداثيى النقطة أ فى كل من الحالات الآتية :

١ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (١٠ √٣ ، ٦٠°) ٢ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٦ √٢ ، ١٣٥°) ٣ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٨ ، $\frac{٤\pi}{٣}$)

الحل

١ س = ١٠ √٣ جتا ٦٠° = ٥ √٣ ، ص = ١٠ √٣ جا ٦٠° = ١٥ ∴ أ = (٥ √٣ ، ١٥)

٢ س = ٦ √٢ جتا ١٣٥° = −٦ ، ص = ٦ √٢ جا ١٣٥° = ٦ ∴ أ = (−٦ ، ٦)

٣ س = ٨ جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ = −٤ ، ص = ٨ جا $\frac{٤\pi}{٣}$ = −٤ √٣ ∴ أ = (−٤ ، −٤ √٣)

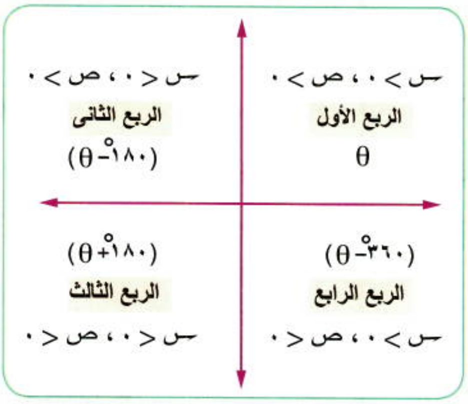
مثال ٢

إذا كان $\overrightarrow{\text{و أ}}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل

أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$ فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ $\overrightarrow{\text{و أ}} = (٤ ، ٤\sqrt{٣})$ ٢ $\overrightarrow{\text{و أ}} = (٥\sqrt{٣} ، -٥)$

الحل



١ ∵ $\overrightarrow{\text{و أ}} = (٤ ، ٤\sqrt{٣})$

∴ $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\| = \sqrt{(٤)^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$

= ٨ وحدة طول.

، $\text{طا}\,\theta = \frac{٤\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\sqrt{٣}$

هى : $\text{طا}^{-١}(\sqrt{٣}) = ٦٠°$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ $\theta = ٦٠°$ ∴ $\overrightarrow{\text{و أ}} = (٨ ، ٦٠°)$

٢ ∵ $\overrightarrow{\text{و أ}} = (٥\sqrt{٣} ، -٥)$ ∴ $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\| = \sqrt{(٥\sqrt{٣})^٢ + (-٥)^٢} = ١٠$ وحدة طول.

، $\text{طا}\,\theta = \frac{-٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ هى $\text{طا}^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = ٣٠°$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ $\theta = ٣٦٠° - ٣٠° = ٣٣٠°$ ∴ $\overrightarrow{\text{و أ}} = (١٠ ، ٣٣٠°)$

حاول بنفسك

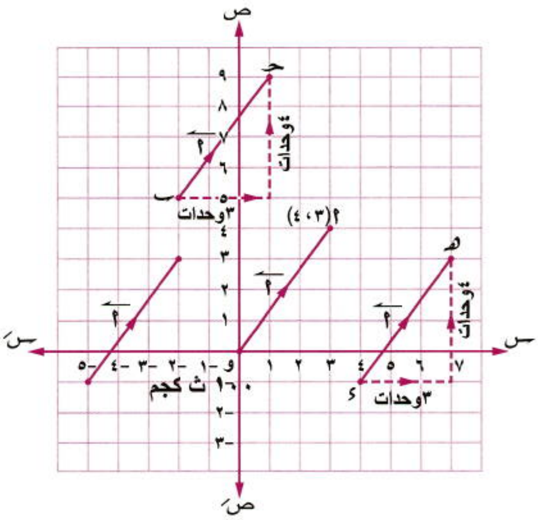
١ إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{\text{و أ}} = (٥\sqrt{٢} ، ٢٢٥°)$ فأوجد إحداثيى النقطة أ

٢ اكتب بالصورة القطبية متجه الموضع $\overrightarrow{\text{و أ}} = (-١٢\sqrt{٣} ، ١٢)$

المتجهات المتكافئة

كل متجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) يمكن تمثيله هندسيًا بالعديد من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة والتى كل منها تكافئ متجه الموضع للنقطة أ = (س ، ص)

ففى الشكل المقابل



$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٤) هو متجه الموضع للنقطة أ

، $\overrightarrow{\text{ب ح}} = \overrightarrow{\text{ء هـ}} = \cdots = \overrightarrow{\text{و أ}}$

لأن $\|\overrightarrow{\text{ب ح}}\| = \|\overrightarrow{\text{ء هـ}}\| = \cdots = \|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$

$= \sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}$ = ٥ وحدة طول

، $\overrightarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ، ... ، $\overrightarrow{\text{و أ}}$ فى نفس الاتجاه

ولذلك يعتبر كلٌ من :

$\overrightarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ، ... تمثيلًا هندسيًا للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

أى أن $\overrightarrow{\text{ب ح}} = \overrightarrow{\text{ء هـ}} = \cdots = \overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٣ ، ٤)

• **نلاحظ مما سبق :** ارتباط المتجهات بالأزواج المرتبة أى بعناصر ح × ح أى ($\text{ح}^{٢}$)

ولذلك يمكن استنتاج تعريف المتجهات بمفهومها الرياضى أو الجبرى كالآتى :

تعريف

المتجهات : هى عناصر المجموعة $\text{ح}^{٢}$ مع عمليتى الجمع والضرب فى عدد حقيقى المعرفتين عليها ويرمز لها بأحد الرموز : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ح}}$ ، ...

حيث إن المجموعة $\text{ح}^{٢}$ = مجموعة الأزواج المرتبة لحاصل الضرب الديكارتى ح × ح

= {(س ، ص) : س ∈ ح ، ص ∈ ح}

جمع متجهين جبريا

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$) ∈ $\text{ح}^{٢}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ($\text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{٢}$) ∈ $\text{ح}^{٢}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = ($\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}$)

فمثلًا **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١) **فإن :** $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ + ٢ ، ٥ + ١) = (٥ ، ٦)

خواص جمع المتجهات

١ **خاصية الانغلاق :** لكل $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ∈ $\text{ح}^{٢}$ **يكون :** $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ ∈ $\text{ح}^{٢}$

٢ **خاصية الإبدال :** لأى متجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ **يكون :** $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$

٣ **خاصية الدمج أو التجميع :** لأى ثلاثة متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ يكون :

$$\overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}$$

٤ **خاصية وجود العنصر المحايد :** لأى متجه $\overrightarrow{أ}$ يوجد متجه صفرى $\overrightarrow{و} = (٠ ، ٠)$

حيث : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$

٥ **خاصية توفر المعكوسات الجمعية :** لكل متجه $\overrightarrow{أ}$ (س ، ص) يوجد متجه $(-\overrightarrow{أ}) = (-س ، -ص)$

حيث : $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ (المتجه الصفرى) والمتجه $(-\overrightarrow{أ})$ يسمى المعكوس الجمعى للمتجه $\overrightarrow{أ}$

٦ **خاصية الحذف :** لأى ثلاثة متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{حـ}$ **فإن :** $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$

ضرب متجه فى عدد حقيقى

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (س ، ص) \in ح^٢$ ، $ك \in ح$ **فإن :** $ك\overrightarrow{أ} = ك (س ، ص) = (ك س ، ك ص)$

فمثلًا **إذا كان :** $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٥)$ **فإن :** $٣\overrightarrow{أ} = ٣ (٢ ، -٥) = (٦ ، -١٥)$

خواص ضرب المتجه فى عدد حقيقى

١ **خاصية التوزيع :**

(أ) لأى متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $ك \in ح$ **يكون :** $ك (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) = ك\overrightarrow{أ} + ك\overrightarrow{ب}$

(ب) لأى متجه $\overrightarrow{أ}$ ، $ك_١$ ، $ك_٢ \in ح$ **يكون :** $(ك_١ + ك_٢)\overrightarrow{أ} = ك_١\overrightarrow{أ} + ك_٢\overrightarrow{أ}$

٢ **خاصية الدمج أو التجميع :** لأى متجه $\overrightarrow{أ}$ ، $ك_١$ ، $ك_٢ \in ح$

يكون : $(ك_١ ك_٢)\overrightarrow{أ} = ك_١ (ك_٢\overrightarrow{أ})$

٣ **خاصية الحذف :** لأى متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $ك \in ح^*$ **إذا كان :** $ك\overrightarrow{أ} = ك\overrightarrow{ب}$ **فإن :** $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

مثال ٣

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (-٤ ، ٢)$

فأوجد كلاً من المتجهات الآتية :

١ $٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$

٢ $\frac{١}{٢} (٤\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ})$

٣ $٢\overrightarrow{و} - ٣ (\overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{أ})$ حيث $\overrightarrow{و}$ المتجه الصفرى.

الحـل

١ $2\overrightarrow{أ} - 3\overrightarrow{ب} = 2(5 ، 2) - 3(3 ، -1) = (6 ، -2) + (-6 ، -15) = (0 ، -17)$

٢ $\frac{1}{2}(4\overrightarrow{أ} + 2\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}) = 2\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \frac{1}{2}\overrightarrow{حـ} = 2(3 ، -1) + (2 ، 5) - \frac{1}{2}(-4 ، 2)$

$= (6 ، -2) + (2 ، 5) + (2 ، -1) = (10 ، 2)$

٣ $2\overrightarrow{و} - 3(\overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{أ}) = 2(0 ، 0) - 3[(-4 ، 2) + (3 ، -1)]$

$= (0 ، 0) - 3(-1 ، 1) = (0 ، 0) + (3 ، -3) = (3 ، -3)$

مثـال ٤

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (6 ، 1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (1 ، 2)$ فأوجد : $\|\overrightarrow{أ} - 2\overrightarrow{ب}\|$

الحـل

$\because \overrightarrow{أ} - 2\overrightarrow{ب} = (6 ، 1) - 2(1 ، 2) = (6 ، 1) - (2 ، 4) = (4 ، -3)$

$\therefore \|\overrightarrow{أ} - 2\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ وحدة طول.

حاول بنفسك

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (3 ، -1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (2 ، -5)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (-5 ، 5)$

فاكتب على الصورة القطبية المتجه $\overrightarrow{م}$ حيث $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{أ} - 2\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}$

تساوى متجهين

لأى متجهين $\overrightarrow{أ} = (س_1 ، ص_1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_2 ، ص_2)$ يكون : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

إذا وفقط إذا كان : $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$

فمثلًا **إذا كان :** $\overrightarrow{أ} = (س ، 3)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-5 ، ص)$ **وكان :** $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

فإن : $س = -5$ ، $ص = 3$

مثـال ٥

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (2 ، -3)$ ، $\overrightarrow{ب} = (3 ، 5)$ عبر عن $\overrightarrow{حـ} = (12 ، 1)$ بدلالة : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحـل

نفرض أن : $\overrightarrow{حـ} = ك\overrightarrow{أ} + ل\overrightarrow{ب}$ حيث : ك ، ل $\in$ ح

$\therefore \overrightarrow{حـ} = ك(2 ، -3) + ل(3 ، 5) = (2ك ، -3ك) + (3ل ، 5ل)$

$= (2ك + 3ل ، -3ك + 5ل)$

∴ (٢ ك + ٣ ل ، −٣ ك + ٥ ل) = (١٢ ، ١)

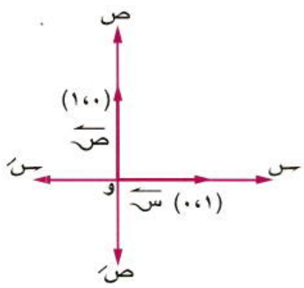
∴ ٢ ك + ٣ ل = ١٢ وبضرب المعادلة × ٣ ∴ ٦ ك + ٩ ل = ٣٦ (١)

، −٣ ك + ٥ ل = ١ وبضرب المعادلة × ٢ ∴ −٦ ك + ١٠ ل = ٢ (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ١٩ ل = ٣٨ ∴ ل = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٦ ك = ١٨ ومنها ك = ٣ ∴ $\overleftarrow{ح}$ = ٣ $\overleftarrow{أ}$ + ٢ $\overleftarrow{ب}$

متجها الوحدة الأساسيان $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$



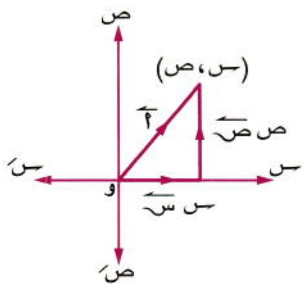
إذا كان لدينا نظام إحداثى متعامد فى المستوى ، (و) نقطة الأصل فإن :

١ متجه الوحدة الأساسى $\overleftarrow{س}$ = (١ ، ٠) هو متجه الموضع للنقطة (١ ، ٠) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢ متجه الوحدة الأساسى $\overleftarrow{ص}$ = (٠ ، ١) هو متجه الموضع للنقطة (٠ ، ١) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

* **لاحظ أن** ‖ $\overleftarrow{س}$ ‖ = ‖ $\overleftarrow{ص}$ ‖ = ١

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :



إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ متجهًا فى المستوى حيث $\overleftarrow{أ}$ = (س ، ص)

فإنه يمكن التعبير عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين كالتالى :

$\overleftarrow{أ}$ = (س ، ص) = (س ، ٠) + (٠ ، ص) (من تعريف الجمع)

= س (١ ، ٠) + ص (٠ ، ١) (من تعريف الضرب فى عدد حقيقى)

∴ $\boxed{\overleftarrow{أ} = س \overleftarrow{س} + ص \overleftarrow{ص}}$

وتستخدم هذه القاعدة مباشرة للتعبير عن الزوج المرتب الذى يمثل $\overleftarrow{أ}$ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$

فمثلًا $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ٣) = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = (−٥ ، ١) = −٥ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$

مثال ٦

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره :

١ $\overleftarrow{أ}$ = (−٨ ، ٦)

٢ $\overleftarrow{ل}$ = (٠ ، −٢)

٣ $\overleftarrow{م}$ = ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

٤ $\overleftarrow{ح}$ = (٢ ، −٦)

الحل

1️⃣ $\overleftarrow{أ} = -8\ \overleftarrow{س} + 6\ \overleftarrow{ص}$ ∴ $\|\overleftarrow{أ}\| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = 10$ وحدة طول.

2️⃣ $\overleftarrow{ل} = -2\ \overleftarrow{ص}$ ∴ $\|\overleftarrow{ل}\| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = 2$ وحدة طول.

3️⃣ $\overleftarrow{م} = \frac{3}{2}\ \overleftarrow{س}$ ∴ $\|\overleftarrow{م}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (0)^2} = \frac{3}{2}$ وحدة طول.

4️⃣ $\overleftarrow{حـ} = 2\ \overleftarrow{س} - 6\ \overleftarrow{ص}$ ∴ $\|\overleftarrow{حـ}\| = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}$ وحدة طول.

حاول بنفسك

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره :

1️⃣ $\overleftarrow{أ} = (7 ، -24)$

2️⃣ $\overleftarrow{ء} = (-6 ، 0)$

3️⃣ $\overleftarrow{ل} = (0 ، -12)$

4️⃣ $\overleftarrow{هـ} = (-12 ، -16)$

مثال 7

اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والإحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

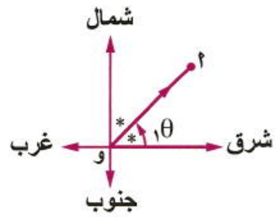
1️⃣ قوة مقدارها 12 نيوتن تؤثر فى اتجاه الشمال الشرقى.

2️⃣ سرعة منتظمة لسيارة تقطع 8 أمتار كل ثانية فى اتجاه 30° شمال الغرب.

3️⃣ إزاحة جسم مسافة 24 مترًا فى اتجاه الشمال.

4️⃣ قوة مقدارها 4 ثقل كجم تؤثر فى اتجاه 30° شرق الجنوب.

الحل



1️⃣ نفرض أن متجه الموضع للقوة = $\overleftarrow{أ}$

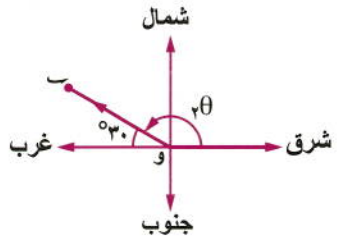
∵ اتجاه الشمال الشرقى ينصف الزاوية بين الشمال والشرق.

∴ $\theta_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

* الصورة القطبية $\overleftarrow{أ} = (12 ، 45^\circ)$

* الصورة الإحداثية $\overleftarrow{أ} = (12$ جتا 45° ، 12 جا $45^\circ) = (6\sqrt{2} ، 6\sqrt{2})$

* $\overleftarrow{أ} = 6\sqrt{2}\ \overleftarrow{س} + 6\sqrt{2}\ \overleftarrow{ص}$



2️⃣ نفرض أن متجه الموضع للسرعة = $\overleftarrow{ب}$

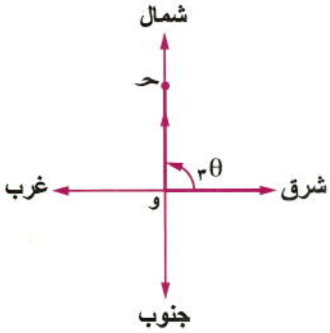
$\theta_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

* الصورة القطبية $\overleftarrow{ب} = (8 ، 150^\circ)$

* الصورة الإحداثية $\overleftarrow{ب} = (8$ جتا 150° ، 8 جا $150^\circ) = (-4\sqrt{3} ، 4)$

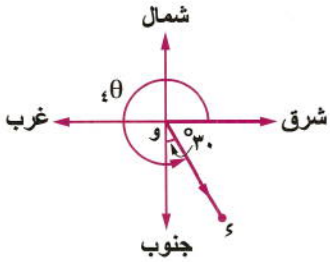
* $\overleftarrow{ب} = -4\sqrt{3}\ \overleftarrow{س} + 4\ \overleftarrow{ص}$

٣ نفرض أن متجه الموضع للإزاحة = $\overrightarrow{ح}$ ∴ $\theta_{٣}$ = ٩٠°



* الصورة القطبية $\overrightarrow{ح}$ = (٢٤ ، ٩٠°)
* الصورة الإحداثية $\overrightarrow{ح}$ = (٢٤ جتا ٩٠° ، ٢٤ جا ٩٠°) = (صفر ، ٢٤)
* $\overrightarrow{ح}$ = ٢٤ $\overrightarrow{ص}$

٤ نفرض أن متجه الموضع للقوة = $\overrightarrow{ء}$



∴ $\theta_{٤}$ = ٢٧٠° + ٣٠° = ٣٠٠°
* الصورة القطبية $\overrightarrow{ء}$ = (٤ ، ٣٠٠°)
* الصورة الإحداثية $\overrightarrow{ء}$ = (٤ جتا ٣٠٠° ، ٤ جا ٣٠٠°) = (٢ ، −٢ $\sqrt{٣}$)
* $\overrightarrow{ء}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

حاول بنفسك

اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والإحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

١ قوة مقدارها ٦٣ نيوتن تؤثر على الجسم فى اتجاه الشرق.

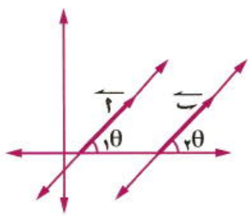
٢ إزاحة جسم مسافة ٣ أمتار فى اتجاه الجنوب.

٣ سرعة منتظمة لسيارة تقطع ٥٠ مترًا كل ثانية فى اتجاه الشمال الغربى.

توازى متجهين وتعامدهما

* لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين حيث : $\overrightarrow{أ}$ = ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، $\overrightarrow{ب}$ = ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$)

١ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$



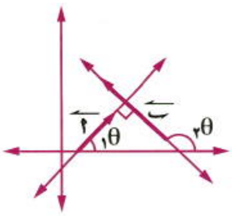
فإن : ظا $\theta_{١}$ = ظا $\theta_{٢}$

∴ $\frac{ص_{١}}{س_{١}} = \frac{ص_{٢}}{س_{٢}}$

∴ $\boxed{س_{١}\, ص_{٢} - س_{٢}\, ص_{١} = ٠}$

والعكس صحيح.

٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$



فإن : ظا $\theta_{١}$ × ظا $\theta_{٢}$ = −١

∴ $\frac{ص_{١}}{س_{١}} \times \frac{ص_{٢}}{س_{٢}} = -١$

∴ $\boxed{س_{١}\, س_{٢} + ص_{١}\, ص_{٢} = ٠}$

والعكس صحيح.

فمثلًا **إذا كان :** أ = (٣ ، ٤) ، ب = (٨ ، −٦) ، حـ = (٩ ، ١٢)

فإن : أ ⊥ ب **لأن :** [٣ × ٨ + ٤ × (−٦) = صفر]

، أ // حـ **لأن :** [٣ × ١٢ − ٤ × ٩ = صفر]

* **لاحظ أن** ميل أ = $\frac{٤}{٣}$ ، ميل ب = $\frac{-٦}{٨}$ = $\frac{-٣}{٤}$

، ميل حـ = $\frac{١٢}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ميل أ = ميل حـ

∴ أ // حـ ، ميل أ × ميل ب = −١ ∴ أ ⊥ ب

ملاحظة

إذا كان : أ = (س ، ص)

فإن : ميل أ = $\frac{ص}{س}$

مثال ٨

إذا كان : أ = (−٢ ، ٣) ، ب = (−٤ ، م) أوجد قيمة م فى كل مما يأتى :

١ أ // ب ٢ أ ⊥ ب

الحل

١ ∵ أ // ب ∴ −٢ م −٣ (−٤) = ٠

∴ ٢ م = ١٢ ∴ م = ٦

٢ ∵ أ ⊥ ب ∴ (−٢) (−٤) + ٣ × م = ٠

∴ ٣ م = −٨ ∴ م = $\frac{-٨}{٣}$

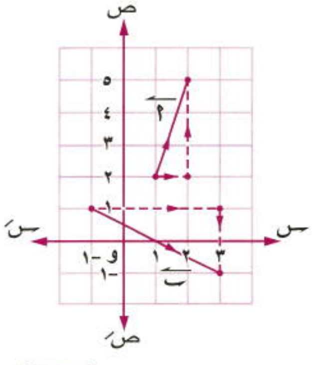
مثال ٩

أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) هى نقطة الأصل ثم مثل عليه كلاً مما يأتى :

١ المتجه أ = (١ ، ٣) بقطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة (١ ، ٢)

٢ المتجه ب = (٤ ، −٢) بقطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة (−١ ، ١) ثم أوجد إحداثيى نقطة النهاية فى كل حالة.

الحل



١ لتمثيل المتجه أ = (١ ، ٣)

* نبدأ من النقطة (١ ، ٢) ثم نتحرك يمينًا وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* ثم نتحرك لأعلى ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

∴ نقطة النهاية = (٢ ، ٥)

٢ لتمثيل المتجه $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، −٢)

* نبدأ من النقطة (−١ ، ١) ثم نتحرك يمينًا ٤ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.
* ثم نتحرك لأسفل وحدتين فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.

∴ نقطة النهاية = (٣ ، −١)

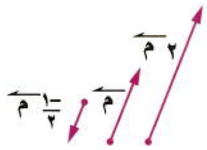
ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{م}$ متجهًا غير صفرى ، ك ≠ ٠ فإن : $\overrightarrow{م}$ // ك $\overrightarrow{م}$ ويكون ‖ ك $\overrightarrow{م}$ ‖ = | ك | . ‖ $\overrightarrow{م}$ ‖

حيث اتجاه ك $\overrightarrow{م}$ هو نفس اتجاه $\overrightarrow{م}$ لكل ك > ٠ ، اتجاه ك $\overrightarrow{م}$ هو عكس اتجاه $\overrightarrow{م}$ لكل ك < ٠

فمثلًا • $\overrightarrow{م}$ ، ٢ $\overrightarrow{م}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه.

• $\overrightarrow{م}$ ، $-\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{م}$ متوازيان وفى اتجاهين متضادين.



مثال ١٠

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى أوجد قيمة ك فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ ك ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ −٢ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ٢ ‖ ٢ ك $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ −٣ $\overrightarrow{أ}$ ‖

الحل

١ ∵ ك ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ −٢ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ∴ ك ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٢ ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ∴ ك = ٢

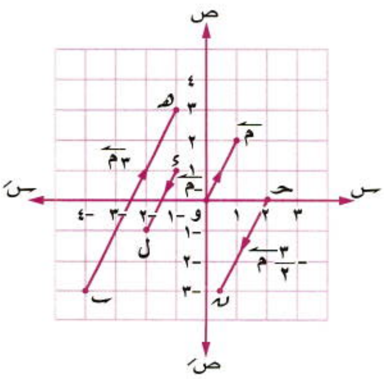
٢ ∵ ‖ ٢ ك $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ −٣ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ∴ | ٢ ك | ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٣ ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ∴ ٢ | ك | = ٣

∴ | ك | = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ك = ± $\frac{٣}{٢}$

مثال ١١

ارسم المتجه $\overrightarrow{م}$ = (١ ، ٢) ثم ارسم من النقط : ب(−٤ ، −٣) ، حـ(٢ ، ٠) ، ء(−١ ، ١) القطع المستقيمة الموجهة والتى تكافئ ٣ $\overrightarrow{م}$ ، $-\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{م}$ ، − $\overrightarrow{م}$ على الترتيب.

الحل



١ نرسم المتجه $\overrightarrow{م}$ = (١ ، ٢) بداية من النقطة (٠ ، ٠)

٢ نرسم المتجه ٣ $\overrightarrow{م}$ = ٣ (١ ، ٢) = (٣ ، ٦)

بداية من النقطة ب (−٤ ، −٣)

٣ نرسم المتجه $-\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{م}$ = $-\frac{٣}{٢}$ (١ ، ٢) = ($-\frac{٣}{٢}$ ، −٣)

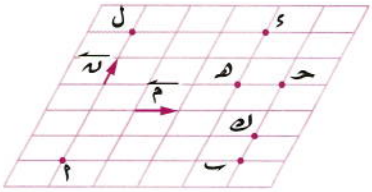
بداية من النقطة حـ (٢ ، ٠)

٤ نرسم المتجه − $\overrightarrow{م}$ = (−١ ، −٢) بداية من النقطة ء (−١ ، ١)

مثال ١٢

الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة ، عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$:

١ $\overrightarrow{أ ب}$	٢ $\overrightarrow{حـ ب}$	٣ $\overrightarrow{حـ هـ}$
٤ $\overrightarrow{ب حـ}$	٥ $\overrightarrow{ب أ}$	٦ $\overrightarrow{ك حـ}$
٧ $\overrightarrow{ء ل}$	٨ $\overrightarrow{ء هـ}$	٩ $\overrightarrow{ل أ}$



الحـل

١ $٤ \overrightarrow{م}$	٢ $-٣ \overrightarrow{ن}$	٣ $- \overrightarrow{م}$
٤ $٣ \overrightarrow{ن}$	٥ $-٤ \overrightarrow{م}$	٦ $٢ \overrightarrow{ن}$
٧ $-٣ \overrightarrow{م}$	٨ $-٢ \overrightarrow{ن}$	٩ $-٥ \overrightarrow{ن}$

مـلاحظـة

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان $\overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{ب}$ ، $ك \neq$ صفر فإن : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

فمثلًا إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١٥ ، ١٠)$

$\therefore \overrightarrow{ب} = ٥ (٣ ، ٢) = ٥ \overrightarrow{أ}$ $\therefore \overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

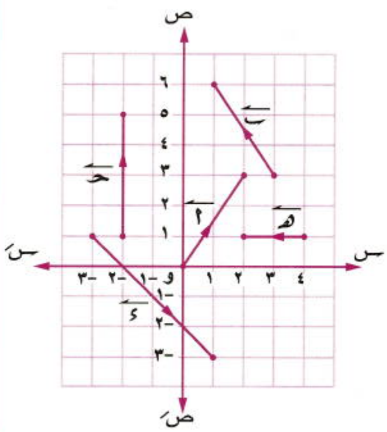
حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

تمثيل لبعض المتجهات فى المستوى المتعامد

اكتب كلًا من المتجهات الآتية بدلالة متجهى

الوحدة الأساسيين :



١ $\overrightarrow{أ}$	٢ $\overrightarrow{ب}$	٣ $\overrightarrow{حـ}$
٤ $\overrightarrow{ء}$	٥ $\overrightarrow{هـ}$	

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، −١٢) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ...

(أ) ١٣ (ب) −٧ (جـ) ١٧ (د) ٧

(٢) كل المتجهات الآتية هى متجهات وحدة ما عدا ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠,٦ ، ٠,٨) (جـ) (٠ ، −١) (د) (١ ، ١)

(٣) إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٣ ، م) متجهين متعامدين فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٨ (د) −٤,٥

(٤) 📖 إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (−٣ ، ك) متوازيين فإن : ك = ...

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $-\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢٠ ، ١٦) فإن : المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ....

(أ) متعامدان. (ب) متوازيان. (جـ) متكافئان. (د) غير ذلك.

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ك ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ − $\overrightarrow{\text{ص}}$ وكان : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ± ١ (د) صفر

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ك ، ٩) يوازى $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٤ ، ٣) فإن : ك = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −١٢ (د) ١٢

(٨) 📖 إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، −٢) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، ٦) فإن : $\|-٢\,\overrightarrow{\text{أ}} + ٣\,\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(١٠) إذا كان : أ = (−٣ ، ٤) ، ب = (٢ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ...

(أ) (−١ ، ٥) (ب) (−٤ ، ٩) (جـ) (١ ، ٦) (د) (١ ، ٥)

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٨ ، ١٦) ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، ١٢) فإن : $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) ٨ $\sqrt{٥}$

(١٢) إذا كان : ٢ (٣ ، ص) + ٣ (س ، -٢) = (٣ ، ٢) فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٣) إذا كان : $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، ٤) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٤ ، ٣) ، ٢ $\overrightarrow{أ}$ - ٣ $\overrightarrow{ب}$ = ٤ $\overrightarrow{حـ}$

فإن : ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ٧

(١٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، -٦) ، ٣ ($\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$) = ٧ $\overrightarrow{ب}$ - ٢ $\overrightarrow{أ}$ فإن : $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) (٢ ، -٣) (ب) (-٢ ، ٣) (جـ) (-٢ ، -٣) (د) (٢ ، ٣)

(١٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (٦ ، ٨) ، - $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، ٤) فإن : $\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) (٢ ، -٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٤ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(١٦) إذا كان : ٧ $\overrightarrow{أ}$ + ٥ $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٣٣ $\overrightarrow{ص}$ ، ٣ $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ = -٩ $\overrightarrow{س}$ + ١١ $\overrightarrow{ص}$

فإن : ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ...

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) ٢ $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{٣٤}$ (د) $\sqrt{٤٢}$

(١٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ك $\overrightarrow{ص}$ وكان : ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٥ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) ± ٤ (د) ٢

(١٨) إذا كان : ‖ ٣ ك $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ -١٥ $\overrightarrow{أ}$ ‖ فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ± ٥ (د) ١٥

(١٩) إذا كان : ‖ -٨ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٥ ‖ ك $\overrightarrow{أ}$ ‖ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٨}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٨}$ (جـ) ± $\frac{٨}{٥}$ (د) ± $\frac{٥}{٨}$

(٢٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، م) ، $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{ب}$ فإن : ك + م = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) ٣

(٢١) إذا كان : ك ‖ ٤ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ -٣ $\overrightarrow{أ}$ ‖ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٤}$ (د) ± $\frac{٣}{٤}$

(٢٢) إذا كان : ‖ ك (٣ ، ٤) ‖ = ١ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٢٥}$ (جـ) ± $\frac{١}{٥}$ (د) ± ٥

(٢٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = -٧ $\overrightarrow{ب}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ (جـ) ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ $\overrightarrow{ب}$ ‖ (د) ٧ $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$

(٢٤) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٣$ ، $-١ \leq ك \leq ٢$ فإن : $\|ك\,\overrightarrow{أ}\| \in$ ....

(أ) [−٣ ، ٦] (ب) [٠ ، ٦] (جـ) [١ ، ٢] (د) [٣ ، ٦]

(٢٥) $\overrightarrow{أ} = ٢\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها θ حيث ....

(أ) ظا $\theta = \frac{٢}{٣}$ (ب) ظا $\theta = \frac{٣}{٢}$ (جـ) جا $\theta = \frac{٢}{٣}$ (د) جتا $\theta = \frac{٣}{٢}$

(٢٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = \left(٦\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤}\right)$ متجه موضع لنقطة أ فإن : أ = ...

(أ) (٦ ، −٦) (ب) (−٦ ، ٦) (جـ) (٦ ، ٦) (د) (−٦ ، −٦)

(٢٧) المتجه $\overrightarrow{م} = \left(٨\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right)$ يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين بالصورة ....

(أ) $٤\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}$ (ب) $٨\,\overrightarrow{س} - ٨\,\overrightarrow{ص}$

(جـ) $-٤\,\overrightarrow{س} - ٨\,\overrightarrow{ص}$ (د) $٨\,\overrightarrow{س} + ٨\,\overrightarrow{ص}$

(٢٨) الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ} = -٣\,\overrightarrow{ص}$ هى ....

(أ) $\left(-٣ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (ب) $\left(٣ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (جـ) $\left(-٣ ، \frac{٣\pi}{٢}\right)$ (د) $\left(٣ ، \frac{٣\pi}{٢}\right)$

(٢٩) الصورة القطبية للمتجه $\left(٦ ، ٦\sqrt{٣}\right)$ هى ....

(أ) $\left(١٢ ، \frac{\pi}{٣}\right)$ (ب) $\left(١٢ ، \frac{\pi}{٦}\right)$ (جـ) $\left(٦ ، \frac{\pi}{٣}\right)$ (د) $\left(٦ ، \frac{\pi}{٦}\right)$

(٣٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١٠ ، \theta)$ حيث جا $\theta = \frac{٣}{٥}$ متجه موضع لنقطة أ فإن : أ = ...

(أ) (٦ ، ٨) أ، (٦ ، −٨) (ب) (٨ ، ٦) أ، (−٨ ، ٦)

(جـ) (٦ ، ٨) أ، (٨ ، ٦) (د) (−٨ ، ٦) ، (٦ ، −٨)

(٣١) فى الشكل المقابل :

$\|\overrightarrow{أ}\| = ٤$ وحدة طول

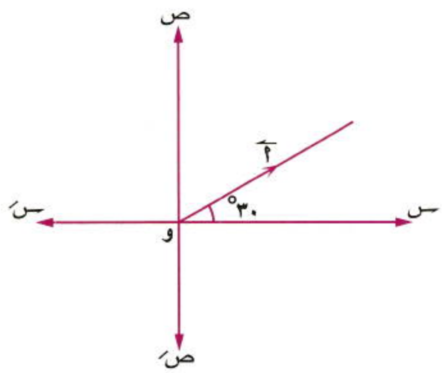
فإن : $\overrightarrow{أ} =$ ....

(أ) $\left(٢ ، ٢\sqrt{٣}\right)$

(ب) $\left(٢\sqrt{٣} ، ٢\right)$

(جـ) $\left(٤ ، \sqrt{٣}\right)$

(د) $\left(\sqrt{٣} ، ٢\right)$



(٣٢) إذا كان معيار المتجه $\overrightarrow{أ}$ يساوى ٧ فإن معيار المتجه $-٢\,\overrightarrow{أ}$ يساوى ....

(أ) ٧ (ب) −٢ (جـ) ١٤ (د) −١٤

(٣٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، $\frac{\pi}{٤}$) فإن : ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ...

(أ) (٦ ، $\frac{\pi}{٢}$) (ب) (٦ ، $\frac{\pi}{٤}$) (جـ) (٣ ، $\frac{\pi}{٢}$) (د) (٣ ، $\frac{\pi}{٤}$)

(٣٤) إذا كان : $\overrightarrow{\text{ل}}$ = (٢ ، −٣) ، $\overrightarrow{\text{ك}}$ = (٣ ، ١ − س) متوازيين فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١١}{٢}$ (جـ) −١ (د) −٩

(٣٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ص) وكان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ....

(أ) س + ٢ ص = ٠ (ب) س = ٢ ص (جـ) س ص = ٨ (د) $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ٢

(٣٦) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، −١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (ك ، ١٥) والمتجهان $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ متوازيين

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٧) إذا كان المتجهان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (م ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = م $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ متعامدين

فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) −٤

(٣٨) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ متجه غير صفرى فإن : ....

(أ) −$\overrightarrow{\text{أ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أ}}$

(ب) −$\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ لهما نفس الاتجاه.

(جـ) ‖−$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ > ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖

(د) −$\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ لهما اتجاهين متضادين.

(٣٩) أى أزواج المتجهات الآتية تكون متعامدة ؟

(أ) (٣ ، ٠) ، (٢ ، −١) (ب) (−٢ ، ٥) ، (٤ ، −١٠)

(جـ) (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢) (د) (١ ، −٤) ، (٢ ، −٨)

(٤٠) أى من أزواج المتجهات الآتية ليسا متضادين ؟

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ٠) (ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، −١)

(جـ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، −٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، −٥) (د) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، −١)

(٤١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ متجه غير صفرى ، ك ∈ ح* وكان : ‖ك $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ١ فإن : ك = ...

(أ) ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ (ب) ١ (جـ) ± $\frac{١}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$ (د) $\frac{١}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$

(٤٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{جـ}}$ حيث $\overrightarrow{\text{جـ}}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فإن : ك = ...

(أ) ± ١ (ب) ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ (جـ) ± ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ (د) $\frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$

(٤٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ك} ، ٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ح}} = (\text{م} ، -٤)$

وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ح}}$ فإن : $\frac{\text{ك}}{\text{م}} =$ ....

(أ) −٦　　(ب) −٢　　(جـ) ٣　　(د) −٣

(٤٤) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ح}} = \left(٥ ، \frac{\pi}{١٨}\right)$

فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\| + \|\overrightarrow{\text{ح}}\| =$ ....

(أ) ٩　　(ب) ١٠　　(جـ) ١١　　(د) ١٢

(٤٥) المتجه الذى يعبر عن السرعة المنتظمة لسيارة ٦ كم/س وتسير فى اتجاه الشمال الغربى = ...

(أ) $٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$　　(ب) $٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(جـ) $-٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$　　(د) $-٦\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٦\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(٤٦) المتجه الذى يعبر عن إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الجنوب الشرقى هو ....

(أ) $٢٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٢٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$　　(ب) $-٢٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٢٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(جـ) $-٢٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٢٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$　　(د) $٢٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٢٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(٤٧) إذا كان معيار القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ١٠$ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق　فإن : $\overrightarrow{\text{ق}} =$ ....

(أ) $٥\sqrt{٣}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٥\,\overrightarrow{\text{ص}}$　　(ب) $٥\,\overrightarrow{\text{س}} + ٥\sqrt{٣}\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(جـ) $٥\sqrt{٣}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٥\,\overrightarrow{\text{ص}}$　　(د) $-٥\sqrt{٣}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٥\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(٤٨) سفينة تقطع مسافة $١٠\sqrt{٣}$ كم شمالاً ثم ١٠ كم غربًا فإن الإزاحة = ... فى الصورة القطبية.

(أ) $\left(٢٠ ، \frac{\pi}{٦}\right)$　　(ب) $\left(٢٠ ، \frac{٢\pi}{٣}\right)$　　(جـ) $\left(٢٠ ، \frac{٥\pi}{٦}\right)$　　(د) $\left(٢٠ ، \frac{٧\pi}{٦}\right)$

(٤٩) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ك} ، \text{ك} + ٣)$ ، $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٣\sqrt{٥}$ وحدة طولية

فإن : إحدى قيم ك هى ....

(أ) −٣　　(ب) صفر　　(جـ) ٣　　(د) ٦

(٥٠) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

فإن المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدان إذا كان : ....

(أ) $\text{س}_1\,\text{ص}_2 - \text{س}_2\,\text{ص}_1 = ٠$　　(ب) $\text{س}_1\,\text{س}_2 - \text{ص}_1\,\text{ص}_2 = ٠$

(جـ) $\frac{\text{س}_1\,\text{س}_2}{\text{ص}_1\,\text{ص}_2} = -١$　　(د) $\frac{\text{س}_1\,\text{ص}_2}{\text{س}_2\,\text{ص}_1} = ١$

(٥١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ ، $\overrightarrow{\text{ح}} = (\text{س}_3 ، \text{ص}_3)$

وكان : $\text{س}_1\,\text{س}_2 + \text{ص}_1\,\text{ص}_2 = \text{س}_1\,\text{س}_3 + \text{ص}_1\,\text{ص}_3 =$ صفر فإن : $\text{س}_2\,\text{ص}_3 =$ ....

(أ) صفر　　(ب) $\text{س}_1\,\text{ص}_2$　　(جـ) $\text{ص}_2\,\text{س}_3$　　(د) $\text{س}_2\,\text{ص}_1$

(٥٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−١ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٧) ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ = (٧ ، ١٢) فإن : $\overrightarrow{\text{ج}}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ (د) ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$

(٥٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\left(٢\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\left(٢\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤}\pi\right)$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

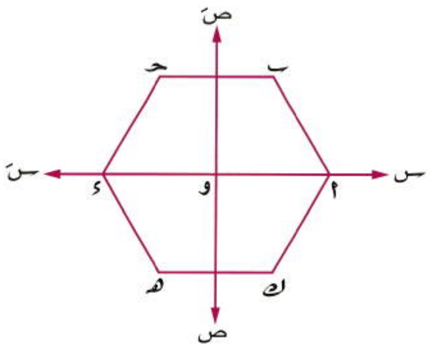
(أ) $\left(٤\sqrt{٢} ، \pi\right)$ (ب) (٤ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٠) (د) $\left(٤ ، \frac{\pi}{٢}\right)$

(٥٤) المتجهان $\left(٤\sqrt{٣} ، \frac{\pi}{٦}\right)$ ، $\left(٤\sqrt{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right)$ يكونان ....

(أ) متكافئان. (ب) متوازيان.

(جـ) متعامدان. (د) متساويان فى المقدار ومتضادان فى الاتجاه.

(٥٥) **فى الشكل المقابل :**



أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم مركزه نقطة الأصل

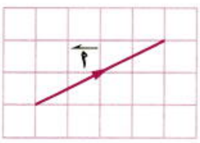
وطول ضلعه ٥ وحدات طولية

فإن : $\overrightarrow{\text{و هـ}}$ = ...

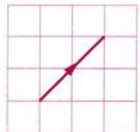
(أ) $\left(-٥ ، \frac{\pi}{٣}\right)$ (ب) $\left(-٥ ، \frac{٤}{٣}\pi\right)$

(جـ) $\left(٥ ، \frac{٤}{٣}\pi\right)$ (د) $\left(٥ ، \frac{\pi}{٣}\right)$

(٥٦) إذا كان الشكل المقابل يمثل $\overrightarrow{\text{أ}}$

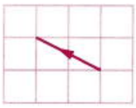


أى الأشكال الآتية يمثل المتجه $-\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ}}$

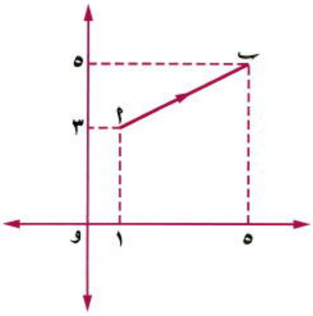

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

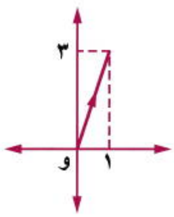
(٥٧) **فى الشكل المقابل :**

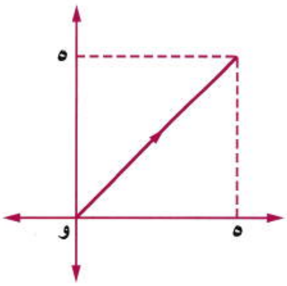


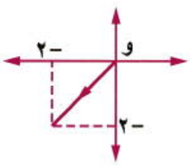
أ = (١ ، ٣) ، ب = (٥ ، ٥)

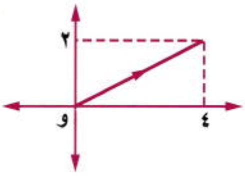
فإن الشكل الذى يمثل $\overrightarrow{\text{أ ب}}$

هو ....


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٧)$ أوجد :

(١) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ (٢) $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ (٣) $٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$

---

٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ح} = (٧ ، ١)$ فأوجد :

(١) $\|\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ح}\|$ «١٧» | (٢) $\|٥\overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{أ}\|$ «$\sqrt{١٩٧}$»

(٣) $\|\overrightarrow{أ} - \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب}\|$ «$٤\sqrt{٢}$» | (٤) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{ح}\|$ «١٣»

---

٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$ أوجد :

(١) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ | (٢) $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ | (٣) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

(٤) $٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب}$ | (٥) $\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$ | (٦) $-٣\overrightarrow{أ}$

---

٤ عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ، ثم أوجد معيار كل منها :

(١) $\overrightarrow{م} = (-٤ ، -٣)$ | (٢) $\overrightarrow{ن} = (٨ ، -٦)$ | (٣) $\overrightarrow{ق} = (-٥ ، -١٢)$

(٤) $\overrightarrow{أ} = (٠ ، ٢\sqrt{٢})$ | (٥) $\overrightarrow{ب} = (-٣\sqrt{٣} ، ٠)$ | (٦) $\overrightarrow{ح} = (\sqrt{٢} ، -٣\sqrt{٢})$

---

٥ أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات الآتية :

(١) $\overrightarrow{م} = ٨\sqrt{٣}\,\overrightarrow{س} + ٨\,\overrightarrow{ص}$ | (٢) $\overrightarrow{ن} = ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{س} + ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{ص}$

(٣) $\overrightarrow{وأ} = (٥ ، ٥\sqrt{٣})$ | (٤) $\overrightarrow{ب} = (٧\sqrt{٣} ، -٧)$

(٥) $\overrightarrow{ح} = -٤\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$

---

٦ إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل أوجد إحداثيى النقطة أ فى كل مما يأتى :

(١) $\overrightarrow{وأ} = (١٢\sqrt{٣} ، ٦٠^\circ)$ | (٢) $\overrightarrow{وأ} = (٥\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤})$

(٣) $\overrightarrow{وأ} = (٢٤ ، ١٥٠^\circ)$ | (٤) $\overrightarrow{وأ} = (٦ ، \frac{٥\pi}{٣})$

---

٧ أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى :

(١) س $(-٦ ، ص) = (٣ ، ٥)$ | (٢) $(س ، -٣) - (٥ ، ٠) = (٢ ، ص)$

(٣) $(٣ ، ص) + س\,(١ ، -٢) - (-٤ ، ١) = \overrightarrow{٠}$ | (٤) س $(٢ ، ٣) +$ ص $(-٣ ، ١) = (-٤ ، ٥)$

٨ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٦ ، -٨)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٩ ، ١٢)$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}} = (-٤ ، -٣)$

(١) أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \perp \overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}} \perp \overrightarrow{\text{أ}}$

(٢) أوجد : $٢\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} - ٢\overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} - ٣\overrightarrow{\text{حـ}}$

---

٩ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٢\sqrt{٣} ، -٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، \sqrt{٣})$

اذكر العلاقة بين المتجهين : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ مع ذكر السبب.

---

١٠ إذا كان : $\overrightarrow{\text{م}} = ٢\,\overline{\text{س}} + ٣\,\overline{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}} = -٨\,\overline{\text{س}} - ١٢\,\overline{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{ل}} = \text{أ}\,\overline{\text{س}} + ١٥\,\overline{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{و}} = ٦\,\overline{\text{س}} + \text{ب}\,\overline{\text{ص}}$

(١) أثبت أن : $\overrightarrow{\text{م}} \,//\, \overrightarrow{\text{ن}}$

(٢) أوجد : أ $\in$ ح إذا كان : $\overrightarrow{\text{ن}} \,//\, \overrightarrow{\text{ل}}$

(٣) أوجد قيمة : $٤\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$ ، $٤(\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}})$

(٤) أوجد : ب $\in$ ح إذا كان : $\overrightarrow{\text{و}} \perp \overrightarrow{\text{ن}}$

(٥) هل : $\overrightarrow{\text{و}} \perp \overrightarrow{\text{م}}$ ؟ فسر إجابتك.

---

١١ 📖 إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}} = (٠ ، ١١)$

(١) اكتب كلًا من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

$٢\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $٣\overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\frac{١}{٢}(\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}})$

(٢) عبر عن $\overrightarrow{\text{حـ}}$ بدلالة : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

---

١٢ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٤ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}} = (٢ ، ٢١)$

(١) أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين كلًا من : $\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\frac{١}{٢}(\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}})$

(٢) عبر عن $\overrightarrow{\text{حـ}}$ بدلالة : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

---

١٣ إذا كان : $\overrightarrow{\text{حـ}} = (٤ ، -١)$ ، $\overrightarrow{\text{ء}} = (-٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}} = (-٥ ، ١)$

أوجد المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ الذى يحقق المعادلة : $٢\overrightarrow{\text{أ}} = ٢\overrightarrow{\text{حـ}} - ٣\overrightarrow{\text{ء}} + ٢\overrightarrow{\text{هـ}}$ «$(\frac{٧}{٢} ، -٣)$»

---

١٤ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٧ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}} = ٢\,\overline{\text{س}} + ٣\,\overline{\text{ص}}$

(١) أثبت أن : المتجه $\overrightarrow{\text{ل}} = ٢\overrightarrow{\text{حـ}} + ٣\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ يوازى المتجه $\overrightarrow{\text{م}} = ٣\,\overline{\text{س}} - ٨\,\overline{\text{ص}}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{ل}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{م}}$ أوجد : ك «-٣»

١٥ في مستوى إحداثي متعامد ، إذا كان : $\overleftarrow{ل} = ٥ \overleftarrow{س} - ٣\sqrt{٣}\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{م} = -\overleftarrow{س} - ٢\sqrt{٣}\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ن} = -٢\overleftarrow{س} + \sqrt{٣}\overleftarrow{ص}$

أوجد $\overleftarrow{ح}$ فى الصورة القطبية حيث : $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ل} + \overleftarrow{م} + ٣\overleftarrow{ن}$ «(٤ ، ٢٤٠°)»

---

١٦ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :

(١) قوة مقدارها ٣٧ نيوتن تؤثر على جسم وتعمل فى اتجاه الشمال.

(٢) سرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س فى اتجاه الغرب.

(٣) سرعة منتظمة لسيارة تقطع ٧٥ كم كل ساعة فى اتجاه الشرق.

(٤) إزاحة جسم مسافة ٢٥ مترًا فى اتجاه الجنوب.

(٥) متجه معياره ٦ وحدات ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٦) إزاحة جسم مسافة ١٥٠ سم فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

(٧) قوة مقدارها ٢٠ ث كجم تؤثر على جسم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

(٨) إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الشمال الغربى.

---

١٧ أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط على استقامة واحدة مرتبه من اليمين إلى اليسار حيث أب : ب حـ : حـ ء = ٢ : ٣ : ٥

ضع العدد المناسب مكان النقط فيما يلى علمًا بأن الرمز « = » يعنى تكافؤ :

(١) $\overleftarrow{أب} = \dots\dots\dots \overleftarrow{ب حـ}$

(٢) $\overleftarrow{حـ ب} = \dots\dots\dots \overleftarrow{أب}$

(٣) $\overleftarrow{حـ ء} = \dots\dots\dots \overleftarrow{أب}$

(٤) $\overleftarrow{أ حـ} = \dots\dots\dots \overleftarrow{ء حـ}$

(٥) $\overleftarrow{ب حـ} = \dots\dots\dots \overleftarrow{حـ ء}$

(٦) $\overleftarrow{حـ ء} = \dots\dots\dots \overleftarrow{أ حـ}$

(٧) $\overleftarrow{ب ء} = \dots\dots\dots \overleftarrow{ب أ}$

(٨) $\overleftarrow{حـ ء} = \dots\dots\dots \overleftarrow{حـ ب}$

(٩) $\overleftarrow{أ ء} = \dots\dots\dots \overleftarrow{حـ أ}$

---

١٨ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص}$ أوجد :

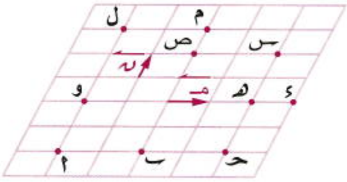
(١) قيمة ك التى تجعل المتجه ($\overleftarrow{أ} + ك\overleftarrow{ب}$) يوازى المتجه $\overleftarrow{س}$

(٢) قيمة ل التى تجعل المتجه (ل $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$) يوازى المتجه $\overleftarrow{ص}$ «$-\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٢}$»

١٩ الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة.

عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ن}$:

(١) $\overleftarrow{أ ب}$	(٢) $\overleftarrow{ب ص}$	(٣) $\overleftarrow{هـ ح}$
(٤) $\overleftarrow{ء هـ}$	(٥) $\overleftarrow{س هـ}$	(٦) $\overleftarrow{س ص}$
(٧) $\overleftarrow{ص م}$	(٨) $\overleftarrow{ل م}$	(٩) $\overleftarrow{ب م}$
(١٠) $\overleftarrow{هـ و}$	(١١) $\overleftarrow{و ل}$	(١٢) $\overleftarrow{و ء}$

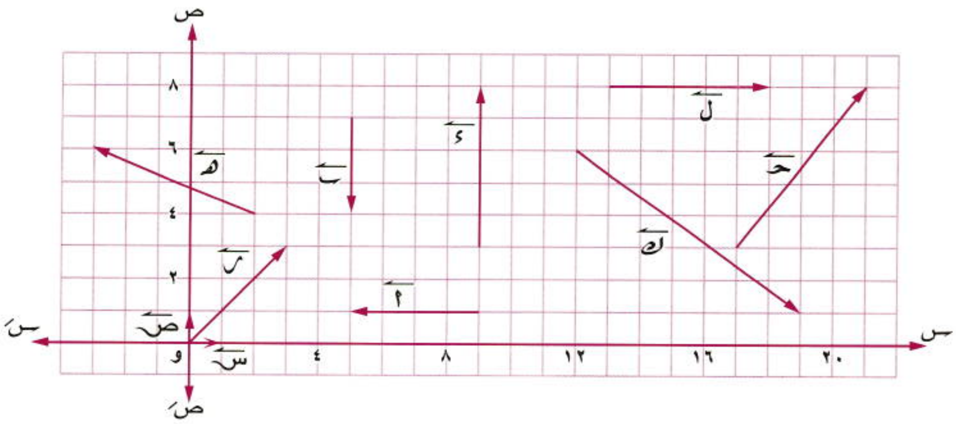


٢٠ أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) هى نقطة الأصل وعيِّن عليه متجه الموضع الممثل للمتجه $\overleftarrow{م}$ = (٢ ، ٣) ثم ارسم :

(١) قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة أ = (−٣ ، −٢) تمثل المتجه ٢ $\overleftarrow{م}$ وأوجد إحداثيى نقطة النهاية.

(٢) قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة ب = (٤ ، ٥) تمثل المتجه − $\overleftarrow{م}$ وأوجد إحداثيى نقطة النهاية.

٢١ يبين الشكل تمثيلًا لبعض المتجهات فى المستوى الإحداثى المتعامد :



اكتب كل متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ متجه وكان $\|\overleftarrow{أ}\|$ = ٤ فأى من المتجهات الآتية يكون متجه وحدة ؟

(أ) $\frac{١}{٢}\overleftarrow{أ}$ (ب) $-\overleftarrow{أ}$ (جـ) $-\frac{١}{٤}\overleftarrow{أ}$ (د) $\frac{٣}{٤}\overleftarrow{أ}$

(٢) إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ب}$ (ب) $\overleftarrow{أ} \,//\, \overleftarrow{ب}$ (جـ) $\|\overleftarrow{أ}\| = \|\overleftarrow{ب}\|$ (د) $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٢٠ $\overrightarrow{س}$ − ١٥ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٧ $\overrightarrow{س}$ + ٢٤ $\overrightarrow{ص}$

وكان $\overrightarrow{م}$ = $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{م}$ // $\overrightarrow{ن}$ (ب) $\overrightarrow{م}$ ⊥ $\overrightarrow{ن}$

(جـ) $\overrightarrow{م}$ = $\overrightarrow{ن}$ (د) ‖$\overrightarrow{م}$‖ = ‖$\overrightarrow{ن}$‖

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٧ $\overrightarrow{س}$ + ٢٤ $\overrightarrow{ص}$

فإن : المتجه الذى له نفس معيار $\overrightarrow{ب}$ ويوازى المتجه $\overrightarrow{أ}$ هو ....

(أ) ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢٠ $\overrightarrow{ص}$ (ب) ١٥ $\overrightarrow{س}$ + ١٠ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) ٢٠ $\overrightarrow{س}$ + ١٥ $\overrightarrow{ص}$ (د) ١٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢٠ $\overrightarrow{ص}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

وكان $\overrightarrow{أ}$ ⊥ (ك $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{حـ}$) فإن : ك = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) أى الجمل الآتية غير صحيح ؟

(أ) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ‖$\overrightarrow{ب}$‖ (ب) إذا كان : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ‖$\overrightarrow{ب}$‖ فإن : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$

(جـ) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ (د) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$

(٧) إذا كان : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ‖$\overrightarrow{ب}$‖ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ}$ = − $\overrightarrow{ب}$

(جـ) $\overrightarrow{أ}$ = ± $\overrightarrow{ب}$ (د) لا يمكن تحديد العلاقة بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

(٨) قياس الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{أ}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ هو ....

(أ) صفر (ب) °٣٠ (جـ) °٦٠ (د) °٩٠

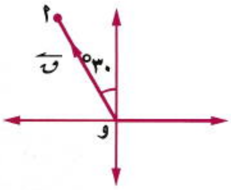
(٩) قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = −٤ $\overrightarrow{س}$ تساوى ....

(أ) °٤٥ (ب) °٦٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٥٠

(١٠) $\overrightarrow{أب}$ قطعة مستقيمة موجهة ، حـ نقطة فى مستويها ، حـ ∌ $\overrightarrow{أب}$ فإن عدد القطع المستقيمة الموجهة التى يمكن رسمها بحيث تكون بدايتها النقطة حـ ، وتكافئ $\overrightarrow{أب}$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

(١١) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overrightarrow{\text{و أ}}$ يمثل القوة $\overrightarrow{ق}$ ، $\|\overrightarrow{ق}\|$ = ١٢ وحدة

فأى العبارات الآتية لا يمثل متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ ؟

(أ) القوة $\overrightarrow{ق}$ معيارها ١٢ وحدة قوة وتعمل فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب

(ب) $\overrightarrow{ق}$ = (١٢ وحدة قوة ، ١٢٠°)

(جـ) $\overrightarrow{ق}$ = − ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

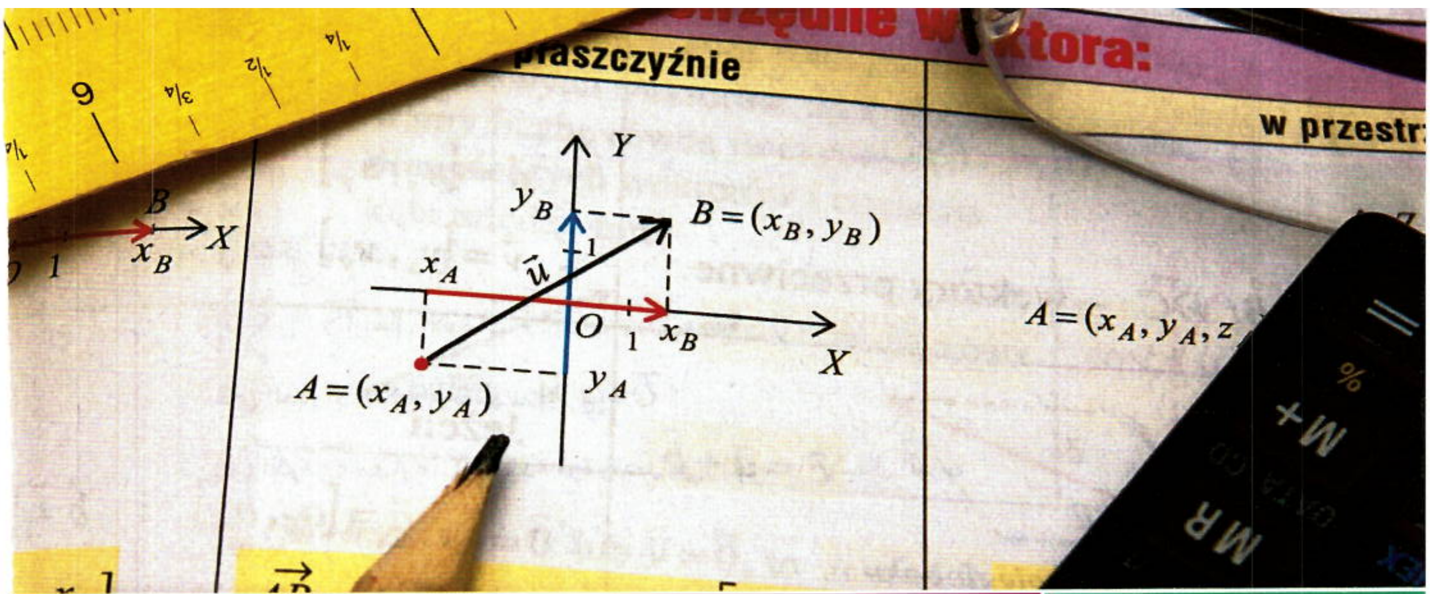
(د) القوة $\overrightarrow{ق}$ معيارها ١٢ وحدة قوة وتعمل فى اتجاة يصنع ٣٠° مع الشمال

(١٢) إذا كانت الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $(١٢ ، \frac{٢\pi}{٣})$ فإن الصورة القطبية للمتجه − $\overrightarrow{أ}$ هى ....

(أ) $(١٢ ، \frac{\pi}{٦})$ (ب) $(١٢ ، \frac{٢\pi}{٣})$ (جـ) $(٦ ، \frac{٤\pi}{٣})$ (د) $(١٢ ، \frac{٥\pi}{٣})$

(١٣) إذا دار متجه الموضع $\overrightarrow{أ}$ = $(\sqrt{٣} ، ١)$ حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٤٥° فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ بعد دورانه هى ....

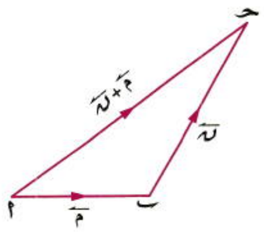
(أ) (٢ ، ٣٠°) (ب) (٢ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٧٥°) (د) (٤ ، ٧٥°)



الدرس 3 العمليات على المتجهــات

أولًا / جمع المتجهات هندسيًا

الطريقة الأولى (قاعدة المثلث «علاقة شال») :



إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$

حيث إن نقطة النهاية (ب) للمتجه الأول $\overleftarrow{\text{م}}$ هى

نفسها نقطة البداية للمتجه الثانى $\overleftarrow{\text{ن}}$

فإن $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}}+\overleftarrow{\text{ن}}$ **أى أن** $\overleftarrow{\text{أ ب}}+\overleftarrow{\text{ب ح}}=\overleftarrow{\text{أ ح}}$

أى أن الإزاحة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ متبوعة بإزاحة أخرى $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ تكافئ إزاحة وحيدة $\overleftarrow{\text{أ ح}}$

مثــال ١

إذا تحركت سفينة من الموقع (أ) فى الاتجاهات المعطاة حتى وصلت إلى الموقع (ب) ارسم مسار الرحلة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا أدواتك الهندسية ثم أوجد من الرسم مقدار واتجاه إزاحة السفينة ($\overleftarrow{\text{أ ب}}$)

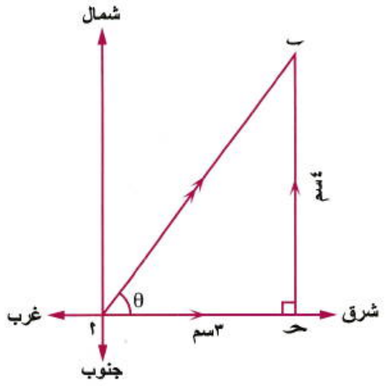
إذا كانت الاتجاهات هى :

١ مسافة ٦٠٠ متر شرقًا ثم مسافة ٨٠٠ متر شمالاً.

٢ مسافة ٢٠ كم غربًا ثم مسافة ٣٠ كم فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب.

الحــل

١ نفرض أن مقياس الرسم هو :



كل «٢٠٠ متر» فى الحقيقة تمثل بـ «١ سم» فى الرسم

∴ ٦٠٠ متر تمثل بـ ٣ سم ، ٨٠٠ متر تمثل بـ ٤ سم

من الرسم وبالقياس نجد أن : أب = ٥ سم

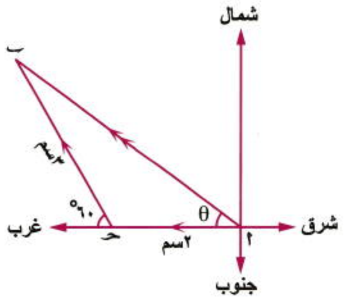
∴ معيار الإزاحة = ٥ × ٢٠٠ = ١٠٠٠ متر

، اتجاه الإزاحة θ = ٥٣° (باستخدام المنقلة)

أ، θ = طا$^{-1}$ $\left(\frac{٤}{٣}\right)$ ≈ ٥٣°

∴ السفينة تبعد عن الموقع أ مسافة ١٠٠٠ متر فى اتجاه ٥٣° شمال الشرق.

٢ نفرض أن مقياس الرسم هو :



كل «١٠ كم» فى الحقيقة تمثل بـ «١ سم» فى الرسم

∴ ٢٠ كم تمثل بـ ٢ سم ، ٣٠ كم تمثل بـ ٣ سم

ومن الرسم وبالقياس نجد أن : أب ≈ ٤,٤ سم

∴ معيار الإزاحة = ٤,٤ × ١٠ = ٤٤ كم

، اتجاه الإزاحة θ ≈ ٣٧° (باستخدام المنقلة)

∴ السفينة تبعد عن الموقع أ مسافة ٤٤ كم

فى اتجاه ٣٧° شمال الغرب.

حاول بنفسك

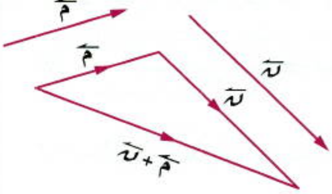
إذا تحركت سيارة من الموقع (أ) فى الاتجاهات المعطاة حتى وصلت إلى الموقع (ب) ارسم مسار الرحلة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا أدواتك الهندسية ثم أوجد من الرسم مقدار واتجاه إزاحة السيارة ($\overrightarrow{\text{أب}}$) إذا كانت الاتجاهات هى :

١ مسافة ١٢٠٠ متر شرقًا ثم مسافة ١٦٠٠ متر شمالاً.

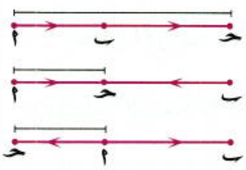
٢ مسافة ٢٥ كم شرقًا ثم ٣٠ كم فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

٣ مسافة ٥٠ كم غربًا ثم مسافة ٤٠ كم فى اتجاه الشمال الغربى.

ملاحظات هامة



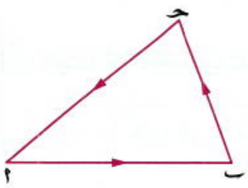
١ أى متجهين $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ يمكن جمعهما (إيجاد محصلتهما) بإنشاء متجهين متتاليين ومكافئين للمتجهين $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ كما فى الشكل المقابل.



٢ قاعدة شال لجمع متجهين صحيحة إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ تنتمى إلى مستقيم واحد.

ففى الأشكال الثلاثة المقابلة يكون :

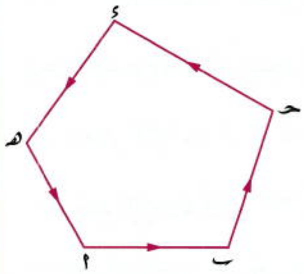
$$\boxed{\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} = \overrightarrow{\text{أحـ}}}$$



٣ $\boxed{\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{بأ}}}$ **حيث إن :** $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بأ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ «المتجه الصفرى»

٤ **فى أى مثلث أ ب حـ يكون :** $\boxed{\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} + \overrightarrow{\text{حـأ}} = \overrightarrow{\text{و}}}$

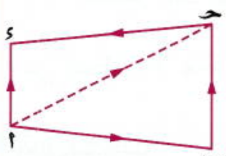
لأن : $(\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}}) + \overrightarrow{\text{حـأ}} = \overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{حـأ}} = \overrightarrow{\text{و}}$



ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لأى مضلع :

فمثلًا فى الشكل الخماسى أ ب حـ د هـ يكون :

$$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} + \overrightarrow{\text{حـد}} + \overrightarrow{\text{دهـ}} + \overrightarrow{\text{هـأ}} = \overrightarrow{\text{و}}$$

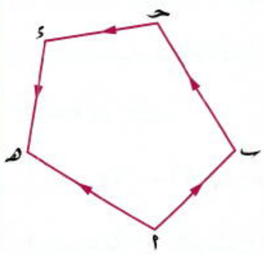


٥ فى أى شكل رباعى يكون :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} + \overrightarrow{\text{حـد}} = \overrightarrow{\text{أد}}}$$

لأن $(\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}}) + \overrightarrow{\text{حـد}}$

$= \overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{حـد}} = \overrightarrow{\text{أد}}$



ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لأى مضلع :

فمثلًا فى الشكل الخماسى أ ب حـ د هـ يكون :

$$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} + \overrightarrow{\text{حـد}} + \overrightarrow{\text{دهـ}} = \overrightarrow{\text{أهـ}}$$

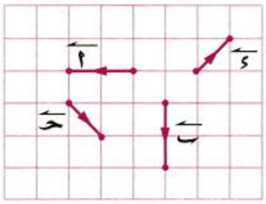
مثال ٢

في الشكل المقابل :

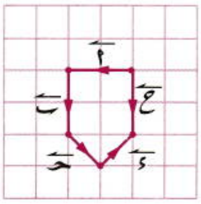
أربع متجهات $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء}}$

مثل بيانيًا المتجه $\overleftarrow{\text{ح}}$ حيث

$\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{حـ}} + \overleftarrow{\text{ء}}$



الحل

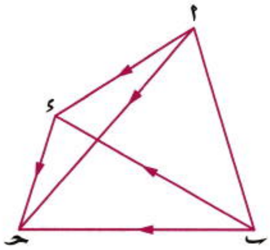


نرسم المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ كما هو موجود ثم من نهايته نرسم متجه يكافئ $\overleftarrow{\text{ب}}$ ومن نهايته نرسم متجه يكافئ $\overleftarrow{\text{حـ}}$ ومن نهايته نرسم متجه يكافئ $\overleftarrow{\text{ء}}$ ثم نرسم متجه من نقطة بداية $\overleftarrow{\text{أ}}$ إلى نقطة نهاية $\overleftarrow{\text{ء}}$ فيكون المتجه $\overleftarrow{\text{ح}}$ هو محصلة المتجهات .

مثال ٣

في أي شكل رباعي أبحـء أثبت أن :

$\overleftarrow{\text{أحـ}} - \overleftarrow{\text{بحـ}} = \overleftarrow{\text{أء}} - \overleftarrow{\text{بء}}$



الحل

$\overleftarrow{\text{أحـ}} - \overleftarrow{\text{بحـ}} = (\overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{ءحـ}}) - (\overleftarrow{\text{بء}} + \overleftarrow{\text{ءحـ}})$

$= \overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{ءحـ}} - \overleftarrow{\text{بء}} - \overleftarrow{\text{ءحـ}} = \overleftarrow{\text{أء}} - \overleftarrow{\text{بء}}$

حل آخر: الطرف الأيمن $= \overleftarrow{\text{أحـ}} - \overleftarrow{\text{بحـ}} = \overleftarrow{\text{أحـ}} + \overleftarrow{\text{حـب}} = \overleftarrow{\text{أب}}$ (١)

، الطرف الأيسر $= \overleftarrow{\text{أء}} - \overleftarrow{\text{بء}} = \overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{ءب}} = \overleftarrow{\text{أب}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ الطرفان متساويان.

مثال ٤

أبحـء شكل رباعي فيه : ٢ $\overleftarrow{\text{بحـ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أء}}$ أثبت أن :

[١] أبحـء شبه منحرف.

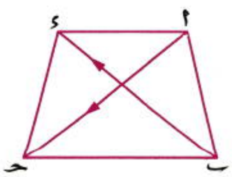
[٢] $\overleftarrow{\text{أحـ}} + \overleftarrow{\text{بء}} = \frac{5}{2}\overleftarrow{\text{أء}}$

الحل

[١] ∵ $\overleftarrow{\text{بحـ}} = \frac{3}{2}\overleftarrow{\text{أء}}$ ∴ $\overline{\text{بحـ}} \,//\, \overline{\text{أء}}$ ، بحـ $= \frac{3}{2}$ أء

أي أن بحـ ≠ أء

∴ الشكل أبحـء شبه منحرف.



٢ في Δ أ ء حـ : $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ (١)

، في Δ ء ب حـ : $\overrightarrow{\text{ب ء}} = \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{حـ ء}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{ب ء}} = \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}} + \overrightarrow{\text{حـ ء}}$

$= \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}} - \overrightarrow{\text{ءحـ}}$

$= \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{أء}} + \frac{٣}{٢}\overrightarrow{\text{أء}}$

$= \frac{٥}{٢}\overrightarrow{\text{أء}}$

تذكر أن

لإثبات أن الشكل الرباعى شبه منحرف نثبت أن فيه ضلعين متقابلين متوازيان وغير متساويين فى الطول.

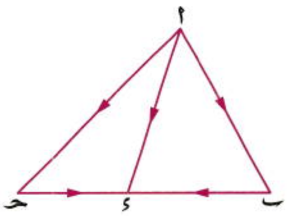
مثال ٥

أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث ٣ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ أثبت أن : ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أء}}$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ء}} = \overrightarrow{\text{أء}}$ ∴ ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أء}}$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{حـ ء}} = \overrightarrow{\text{أء}}$ ∴ ٤ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{أء}}$ (٢)



وبجمع (١) ، (٢) :

∴ ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أء}}$

∴ ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أء}}$

لكن : ٣ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أء}}$

مثال ٦

إذا كان : ٤ $\overrightarrow{\text{م}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{س ص}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ع ص}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص س}}$ أثبت أن : $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{ع س}}$

الحل

٤ $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ع ص}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{س ص}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ع ص}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص س}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ص س}}$

= ٤ $\overrightarrow{\text{ع ص}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ص س}}$ = ٤ ($\overrightarrow{\text{ع ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ص س}}$) = ٤ $\overrightarrow{\text{ع س}}$

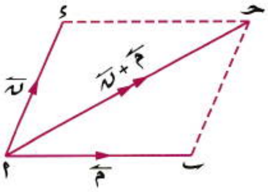
∴ $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{ع س}}$

حاول بنفسك

١ أ ب حـ ء شكل رباعى فإذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = \frac{٥}{٣}\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أء}} - \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{ءحـ}}$

٢ إذا كان : ٥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = ٩ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{ن}}$ = $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

الطريقة الثانية (قاعدة متوازى الأضلاع) :



إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$

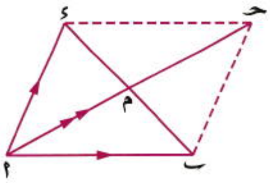
حيث إن المتجهين $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ لهما نفس نقطة البداية (أ)

* لإيجاد $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$ نكمل متوازى الأضلاع أ ب حـ ء ونرسم قطره $\overline{\text{أحـ}}$ فيكون $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$

أى أن $\boxed{\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أحـ}}}$

وذلك لأن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} = \overrightarrow{\text{أحـ}}$ (**لاحظ أن :** $\overrightarrow{\text{أء}}$ يكافئ $\overrightarrow{\text{بحـ}}$)

* **فى الشكل المقابل :**



إذا كانت : م هى نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع فإن : $\overrightarrow{\text{أحـ}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{أم}}$

وبالتالى يكون : $\boxed{\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{أم}}}$

ويمكننا أن نصل إلى نفس هذه النتيجة إذا لاحظنا أن :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بم}} = \overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءم}} = \overrightarrow{\text{أم}}$

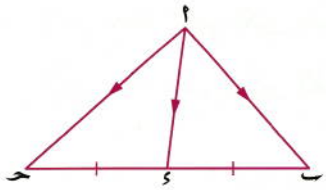
وبالجمع نجد أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{بم}} + \overrightarrow{\text{ءم}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{أم}}$

، $\because \overrightarrow{\text{بم}} = \overrightarrow{\text{مء}} = -\overrightarrow{\text{ءم}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} - \overrightarrow{\text{ءم}} + \overrightarrow{\text{ءم}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{أم}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{أم}}$

وبالتالى يمكننا استنتاج الملاحظة التالية :

ملاحظة

فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أء}}$ متوسطًا فى Δ أ ب حـ

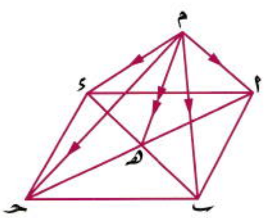
فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{أء}}$

مثال ٧

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، م نقطة ما فى مستويه ، هـ نقطة تقاطع قطريه $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{محـ}} + \overrightarrow{\text{مء}} = ٤ \, \overrightarrow{\text{مهـ}}$

الحل



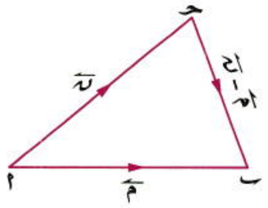
$\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{محـ}} + \overrightarrow{\text{مء}} = (\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{محـ}}) + (\overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مء}})$

ولكن $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{محـ}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{مهـ}}$ حيث هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

، $\overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مء}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{مهـ}}$ حيث هـ منتصف $\overline{\text{بء}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{محـ}} + \overrightarrow{\text{مء}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{مهـ}} + ٢ \, \overrightarrow{\text{مهـ}} = ٤ \, \overrightarrow{\text{مهـ}}$

ثانيًا طرح متجهين هندسيًا



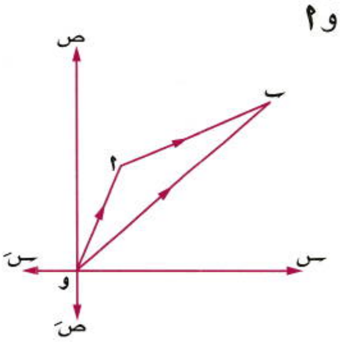
إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{حـب}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}}$

أى أن $\boxed{\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{حـب}}}$

وذلك لأن $\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{حـأ}} = \overrightarrow{\text{حـأ}} + \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{حـب}}$

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أب}}$ بدلالة متجهى الموضع لطرفيها



إذا كانت : أ (س_1 ، ص_1) ، ب (س_2 ، ص_2) **فإن :** $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{وب}} - \overrightarrow{\text{وأ}}$

حيث $\overrightarrow{\text{وب}}$ ، $\overrightarrow{\text{وأ}}$ متجها موضع للنقطتين ب ، أ على الترتيب.

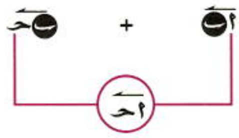
∴ $\boxed{\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}}$

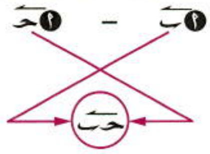
فمثلًا إذا كانت : أ (٥ ، ٣) ، ب (−٢ ، ٤)

فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ٤) − (٥ ، ٣) = (−٧ ، ١)

تذكر أن

◂ **عند تطبيق قاعدتى الجمع والطرح السابقتين على قطعتين مستقيمتين موجهتين يجب مراعاة :**





١ فى حالة الجمع تكون نقطة البداية للقطعة الثانية هى نقطة النهاية للقطعة الأولى.

٢ فى حالة الطرح يكون للقطعتين نفس نقطة البداية.

مثال ٨

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ (٢ ، −٢) ، ب (٤ ، −٢) ، حـ (٢ ، ٣)

أوجد إحداثيى النقطة ء

الحل

∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع. ∴ $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{بحـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، −٢) + (٢ ، ٣) − (٤ ، −٢) = (٠ ، ٣) ∴ النقطة ء هى (٠ ، ٣)

حاول بنفسك

إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (س ، ١) ، ب = (٥ ، ٢)

، حـ = (−٣ ، −٤) ، ء = (٢ ، ص) **أوجد قيمتى :** س ، ص

مثال ٩

أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ (−١ ، ١) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (٥ ، −١) ، ء (−٥ ، ك)

١ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} \,//\, \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ **فأوجد قيمة : ك** ٢ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{حـب}} \perp \overrightarrow{\text{أب}}$

٣ **أوجد :** مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، ٣) - (-١ ، ١) = (٤ ، ٢)$

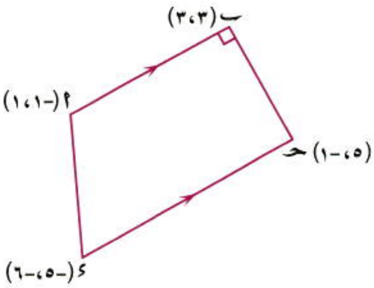
، $\overrightarrow{\text{ءحـ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{ء}} = (٥ ، -١) - (-٥ ، \text{ك}) = (١٠ ، -١ - \text{ك})$

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}} \,//\, \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ $٤\,(-١ - \text{ك}) - ٢ \times ١٠ = ٠$

∴ $-٤ - ٤\text{ك} = ٢٠$ ∴ $-٤\text{ك} = ٢٤$ ∴ $\text{ك} = -٦$ (المطلوب أولًا)

، ∵ $\overrightarrow{\text{حـب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}} = (٣ ، ٣) - (٥ ، -١) = (-٢ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{\text{أب}} = (٤ ، ٢)$

∴ $\overrightarrow{\text{حـب}} \perp \overrightarrow{\text{أب}}$ لأن : $(-٢) \times ٤ + ٤ \times ٢ = ٠$ (المطلوب ثانيًا)



∵ $\| \overrightarrow{\text{أب}} \| = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

، ∵ $\text{ك} = -٦$ ∴ $\overrightarrow{\text{ءحـ}} = (١٠ ، ٥)$

∴ $\| \overrightarrow{\text{ءحـ}} \| = \sqrt{١٠٠ + ٢٥} = ٥\sqrt{٥}$ وحدة طول.

∵ $\| \overrightarrow{\text{حـب}} \| = \sqrt{٤ + ١٦} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء $= \dfrac{\| \overrightarrow{\text{أب}} \| + \| \overrightarrow{\text{ءحـ}} \|}{٢} \times \| \overrightarrow{\text{حـب}} \|$

$= \dfrac{٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥}}{٢} \times ٢\sqrt{٥} = ٣٥$ وحدة مربعة. (المطلوب ثالثًا)

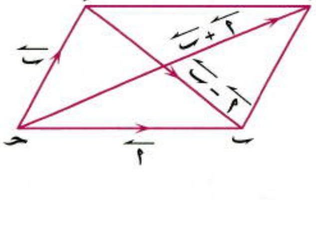
حاول بنفسك

أ ب حـ مثلث فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٢ ، −١) ، حـ (−٤ ، ١)

١ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أب}} \perp \overrightarrow{\text{بحـ}}$ ٢ **أوجد :** مساحة Δ أ ب حـ

ملاحظة

في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يمثلان ضلعان متجاوران

في متوازي الإضلاع فإن : $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}})$ ، $(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}})$

يمثلان قطري متوازي الأضلاع وبالتالي يكون

$\| \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \| = \| \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} \|$ إذا كان الشكل مستطيل أي أن $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ……………

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٢ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٢ ، −٤)

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−١ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ = ……………

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٣ ، ٥) فإن : $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ……………

(أ) (١ ، −٧) (ب) (٧ ، ٣) (جـ) (−١ ، ٧) (د) (٣ ، ٧)

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، ب = (١ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = ……………

(أ) ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ (ب) −٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$

(جـ) ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ (د) ٨ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٧ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ = ……………

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) $\sqrt{٢٩}$

(٦) $\overrightarrow{\text{أب}}$ − $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = ……………

(أ) صفر (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{و}}$

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ح}}$ = $\overrightarrow{\text{ص}}$ فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ ح}}\|$ = ……………

(أ) ٦ (ب) ٣ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١ (د) ٥

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ح ب}}$ = (−٣ ، ٥) فإن : $\overrightarrow{\text{أ ح}}$ = ……………

(أ) (٥ ، −٢) (ب) (−٨ ، ١) (جـ) (−٢ ، ٥) (د) (٢ ، ٥)

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٣ ، −٤) ، $\overrightarrow{\text{ب ح}}$ = (٢ ، ١) فإن : $\overrightarrow{\text{ح أ}}$ = ……………

(أ) (١ ، −٥) (ب) (٥ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٥) (د) (−٥ ، ٣)

(١٠) إذا كان : ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (−٣ ، ١٠) فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ……………

(أ) (٢ ، −١) (ب) (−١ ، ٢) (جـ) (٢ ، −٣) (د) (−٢ ، ٣)

(١١) إذا كان : أ = (٣ ، −٥) ، ب = (−١ ، ٥) وكان : $\overrightarrow{\text{م}}$ = (٦ ، ك) وكان $\overrightarrow{\text{أب}}$ // $\overrightarrow{\text{م}}$

فإن : ك = ...

(أ) −١٥ (ب) −١٠ (جـ) −٥ (د) ٥

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، ٦) ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (−٢ ، ٩) فإن : ‖$\overrightarrow{\text{بجـ}}$‖ = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٣) إذا كانت : م منتصف $\overline{\text{سص}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{سم}}$ + $\overrightarrow{\text{صم}}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{\text{سم}}$ (ب) $\overline{\text{سص}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{و}}$ (د) $\overline{\text{صس}}$

(١٤) إذا كان : أبجـ مثلثاً فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{و}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أجـ}}$

(١٥) إذا كان : أبجـ مثلثاً فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{و}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أجـ}}$

(١٦) إذا كان : أبجـد شكلاً رباعياً فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـد}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أد}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{و}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{أد}}$

(١٧) إذا كان : أبجـ مثلثاً فإن : $\overrightarrow{\text{بأ}}$ − $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{جـب}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أجـ}}$

(١٨) أى مما يأتى يكافئ المتجه الصفرى ....

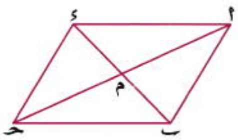
(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{جـد}}$ + $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{جـد}}$ − $\overrightarrow{\text{دك}}$ − $\overrightarrow{\text{كجـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{كى}}$ − $\overrightarrow{\text{كد}}$ − $\overrightarrow{\text{دى}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ − $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ − $\overrightarrow{\text{جـهـ}}$

(١٩) أبجـد متوازى أضلاع ، $\overline{\text{أجـ}}$ ∩ $\overline{\text{بد}}$ = {م} فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أد}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{بد}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{مجـ}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{دم}}$

(٢٠) في الشكل المقابل :



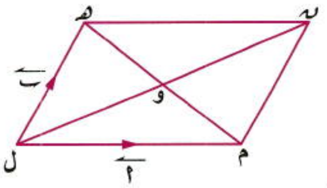
أبجـد متوازى أضلاع قطراه متقاطعان فى م

فإن جميع العبارات التالية تعبر عن $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ عدا العبارة ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{بد}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{أم}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{أد}}$ + $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{دجـ}}$

(٢١) فى المثلث أبجـ : إذا كانت د منتصف $\overline{\text{بجـ}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{بأ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ + $\overrightarrow{\text{أد}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{دأ}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{دأ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{جـب}}$



(٢٢) في متوازي الأضلاع المرسوم أمامك

$\overrightarrow{\text{وم}} + \overrightarrow{\text{ون}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب}}$

(جـ) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\right)$ (د) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\right)$

(٢٣) إذا كان : أ ب جـ د مستطيل فإن : $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ب د}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{جـ د}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

(٢٤) إذا كانت : د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ أى نقطة $\notin$ $\overline{\text{ب جـ}}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{أد}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أد}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{و}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} + ٢\,\overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{و}}$

(٢٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{جـ د}}$ حيث $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٦ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (−١ ، ٣) فإن : $\overrightarrow{\text{د}}$ = ...

(أ) (٥ ، ٧) (ب) (−٥ ، −٧) (جـ) (−٥ ، ٧) (د) (٧ ، ٧)

(٢٦) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : أ = (٧ ، −٢) ، ب = (١٥ ، ٤) ، جـ = (٩ ، ٦)

فإن نقطة د = ...

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (٠ ، −١)

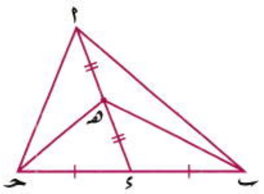
(٢٧) إذا كان : أ ب جـ د هـ شكل خماسى منتظم فإن : $\overrightarrow{\text{د هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ أ}} - \overrightarrow{\text{ب أ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{د ب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ د}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ب د}}$

(٢٨) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أجـ}}$ فإن : ....

(أ) Δ أ ب جـ قائم الزاوية. (ب) ب منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ (د) جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

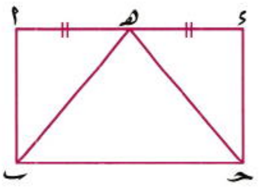


(٢٩) **في الشكل المقابل :**

أ ب جـ مثلث ، إذا كانت د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أد}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} =$ .... $\overrightarrow{\text{أهـ}}$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) −٤



(٣٠) **في الشكل المقابل :**

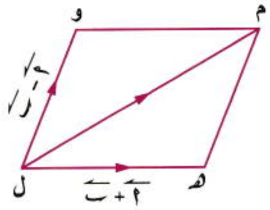
أ ب جـ د مستطيل ، هـ منتصف $\overline{\text{أد}}$

، $\overrightarrow{\text{هـ ب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}} - \overrightarrow{\text{د جـ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{هـ جـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$

(٣١) في الشكل المقابل :

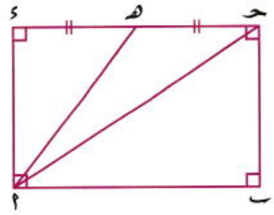


$\overrightarrow{\text{ل م}}$ متجه يمثل ....

(أ) $٢ \overrightarrow{\text{أ}}$ (ب) $٢ \overrightarrow{\text{ب}}$

(جـ) $٢ \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ (د) $٢ \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

(٣٢) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل فيه : هـ منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$ فإن :

أولًا : $\overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{ء هـ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$

(جـ) $٢ \overrightarrow{\text{أ ء}}$ (د) $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{أ ء}} - ٢ \overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ (ب) $٢ \overrightarrow{\text{حـ ب}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$ (د) $٢ \overrightarrow{\text{أ ء}}$

(٣٣) في Δ أ ب حـ إذا كان : ء ، هـ منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب وكان $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ حـ}} = \overrightarrow{\text{ن}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{ء هـ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}}$

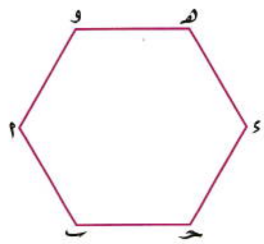
(جـ) $\frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}})$ (د) $- \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}})$

(٣٤) أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}} = \overrightarrow{\text{ك}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ هـ}} =$ .... (بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{ك}}$)

(أ) $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{ك}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{ك}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{ك}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ك}} - \overrightarrow{\text{م}}$

(٣٥) في الشكل المقابل :



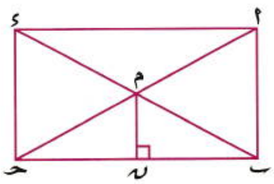
أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم فإن :

$(\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{حـ ب}}) + \overrightarrow{\text{أ و}} + \overrightarrow{\text{ء هـ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{و هـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$

(٣٦) في الشكل المقابل :



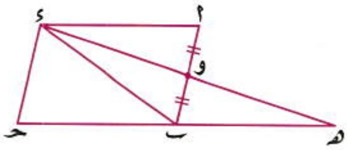
إذا كان أ ب حـ ء مستطيل ، $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ حـ}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} =$ ....

(أ) $٢ \overrightarrow{\text{ب أ}}$ (ب) $٢ \overrightarrow{\text{أ ء}}$

(جـ) $٤ \overrightarrow{\text{م ن}}$ (د) $\overrightarrow{\text{صفر}}$

(٣٧) في الشكل المقابل :



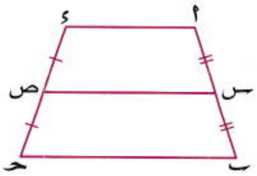
أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، هـ $\in$ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{ء و}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ و}}$ + $\overrightarrow{\text{ب و}}$

(جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{و هـ}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$

(٣٨) في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شبه منحرف

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{ص س}}$

فإن قيمة : ك = ... حيث ك $\in$ ع

(أ) ‎−٢ (ب) ‎−١ (جـ) ١ (د) ٢

(٣٩) إذا كان : أ = (٢ ، ٢) ، ب = (٤ ، ‎−٢) ، جـ = (‎−٢ ، ٠) ، ء = (١ ، ك)

وكان : $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ $\perp$ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ‎−١ (جـ) $\frac{٧}{٣}$ (د) ٢

(٤٠) إذا كان أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، أ (١ ، ٢) ، ب (س ، ‎−٣) ، جـ (‎−٣ ، ٥) ، ء (‎−٧ ، ص)

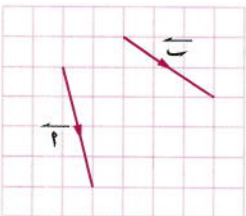
فإن : $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ...

(أ) (‎−٢ ، ٧) (ب) (‎−١٢ ، ‎−١٣) (جـ) (٤ ، ‎−٣) (د) (‎−١٢ ، ١٣)

(٤١) إذا كانت : أ = (٣ ، ٥) ، ب = (‎−١ ، م) ، $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\|$ = ٤ وحدة طول فإن : م = ...

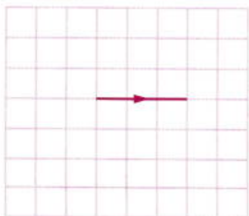
(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ‎−١ (د) ‎−٥

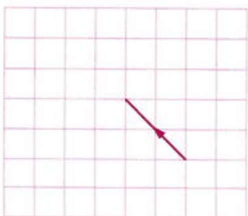
(٤٢) الشكل المقابل يمثل متجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$



أي الأشكال الآتية يمثل المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ ؟

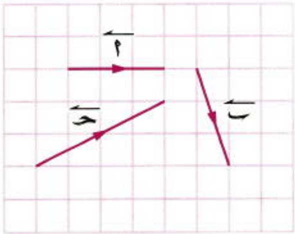

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٤٣) **فى الشكل المقابل :**



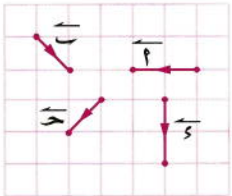
$\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}}\| =$ ....

(حيث طول كل ضلع فى شبكة المربعات يمثل وحدة الأطوال)

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٥ (د) ٤

(٤٤) الشكل المقابل يوضح متجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$

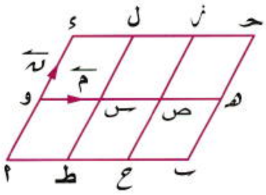


أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $\overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{حـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ء}} = ٢\,\overrightarrow{\text{ب}}$

(٤٥) **فى الشكل المقابل ستة متوازيات أضلاع متطابقة :**



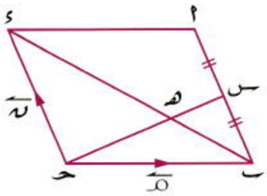
إذا كان : $\overrightarrow{\text{و س}} = \overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ء}} = \overrightarrow{\text{ن}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{ء ع}} =$ .... (بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$)

(أ) $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$ (ب) $٢\,\overrightarrow{\text{م}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ن}}$

(جـ) $٢\,\overrightarrow{\text{م}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ن}}$ (د) $٢\,\overrightarrow{\text{ن}} - ٢\,\overrightarrow{\text{م}}$

(٤٦) **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{هـ س}} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٣}\,(\overrightarrow{\text{ن}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ق}})$ (ب) $\frac{١}{٣}\,(٢\,\overrightarrow{\text{ن}} - \overrightarrow{\text{ق}})$

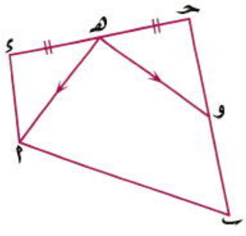
(جـ) $\frac{١}{٣}\,(\overrightarrow{\text{ق}} + \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{ن}})$ (د) $\frac{٢}{٣}\,(\overrightarrow{\text{ن}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ق}})$

(٤٧) إذا كان $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ حيث أ (٩ ، ٦) ، ء (−١ ، ٠)

فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}\| =$ .... وحدة طول.

(أ) $٢\sqrt{٣٤}$ (ب) $٤\sqrt{٣٤}$ (جـ) $٨\sqrt{١٧}$ (د) $١٠\sqrt{١٧}$

(٤٨) **فى الشكل المقابل :**



إذا كان هـ منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{هـ و}} =$ ....

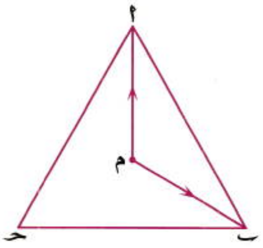
(أ) $\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{حـ ب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{و ب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{حـ و}}$ (د) $\overrightarrow{\text{حـ ء}} + \overrightarrow{\text{ب أ}}$

(٤٩) إذا كان أ ب ح ء مستطيل تقاطع قطراه في م فإن : $\overrightarrow{\text{م ح}} + \overrightarrow{\text{م ب}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{ح ء}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ح ب}}$

(٥٠) **في الشكل المقابل :**



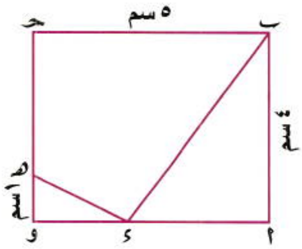
إذا كان م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب ح

فإن : $\overrightarrow{\text{م أ}} + ٢\ \overrightarrow{\text{م ب}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{أ ح}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{صفر}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ح ب}}$

(٥١) **في الشكل المقابل :**



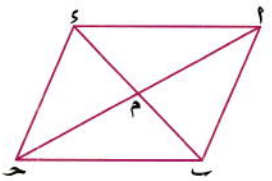
إذا كان و أ ب ح مستطيل

فإن : $\| \overrightarrow{\text{ب ء}} + \overrightarrow{\text{ء هـ}} \|$ = ...

(أ) $\sqrt{١٧}$ (ب) $\sqrt{٢٦}$

(جـ) $\sqrt{٣٤}$ (د) $\sqrt{٤١}$

(٥٢) **في الشكل المقابل :**



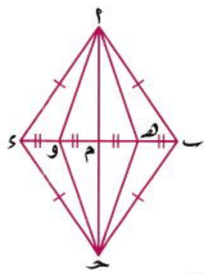
أ ب ح ء متوازي أضلاع

فإذا كان : $\overrightarrow{\text{ح أ}}$ = (٧ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ = (٣ ، −٣)

فإن : $\overrightarrow{\text{ح ء}}$ = ...

(أ) (٥ ، ٠) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (١٠ ، ٠) (د) (٣ ، ٧)

(٥٣) **في الشكل المقابل :**



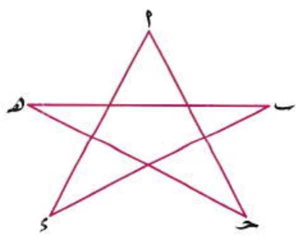
أ ب ح ء معين تقاطع قطراه في م

فإذا كان : $\overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{أ و}}$ = ك $(\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ ء}})$

فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

(٥٤) **في الشكل المقابل :**

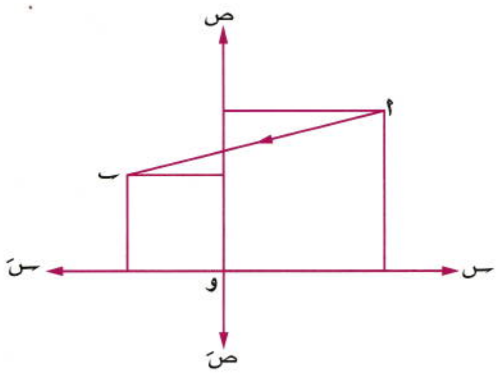


$\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{ح هـ}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} + \overrightarrow{\text{أ ح}} + \overrightarrow{\text{هـ ب}}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$

(جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{ح هـ}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$

(٥٥) **فى الشكل المقابل :**



إذا كان مساحة المربع الكبير = ٤٩ وحدة مساحة

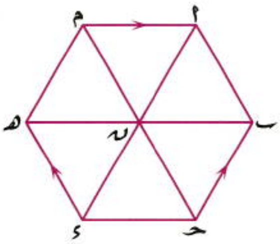
، مساحة المربع الصغير = ٢٥ وحدة مساحة

فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ...

(أ) (–١٢ ، ٢) (ب) (–١٢ ، –١٢)

(جـ) (–١٢ ، –٢) (د) (١٢ ، –٢)

(٥٦) **فى الشكل المقابل :**



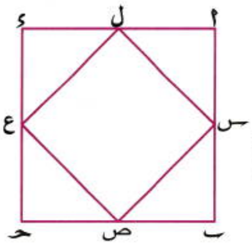
أ ب حـ ء هـ م سداسى منتظم طول ضلعه ٢ وحدة طولية

فإن : $\|\overrightarrow{\text{أم}} + \overrightarrow{\text{حـ ب}} + \overrightarrow{\text{ء هـ}}\|$ = ... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) $٢\sqrt{٣}$

(جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) ٤

(٥٧) **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء ، س ص ع ل مربعان

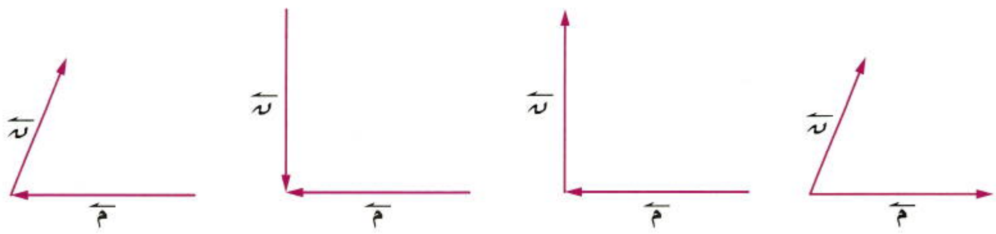
وكان : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{حـ ء}} + \overrightarrow{\text{ء أ}} = ك \, (\overrightarrow{\text{س ص}} + \overrightarrow{\text{ص ع}} + \overrightarrow{\text{ع ل}} + \overrightarrow{\text{ل س}})$

فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ فقط. (ب) ٢ فقط.

(جـ) صفر فقط. (د) أى عدد حقيقى.

(٥٨) فى أى من الحالات الآتية يكون : $\|\overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن}\| < \|\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}\|$



(أ) (ب) (جـ) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أ ب حـ ء متوازى أضلاع حيث : أ = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٤) ، ء = (–٢ ، –١)

أوجد : إحداثيي النقطة حـ «(–٥ ، ٣)»

٢ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (س ، ٢) ، ب = (٣ ، ٨) ، حـ = (٩ ، ١) ، ء = (٧ ، ص)

أوجد قيم : س ، ص ثم أوجد : $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ ، $\|\overrightarrow{\text{أء}}\|$ «١ ، -٥ ، ٢$\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٨٥}$»

---

٣ فى مستوى إحداثي متعامد إذا كان : أ = (-١ ، -٤) ، ب = (١ ، ١) ، حـ = (٦ ، -١)

أوجد كلًا من : $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} \perp \overrightarrow{\text{ب حـ}}$

---

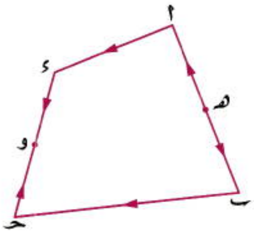
٤ إذا كان : ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$ − $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$

---

٥ فى أى مثلث س ص ع **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{س ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ص ع}}$ + $\overrightarrow{\text{ع س}}$ = $\vec{٠}$

---

٦ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شكل رباعى

، هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، و ∈ $\overline{\text{حـ ء}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ و}}$ = $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ء و}}$

---

٧ **فى الشكل الرباعى أ ب حـ ء أثبت أن :**

(١) $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ = $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

(٤) $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ − $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ − $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ = $\vec{و}$

(٥) $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$

---

٨ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ء حـ}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{هـ و}}$

---

٩ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

أثبت أن : (١) أ ب حـ ء شبه منحرف.

(٢) $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

---

١٠ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{٢}{٣}$ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\frac{٥}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

---

١١ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ٢ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

أثبت أن : (١) ٢ $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

(٢) ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ء أ}}$

١٢ أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، ن نقطة خارجة عنه

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أب}}$ (٢) $\overrightarrow{\text{أحـ}} - \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{بحـ}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + ٢\,\overrightarrow{\text{حـم}} = \overrightarrow{٠}$ (٤) $\overrightarrow{\text{نأ}} + \overrightarrow{\text{نحـ}} = \overrightarrow{\text{نب}} + \overrightarrow{\text{نء}}$

(٥) $\overrightarrow{\text{نأ}} + \overrightarrow{\text{نب}} + \overrightarrow{\text{نحـ}} + \overrightarrow{\text{نء}} = ٤\,\overrightarrow{\text{نم}}$ (٦) $\overrightarrow{\text{أن}} + \overrightarrow{\text{بن}} + \overrightarrow{\text{نء}} + \overrightarrow{\text{نحـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أء}}$

---

١٣ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : هـ منتصف $\overline{\text{بحـ}}$ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أهـ}}$

---

١٤ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : س منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{بء}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{حـب}} + \overrightarrow{\text{حـء}} = ٤\,\overrightarrow{\text{س ص}}$

---

١٥ س ص ع مثلث ، ل $\in \overline{\text{ص ع}}$ بحيث ص ل : ل ع = ٥ : ٣ **أثبت أن :** $٥\,\overrightarrow{\text{س ع}} + ٣\,\overrightarrow{\text{س ص}} = ٨\,\overrightarrow{\text{س ل}}$

---

١٦ إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ ، ط نقطة خارج المثلث

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{طأ}} + \overrightarrow{\text{طب}} + \overrightarrow{\text{طحـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{طم}}$

---

١٧ أ ب حـ مثلث ، ء منتصف $\overline{\text{بحـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ ، و منتصف $\overline{\text{أب}}$

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{\text{أو}} + \overrightarrow{\text{أهـ}} = \overrightarrow{\text{أء}}$ (٢) $\overrightarrow{\text{أو}} - \overrightarrow{\text{أهـ}} = \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{حـب}}$ (٣) $\overrightarrow{\text{حـو}} + \overrightarrow{\text{هـب}} = ٣\,\overrightarrow{\text{هـو}}$

---

١٨ أ ب حـ مثلث فيه : ء ، هـ ، و منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{حـأ}}$ على الترتيب ، م هى نقطة تقاطع متوسطاته

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{بو}} = \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ (٢) $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{محـ}} = \overrightarrow{\text{مء}} + \overrightarrow{\text{مهـ}} + \overrightarrow{\text{مو}}$

---

١٩ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{حـء}} = \overrightarrow{\text{هـب}} + \overrightarrow{\text{ءأ}}$

---

٢٠ أ ب حـ مثلث ، ء $\in \overline{\text{بحـ}}$ ، هـ $\in \overline{\text{بحـ}}$ بحيث : ب ء = حـ هـ **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{أهـ}}$

---

٢١ إذا كان : أ = (٣ ، ١) ، ب = (١ ، ٤) ، حـ = (−١ ، −٥) **أوجد : ن**

بحيث : $\overrightarrow{\text{نأ}} + \overrightarrow{\text{نب}} + \overrightarrow{\text{نحـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ «(١ ، ٠)»

---

٢٢ أ ب حـ ء شكل رباعى إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ = (−٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = (٥ ، −١)

أوجد المتجه الذى تمثله $\overrightarrow{\text{أء}}$ وإذا كانت : ب = (−١ ، ٣) **أوجد إحداثيات : أ ، حـ ، ء**

---

٢٣ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (١ ، −٤) ، أ = (٢ ، ٣) ، حـ = (−١ ، ١٥)

أوجد قيمتى : ل ، م إذا كان : ل $\overrightarrow{\text{أ}}$ − م $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ}}$ «٤ ، ٣»

٢٤ إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب حيث : أ = (٢ ، ٠) ، ب = (٣ ، ٢)

، حـ = (-٥ ، ٥ - س) أوجد قيمة : س «-١»

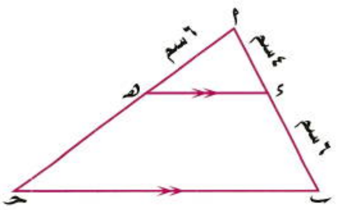
---

٢٥ إذا كان : أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ = (٥ ، ١) ، ب = (٢ ، -٢) ، حـ = (-٣ ، ك)

فأوجد قيمة ك ، ثم أوجد إحداثيى النقطة ء «٣ ، (٠ ، ٦)»

---

٢٦ فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$

أوجد قيم ك ، ل ، م ، ن العددية إذا كان :

(١) $\overleftarrow{بء} = ك \overleftarrow{ءأ}$ | (٢) $\overleftarrow{حـهـ} = ل \overleftarrow{حـأ}$

(٣) $\overleftarrow{بحـ} = م \overleftarrow{هـء}$ | (٤) $\overleftarrow{أء} + \overleftarrow{ءهـ} = ن \overleftarrow{أحـ}$

«$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$»

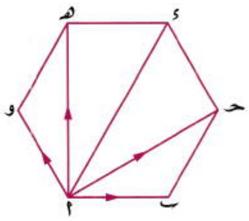
---

٢٧ إذا كان : أ ب حـ ء هـ ن مسدس منتظم مركزه و ،

فأثبت أن : $\overleftarrow{وأ} + \overleftarrow{وب} + \overleftarrow{وحـ} + \overleftarrow{وء} + \overleftarrow{وهـ} + \overleftarrow{ون} = \overleftarrow{و}$

---

٢٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم

أثبت أن :

$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{أحـ} + \overleftarrow{أهـ} + \overleftarrow{أو} = ٢ \overleftarrow{أء}$

---

٢٩ فى مستوى إحداثى متعامد $\overleftarrow{أب} = (-٢ ، ٣)$ ، $\overleftarrow{حـب} = (-٦ ، -٤)$ ، $٢ \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{أحـ} = (٦ ، ١١)$

أوجد : (١) إحداثيى كل من النقط : أ ، ب ، حـ

(٢) مساحة سطح المثلث أ ب حـ باستخدام المتجهات. «١٣»

---

٣٠ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه :

أ = (-٢ ، -٣) ، ب = (٤ ، -١) ، حـ = (٢ ، ٥) ، ء = (-١ ، ك)

(١) إذا كان : $\overleftarrow{أب} \parallel \overleftarrow{ءحـ}$ أوجد قيمة : ك (٢) أثبت أن : $\overleftarrow{حـب} \perp \overleftarrow{أب}$

(٣) أوجد : مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء «٤ ، ٣٠»

ثالثًا / مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ .... $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $\leq$ (د) $\geq$

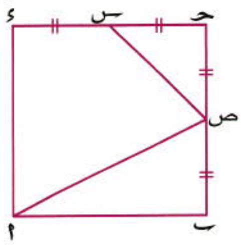
(٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{حـ}}\|$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدان.
(ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متكافئان.
(جـ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان.
(د) $\overrightarrow{\text{حـ}}$ عمودى على كل من $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}} = -\overrightarrow{\text{ب}}$
(ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متكافئان.
(جـ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان.
(د) $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدان.

(٤) فى الشكل المقابل :

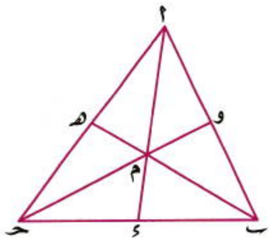


أ ب حـ ء مربع وكان : $\overrightarrow{\text{أص}} + \overrightarrow{\text{س ص}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{س حـ}}$

فإن : ك = ...

(أ) ١
(ب) ٢
(جـ) ٣
(د) ٤

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ فإن :

أولًا : $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ب هـ}} + \overrightarrow{\text{حـ و}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$
(ب) $\overrightarrow{\text{صفر}}$
(جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$
(د) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م حـ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{م ء}} + \overrightarrow{\text{م هـ}}$
(ب) ٣ $\overrightarrow{\text{م أ}}$
(جـ) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$
(د) $\frac{1}{3}$ $(\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}})$

ثالثًا : إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{أ م}}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) إذا كان : أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه (م) وكان : $\overrightarrow{\text{ءب}}$ + $\overrightarrow{\text{ءأ}}$ + $\overrightarrow{\text{ءو}}$ = ك $\overrightarrow{\text{ءم}}$

فإن : ك = ...

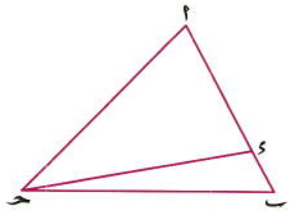
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٧) إذا كان مجموع متجهى وحدة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ هو أيضًا متجه وحدة $\overrightarrow{\text{حـ}}$ أى $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ}}$

فإن معيار الفرق بينهما $\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ...

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ٢

(٨) **فى الشكل المقابل :**



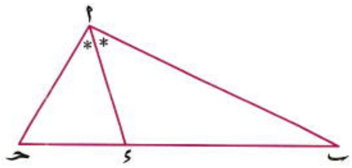
أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، إذا كان : أ ء = ٣ ء ب

وكان : $\overrightarrow{\text{حـء}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ + م $\overrightarrow{\text{حـب}}$

فإن : ك + م = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) **فى الشكل المقابل :**



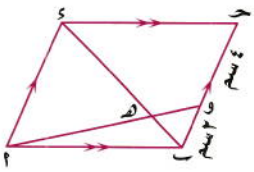
$\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ وكان أ ب = ٢ أ حـ

فإن : $\overrightarrow{\text{أء}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ ($\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أحـ}}$) (ب) $\frac{١}{٣}$ ($\overrightarrow{\text{أحـ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$)

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (٣ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$) (د) $\frac{١}{٣}$ (٢ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أب}}$)

(١٠) **فى الشكل المقابل :**



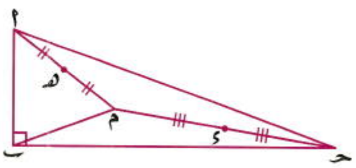
إذا كان أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه :

ب و = ٢ سم ، و حـ = ٤ سم فإن : $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\frac{١}{٣}$ $\overrightarrow{\text{أء}}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\frac{٣}{٤}$ $\overrightarrow{\text{أء}}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\frac{١}{٣}$ $\overrightarrow{\text{أء}}$ (د) $\frac{٣}{٤}$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\frac{١}{٤}$ $\overrightarrow{\text{أء}}$

(١١) **فى الشكل المقابل :**



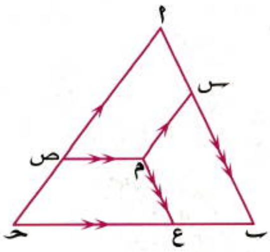
إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ حـ = ٢٤ سم

وكانت م هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

فإن : $\|\overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مء}} + \overrightarrow{\text{مهـ}}\|$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٢) في الشكل المقابل :



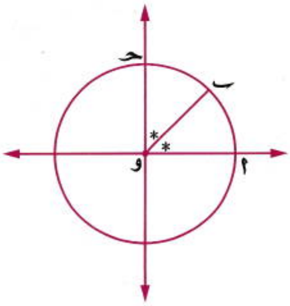
إذا كانت : م هي نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ

فإن : $\overrightarrow{\text{م س}} + \overrightarrow{\text{م ص}} + \overrightarrow{\text{م ع}}$ = ...

(أ) ٣ $\overrightarrow{\text{ع ب}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{ص حـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{صفر}}$ (د) ٥ $\overrightarrow{\text{أ س}}$

(١٣) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها «و» إذا كان $\overrightarrow{\text{و ب}}$ ينصف $\angle$ أ و حـ

فإن : $\overrightarrow{\text{و أ}} + \overrightarrow{\text{و ب}} + \overrightarrow{\text{و حـ}}$ = ...

(أ) $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{\text{و ب}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{و ب}}$

(جـ) $(\sqrt{٢} + ١)$ $\overrightarrow{\text{و ب}}$ (د) ٣ $\overrightarrow{\text{و ب}}$

---

٢ أ ب حـ ء شكل رباعي ، س ، ص ، ع ، ن منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ على الترتيب.

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ء حـ}} + \overrightarrow{\text{حـ ب}} + \overrightarrow{\text{ء أ}} = ٢ \, (\overrightarrow{\text{ع س}} + \overrightarrow{\text{ن ص}})$

---

٣ أ ب حـ مثلث ، ء $\in$ $\overline{\text{ب حـ}}$ فإذا كان : $\overrightarrow{\text{أ حـ}} + \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{حـ ب}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = ك \, \overrightarrow{\text{أ ب}}$ فأوجد قيمة : ك «٢»

الدرس 4 تطبيقات على المتجهات

أولًا تطبيقات هندسية

نعلم أنه إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ، $\text{ك} \neq ٠$ **فإن :** $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$:

- يحملهما مستقيم واحد. **أى أن** أ ، ب ، حـ ، ء على استقامة واحدة

أو

- يحملهما مستقيمان متوازيان. **أى أن** $\overline{\text{أب}} \mathbin{//} \overline{\text{ءحـ}}$

ملاحظة

إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا فيه : $\overrightarrow{\text{أب}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ، $\text{ك} \neq ٠$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أب}} \mathbin{//} \overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ ، $\| \overrightarrow{\text{أب}} \| = |\text{ك}|\ \| \overrightarrow{\text{ءحـ}} \|$ والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا فيه : $\overrightarrow{\text{أب}} = -٣\ \overrightarrow{\text{حـء}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أب}} \mathbin{//} \overleftrightarrow{\text{حـء}}$ ، أب = ٣ حـ ء

وبالتالى يمكن استخدام المتجهات لإثبات بعض النظريات والعلاقات الهندسية كما يلى :

مثال ١

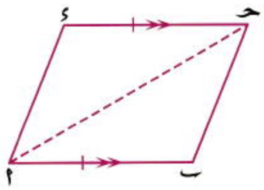
باستخدام المتجهات أثبت أنه : إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى فإن الضلعين الآخرين يكونان متساويين ومتوازيين أيضًا أى أن الشكل يكون متوازى أضلاع.

الحل

◄ **المعطيات** في الشكل أ ب حـ ء : $\overline{أب} // \overline{ءحـ}$ ، أ ب = ء حـ

◄ **المطلوب** $\overline{بحـ} // \overline{أء}$ ، ب حـ = أ ء

◄ **العمل** ارسم $\overline{أحـ}$



◄ **البرهان** ∵ أ ب = ء حـ ، $\overline{أب} // \overline{ءحـ}$ ∴ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ءحـ}$

في Δ أ ب حـ : $\overleftarrow{أحـ} = \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بحـ}$ (تعريف الجمع)

في Δ أ ء حـ : $\overleftarrow{أحـ} = \overleftarrow{أء} + \overleftarrow{ءحـ}$ (تعريف الجمع)

∵ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ءحـ}$ ∴ $\overleftarrow{بحـ} = \overleftarrow{أء}$

ويكون : $\overline{بحـ} // \overline{أء}$ ، ب حـ = أ ء ∴ الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

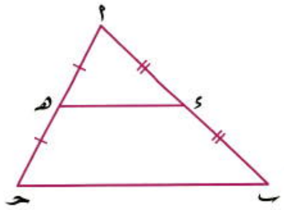
مثال ٢

باستخدام المتجهات أثبت أن : القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها يساوى نصف طوله.

الحل

◄ **المعطيات** فى Δ أ ب حـ :

ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$



◄ **المطلوب** $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ ، طول $\overline{ءهـ} = \frac{1}{2}$ طول $\overline{بحـ}$

◄ **البرهان** ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ أ ء = $\frac{1}{2}$ أ ب ، $\overleftarrow{أء} = \frac{1}{2} \overleftarrow{أب}$

، ∵ هـ منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ ، $\overleftarrow{أهـ} = \frac{1}{2} \overleftarrow{أحـ}$

فى Δ أ ب حـ : $\overleftarrow{بحـ} = \overleftarrow{بأ} + \overleftarrow{أحـ}$ (تعريف الجمع) (١)

فى Δ أ ء هـ : $\overleftarrow{ءهـ} = \overleftarrow{ءأ} + \overleftarrow{أهـ}$ (تعريف الجمع)

$= \frac{1}{2} \overleftarrow{بأ} + \frac{1}{2} \overleftarrow{أحـ} = \frac{1}{2} (\overleftarrow{بأ} + \overleftarrow{أحـ})$ (٢)

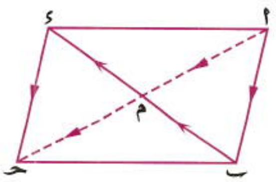
من (١) ، (٢) ينتج أن : $\overleftarrow{ءهـ} = \frac{1}{2} \overleftarrow{بحـ}$

∴ $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ ، $\|\overleftarrow{ءهـ}\| = \frac{1}{2} \|\overleftarrow{بحـ}\|$ ∴ طول $\overline{ءهـ} = \frac{1}{2}$ طول $\overline{بحـ}$

مثال ٣

باستخدام المتجهات أثبت أن : قطرى متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

الحل



◂ المعطيات أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

◂ المطلوب القطران $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ ينصف كل منهما الآخر.

◂ العمل نفرض أن م نقطة منتصف $\overline{\text{بء}}$ ثم ارسم المتجهين :

$\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{محـ}}$

◂ البرهان فى Δ أ ب م : $\overrightarrow{\text{أم}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بم}}$ ، فى Δ حـ ء م : $\overrightarrow{\text{محـ}} = \overrightarrow{\text{مء}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}}$

$\because$ $\overrightarrow{\text{بم}} = \overrightarrow{\text{مء}}$ عملاً ، $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ (من متوازى الأضلاع)

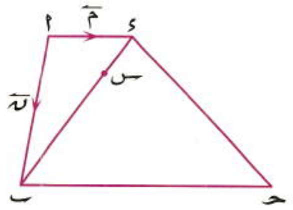
$\therefore$ $\overrightarrow{\text{أم}} = \overrightarrow{\text{محـ}}$ $\therefore$ $\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{محـ}}$ لهما نفس الاتجاه وتشتركان فى نقطة م

$\therefore$ أ ، م ، حـ تقع على استقامة واحدة.

، $\|\overrightarrow{\text{أم}}\| = \|\overrightarrow{\text{محـ}}\|$ $\therefore$ م منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ ، م منتصف $\overline{\text{بء}}$ عملاً.

$\therefore$ القطران $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ ينصف كل منهما الآخر.

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أء}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$

، $\text{بحـ} = ٣\,\text{أء}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ن}}$

١ عبر بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ عن كل من : $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{بء}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$

٢ إذا كانت : $\text{س} \in \overline{\text{ءب}}$ حيث : $\text{ءس} = \frac{١}{٢}\,\text{س ب}$

أثبت أن : النقط أ ، س ، حـ تقع على استقامة واحدة.

الحل

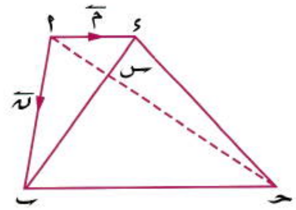
١ $\because$ $\overline{\text{أء}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$ ، $\text{بحـ} = ٣\,\text{أء}$ $\therefore$ $\overrightarrow{\text{بحـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أء}} = ٣\,\overrightarrow{\text{م}}$

، $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} = \overrightarrow{\text{ن}} + ٣\,\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{بء}} = \overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أء}} = -\overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}}$

، $\overrightarrow{\text{ءحـ}} = \overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} = -\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}} + ٣\,\overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{ن}} + ٢\,\overrightarrow{\text{م}}$

٢ ∵ $\text{ء س} = \frac{١}{٣}\ \text{س ب}$ ∴ $\text{س ب} = ٣\ \text{س ء}$

، ∵ $\text{س} \in \overline{\text{ب ء}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{س ب}} = ٣\ \overrightarrow{\text{ء س}}$



في Δ ب حـ س :

∵ $\overrightarrow{\text{س حـ}} = \overrightarrow{\text{س ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} = ٣\ \overrightarrow{\text{ء س}} + ٣\ \overrightarrow{\text{أ ء}} = ٣\ (\overrightarrow{\text{ء س}} + \overrightarrow{\text{أ ء}})$

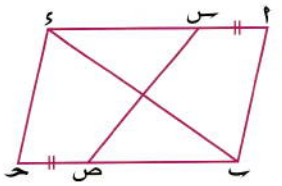
$= ٣\ (\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء س}}) = ٣\ \overrightarrow{\text{أ س}}$

∴ $\overrightarrow{\text{س حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ س}}$ لهما نفس الاتجاه ومشتركتان في النقطة س

∴ أ ، س ، حـ تقع على استقامة واحدة.

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، $\text{س} \in \overline{\text{أ ء}}$ ، $\text{ص} \in \overline{\text{ب حـ}}$

بحيث : أ س = حـ ص

أثبت باستخدام المتجهات أن : $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منهما الآخر.

مثـــال ٥

إذا كانت : أ = (٢ ، ١) ، ب = (١ ، ٥) ، حـ = (٦ ، −٣) رؤوس مثلث

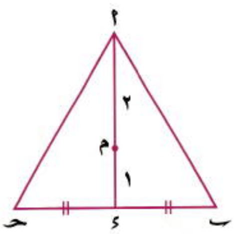
فأوجد باستخدام المتجهات إحداثيي نقطة تلاقي متوسطاته.

الحـــل

نرسم المتوسط $\overline{\text{أ ء}}$ في المثلث أ ب حـ ، م هي نقطة تلاقي متوسطاته.

∵ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

∴ $\overrightarrow{\text{أ م}} = \frac{٢}{٣}\ \overrightarrow{\text{أ ء}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \frac{٣}{٢}\ \overrightarrow{\text{أ م}}$ (١)



، في Δ أ ب حـ : ∵ $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أ ء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}} = ٢\ \left(\frac{٣}{٢}\ \overrightarrow{\text{أ م}}\right)$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}} = ٣\ \overrightarrow{\text{أ م}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{أ}} = ٣\ (\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{أ}})$ ∴ $\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} - ٢\ \overrightarrow{\text{أ}} = ٣\ \overrightarrow{\text{م}} - ٣\ \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} - ٢\ \overrightarrow{\text{أ}} + ٣\ \overrightarrow{\text{أ}} = ٣\ \overrightarrow{\text{م}}$ ∴ $٣\ \overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{م}} = \frac{١}{٣}\ (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}})$

∴ $\overrightarrow{\text{م}} = \frac{١}{٣}$ (٢ + ١ + ٦ ، ١ + ٥ − ٣) $= \frac{١}{٣}$ (٩ ، ٣) = (٣ ، ١)

∴ نقطة تلاقي المتوسطات هي : (٣ ، ١)

ملاحظات هامة لحل مسائل الأشكال الرباعية

* **لإثبات أن الشكل الرباعى متوازى أضلاع نثبت إحدى الخواص الآتية :**

١ كل ضلعين متقابلين متوازيان.

٢ كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول.

٣ ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان فى الطول.

٤ القطران ينصف كل منهما الآخر.

فمثلًا لإثبات أن الشكل الرباعى أ ب حـ ء متوازى أضلاع

نثبت أن : $\overrightarrow{ب حـ} \parallel \overrightarrow{أ ء}$ ، ب حـ = أ ء **أى نثبت أن :** $\boxed{\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{أ ء}}$

* **لإثبات أن الشكل الرباعى مستطيل أو معين أو مربع فإننا نثبت أولاً أن هذا الشكل متوازى أضلاع**

كما سبق ثم :

- **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو مستطيل نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :**

١ ضلعان متجاوران فيه متعامدان. **فمثلًا :** $\overrightarrow{أ ب} \perp \overrightarrow{ب حـ}$

٢ القطران متساويان فى الطول. **فمثلًا :** $\|\overrightarrow{أ حـ}\| = \|\overrightarrow{ب ء}\|$

- **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو معين نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :**

٣ ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول. **فمثلًا :** $\|\overrightarrow{أ ب}\| = \|\overrightarrow{ب حـ}\|$

٤ القطران متعامدان. **فمثلًا :** $\overrightarrow{أ حـ} \perp \overrightarrow{ب ء}$

- **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو مربع نثبت إحدى خواص المستطيل وإحدى خواص المعين معًا.**

مثال ٦

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ = (٠ ، ١) ، ب = (٤ ، ٥) ، حـ = (١ ، ٨) ، ء = (-٣ ، ٤)

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل أ ب حـ ء مستطيل ثم أوجد محيطه ومساحته.

الحل

∵ $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٥) - (٠ ، ١) = (٤ ، ٤) ، $\overrightarrow{ء حـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ء}$ = (١ ، ٨) - (-٣ ، ٤) = (٤ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ء حـ}$ ∴ الشكل متوازى أضلاع. (١)

، ∵ $\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٨) - (٤ ، ٥) = (-٣ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{أ ب} \perp \overrightarrow{ب حـ}$ لأن : [(٤ × (-٣) + ٤ × ٣ = صفر] (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل أ ب حـ ء مستطيل

، ∵ $\|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ ، $\|\overrightarrow{ب حـ}\| = \sqrt{(-٣)^٢ + (٣)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

∴ محيط المستطيل = ٢ (٤ $\sqrt{٢}$ + ٣ $\sqrt{٢}$) = ١٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية.

، مساحة المستطيل = ٤ $\sqrt{٢}$ × ٣ $\sqrt{٢}$ = ٢٤ وحدة مربعة.

مثال ٧

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ = (٥ ، ٣) ، ب = (٣ ، −٢) ، حـ = (−٢ ، −٤) ، ء = (٠ ، ١)

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل معين ثم أوجد مساحته.

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$ − $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، −٢) − (٥ ، ٣) = (−٢ ، −٥)

، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ = $\overleftarrow{\text{حـ}}$ − $\overleftarrow{\text{ء}}$ = (−٢ ، −٤) − (٠ ، ١) = (−٢ ، −٥)

∴ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ ∴ الشكل متوازى أضلاع. (١)

، ∵ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ = $\overleftarrow{\text{حـ}}$ − $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، −٤) − (٥ ، ٣) = (−٧ ، −٧)

، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = $\overleftarrow{\text{ء}}$ − $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ١) − (٣ ، −٢) = (−٣ ، ٣)

∴ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ لأن : [(−٧) (−٣) + (−٧) (٣) = صفر] (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : الشكل أ ب حـ ء معين

، ∵ ‖$\overleftarrow{\text{أ حـ}}$‖ = $\sqrt{(-٧)^٢ + (-٧)^٢}$ = ٧ $\sqrt{٢}$ ، ∵ ‖$\overleftarrow{\text{ب ء}}$‖ = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

∴ مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب طولى القطرين = $\frac{١}{٢}$ × ٧ $\sqrt{٢}$ × ٣ $\sqrt{٢}$ = ٢١ وحدة مربعة.

حاول بنفسك

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ = (−١ ، ٤) ، ب = (١ ، ١) ، حـ = (−١ ، −٢) ، ء = (−٣ ، ١)

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل أ ب حـ ء معين ثم أوجد محيطه ومساحته.

ثانيًا تطبيقات فيزيائية

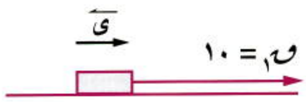
١ القوة المحصلة

* **القوة :** هى متجه يتميز بأنه يمر بنقطة معلومة وتعمل فى خط مستقيم.
* تمثل القوة بقطعة مستقيمة موجهة وترسم بمقياس رسم مناسب.

فمثلًا

١ قوة مقدارها $ق_١$ = ١٠ نيوتن فى اتجاه الشرق

$\overleftarrow{ق_١}$ = ١٠ $\overleftarrow{ى}$



«تمثل بقطعة مستقيمة موجهة طولها ٢ سم»

تذكر أن

١ نعتبر أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الشرق.

٢ نختار مقياس رسم مناسب «كل ٥ نيوتن تمثل على الرسم بـ ١ سم»

٢ قوة مقدارها $\text{ق}_٢$ = ١٥ نيوتن فى اتجاه الغرب

$\overleftarrow{\text{ق}_٢} = -١٥ \, \overleftarrow{\text{ى}}$

«تمثل بقطعة مستقيمة موجهة طولها ٣ سم»

* **قوة الاحتكاك (ك) :** هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن وهى دائمًا فى عكس الاتجاه الذى يميل الجسم إلى التحرك فيه.

- إذا كانت قوة دفع الجسم > قوة الاحتكاك «يتحرك الجسم»
- إذا كانت قوة دفع الجسم < قوة الاحتكاك «يظل الجسم ثابت»

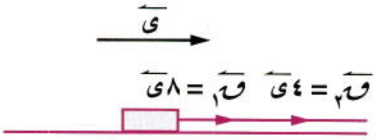
القوة المحصلة ($\overleftarrow{\text{ق}}$)

القوى المؤثرة على جسم تخضع لعملية جمع المتجهات ويعرف ناتج هذه العملية بمحصلة القوى ($\overleftarrow{\text{ق}}$)

(أو القوة المحصلة) حيث أن : $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ق}_١} + \overleftarrow{\text{ق}_٢} + \cdots$

فمثلًا

١ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ مقدارها ٨ نيوتن فى اتجاه الشرق ثم أثرت قوة إضافية $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$ مقدارها ٤ نيوتن فى اتجاه الشرق أيضًا.

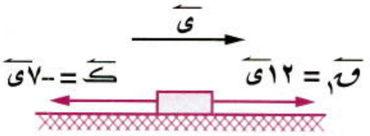


* اعتبر أن $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه الشرق

∴ $\overleftarrow{\text{ق}_١} = ٨ \, \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢} = ٤ \, \overleftarrow{\text{ى}}$ ∴ القوة المحصلة $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ق}_١} + \overleftarrow{\text{ق}_٢} = ٨ \, \overleftarrow{\text{ى}} + ٤ \, \overleftarrow{\text{ى}} = ١٢ \, \overleftarrow{\text{ى}}$

أى أن ق = ٥ نيوتن وتعمل فى اتجاه حركة الجسم

٢ عند محاولة تحريك جسم بقوة $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ مقدارها ١٢ نيوتن وكان مقدار قوة الاحتكاك ٧ نيوتن



* اعتبر أن $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسم

∴ قوة الدفع $\overleftarrow{\text{ق}_١} = ١٢ \, \overleftarrow{\text{ى}}$

، قوة الاحتكاك : $\overleftarrow{\text{ك}} = -٧ \, \overleftarrow{\text{ى}}$

∴ القوة المحصلة : $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ق}_١} + \overleftarrow{\text{ك}} = ١٢ \, \overleftarrow{\text{ى}} - ٧ \, \overleftarrow{\text{ى}} = ٥ \, \overleftarrow{\text{ى}}$

أى أن ق = ٥ نيوتن وتعمل فى اتجاه حركة الجسم

ملاحظة

تقاس القوة بوحدات : الداين - النيوتن - ثقل جرام (ث جم) - ثقل كيلوجرام (ث كجم)

مثال ٨

إذا أثرت القوى : $\overrightarrow{\text{ق}_1} = ٥\ \overrightarrow{\text{س}} + ٢\ \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2} = -٢\ \overrightarrow{\text{س}} + ٧\ \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_3} = ٣\ \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$

فى نقطة مادية. احسب مقدار واتجاه محصلة هذه القوى (القوى مقاسة بالنيوتن)

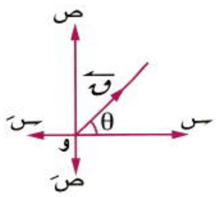
الحل

$\because$ محصلة القوى $\overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2} + \overrightarrow{\text{ق}_3}$

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{ق}} = (٥ - ٢ + ٣)\ \overrightarrow{\text{س}} + (٢ + ٧ - ١)\ \overrightarrow{\text{ص}} = ٦\ \overrightarrow{\text{س}} + ٨\ \overrightarrow{\text{ص}}$

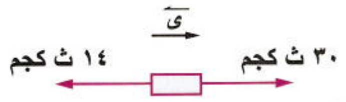
$\therefore$ مقدار المحصلة $= \|\overrightarrow{\text{ق}}\| = \sqrt{(٦)^2 + (٨)^2} = ١٠$ نيوتن

، اتجاه المحصلة $\theta = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{٨}{٦}\right) \approx ٥٣^\circ$



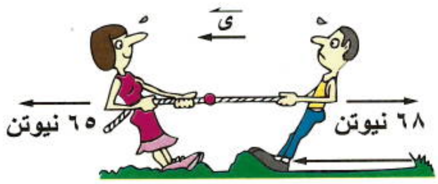
مثال ٩

اكتب بدلالة متجه الوحدة $\overrightarrow{\text{ى}}$ محصلة القوى الموضحة بكل مما يأتى :



شكل(١)

شكل(٢)



شكل(٣)

شكل(٤)

الحل

شكل (١) : $٣٠\ \overrightarrow{\text{ى}} - ١٤\ \overrightarrow{\text{ى}} = ١٦\ \overrightarrow{\text{ى}}$

شكل (٢) : $٤٧٠\ \overrightarrow{\text{ى}} + ٤٠٠\ \overrightarrow{\text{ى}} = ٨٧٠\ \overrightarrow{\text{ى}}$

شكل (٣) : $٦٥\ \overrightarrow{\text{ى}} - ٦٨\ \overrightarrow{\text{ى}} = -٣\ \overrightarrow{\text{ى}}$

شكل (٤) : $١٢٠\ \overrightarrow{\text{ى}} - ٧٥\ \overrightarrow{\text{ى}} = ٤٥\ \overrightarrow{\text{ى}}$

ملاحظتان

١ إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار ولهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين فإن القوة المحصلة $(\overrightarrow{\text{ق}}) = \overrightarrow{٠}$

٢ إذا كانت محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة $= \overrightarrow{٠}$ هذا يعنى أن مجموعة هذه القوى متزنة.

مثال ١٠

إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}}_{١} = (٥ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٢} = \text{أ}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٣} = (-٧ ، \text{ب})$ تؤثر في نقطة مادية

أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت :

١ محصلة القوى $= \overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ٢ مجموعة القوى متزنة.

الحل

$\because \overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{ق}}_{١} + \overrightarrow{\text{ق}}_{٢} + \overrightarrow{\text{ق}}_{٣} = (٥\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}) + (\text{أ}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ص}}) + (-٧\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{ص}})$

$= (٥ + \text{أ} - ٧)\,\overrightarrow{\text{س}} + (-٣ - ٢ + \text{ب})\,\overrightarrow{\text{ص}}$

١ $\because \overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ص}}$

$\therefore (٥ + \text{أ} - ٧)\,\overrightarrow{\text{س}} + (-٣ - ٢ + \text{ب})\,\overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ص}}$

$\therefore ٥ + \text{أ} - ٧ = ١$ $\therefore \text{أ} = ٣$

، $-٣ - ٢ + \text{ب} = -٤$ $\therefore \text{ب} = ١$

٢ $\because$ المجموعة متزنة $\therefore \overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore (٥ + \text{أ} - ٧)\,\overrightarrow{\text{س}} + (-٣ - ٢ + \text{ب})\,\overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore ٥ + \text{أ} - ٧ = ٠$ $\therefore \text{أ} = ٢$

، $-٣ - ٢ + \text{ب} = ٠$ $\therefore \text{ب} = ٥$

حاول بنفسك

إذا أثرت القوى $\overrightarrow{\text{ق}}_{١} = ٥\,\overrightarrow{\text{س}} + ١٩\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٢} = ٦\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٣} = -٤\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨\,\overrightarrow{\text{ص}}$ في نقطة مادية **احسب مقدار واتجاه محصلة هذه القوى (القوى مقاسة بالداين).**

٢ السرعة النسبية

- قد يتخيل راكب قطار أن قطاره يتحرك إلى الخلف عند النظر من النافذة إلى قطار آخر قد بدأ التحرك في نفس اتجاهه ولكنه يكتشف أن قطاره مازال ساكنًا عند النظر إلى الجهة الأخرى من المحطة (الثابتة)
- عندما ينظر راكب سيارة إلى سيارة أخرى أمامه تسير بسرعة أقل مقدارًا من سرعته تبدو له هذه السيارة وكأنها تتحرك نحوه (للخلف)
- عندما ينظر راكب سيارة إلى سيارة أخرى تتحرك في نفس اتجاهه فإنها تبدو له وكأنها تتحرك بسرعة بطيئة بينما عندما ينظر إلى سيارة أخرى تتحرك في عكس اتجاهه فإنها تبدو له وكأنها تتحرك بسرعة كبيرة.

متجة السرعة النسبية

إذا كان : $\overleftarrow{ع}_{أ}$ هو متجه سرعة الجسم (أ) الفعلية ، $\overleftarrow{ع}_{ب}$ هو متجه سرعة الجسم (ب) الفعلية فإن :

١ $\overleftarrow{ع}_{بأ}$ هو متجه السرعة النسبية للجسم (ب) بالنسبة إلى الجسم (أ) $\boxed{\overleftarrow{ع}_{بأ} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{أ}}$

«وهى السرعة التى يبدو الجسم (ب) متحركًا بها إذا اعتبر أن الجسم (أ) فى حالة سكون»

٢ $\overleftarrow{ع}_{أب}$ هو متجه السرعة النسبية للجسم (أ) بالنسبة إلى الجسم (ب) $\boxed{\overleftarrow{ع}_{أب} = \overleftarrow{ع}_{أ} - \overleftarrow{ع}_{ب}}$

«وهى السرعة التى يبدو الجسم (أ) متحركًا بها إذا اعتبر أن الجسم (ب) فى حالة سكون»

مثال ١١

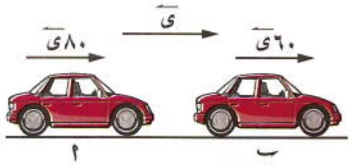
تتحرك سيارة (أ) على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/ساعة وتتحرك سيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٦٠ كم/ساعة. أوجد سرعة السيارة (أ) بالنسبة للسيارة (ب) إذا كانت :

١ السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد.

٢ السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين.

الحل

$\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة (أ)

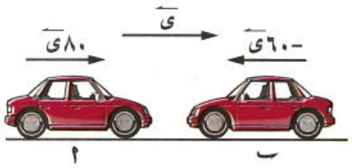


١ **السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد :**

∴ $\overleftarrow{ع}_{أ} = ٨٠\ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ب} = ٦٠\ \overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ع}_{أب} = \overleftarrow{ع}_{أ} - \overleftarrow{ع}_{ب} = ٨٠\ \overleftarrow{ى} - ٦٠\ \overleftarrow{ى} = ٢٠\ \overleftarrow{ى}$

أى أن راكب السيارة (ب) يشعر أن السيارة أ تتحرك بسرعة ٢٠ كم/س



٢ **السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين :**

∴ $\overleftarrow{ع}_{أ} = ٨٠\ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ب} = -٦٠\ \overleftarrow{ى}$

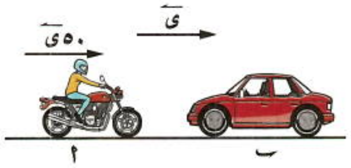
∴ $\overleftarrow{ع}_{أب} = \overleftarrow{ع}_{أ} - \overleftarrow{ع}_{ب} = ٨٠\ \overleftarrow{ى} - (-٦٠\ \overleftarrow{ى}) = ١٤٠\ \overleftarrow{ى}$

أى أن راكب السيارة (ب) يشعر أن السيارة (أ) متحركة بسرعة ١٤٠ كم/س

مثال ١٢

دراجة بخارية (أ) تسير بسرعة ٥٠ كم/س لاحظ راكبها أن سيارة (ب) تسير فى الاتجاه المضاد بسرعة ١١٠ كم/س بالنسبة له أوجد السرعة الفعلية للسيارة.

الحـل



نفرض أن $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الدراجة (أ)

$$\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} = ٥٠\,\overrightarrow{\text{ى}} \text{ ، } \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب أ}} = -١١٠\,\overrightarrow{\text{ى}}$$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} \qquad \therefore -١١٠\,\overrightarrow{\text{ى}} = \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}} - ٥٠\,\overrightarrow{\text{ى}}$$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}} = -١١٠\,\overrightarrow{\text{ى}} + ٥٠\,\overrightarrow{\text{ى}} = -٦٠\,\overrightarrow{\text{ى}}$$

أى أن السيارة (ب) تسير بسرعة ٦٠ كم/س فى الاتجاه المضاد لحركة الدراجة (أ)

حاول بنفسك

تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/س فإذا تحركت على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٣٠ كم/س

أوجد السرعة النسبية للدراجة بالنسبة للسيارة فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ الدراجة تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة.

٢ الدراجة تتحرك عكس اتجاه حركة السيارة.

تمارين 4 على تطبيقات على المتجهات

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا   من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

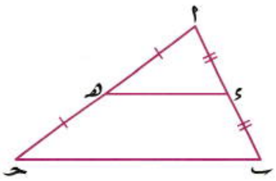
مسائل على التطبيقات الهندسية

(١) أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أب} \,//\, \overline{حـء}$ ، أ(٢ ، ١) ، ب(٣ ، ٢) ، حـ(٤ ، ٠)

فإذا كان : أ ب = ٢ حـ ء فإن النقطة ء = ……………

(أ) $\left(٣\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$ (ب) $\left(٣\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ (جـ) $\left(\frac{١}{٢} ، ٣\frac{١}{٢}\right)$ (د) $\left(-\frac{١}{٢} ، ٣\frac{١}{٢}\right)$

(٢) في الشكل المقابل :



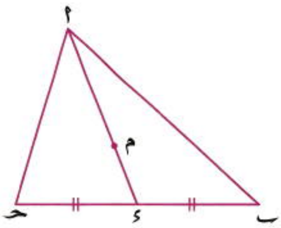
ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$

، $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{ن}$

فإن : $\overrightarrow{ءهـ}$ = ……………

(أ) $\overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن}$ (ب) $\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}$ (جـ) $\frac{١}{٢}\left(\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}\right)$ (د) $\frac{-١}{٢}\left(\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}\right)$

(٣) في الشكل المقابل :



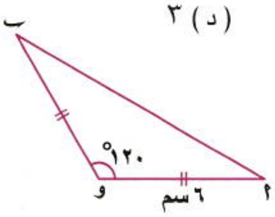
م نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ

، $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ} = ك\, \overrightarrow{أم}$

فإن : ك = ……………

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(٤) في الشكل المقابل :



و أ = و ب = ٦ سم ، ق(∠ و) = ١٢٠°

فإن : $\|\overrightarrow{أب}\|$ = …………… سم

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٦\sqrt{٢}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = \frac{-٣}{٢}\, \overrightarrow{بحـ}$ فإن : ……………

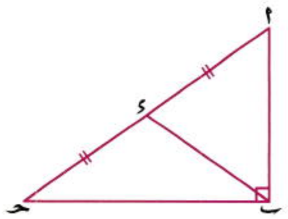
(أ) $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ يقعان على مستقيمان متوازيان مختلفان.

(ب) أ ب + ب حـ = أ حـ

(جـ) أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

(د) أ ، ب ، حـ رءوس مثلث مختلف الأضلاع.

(٦) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{ب ء}}$ متوسط في Δ أ ب جـ

القائم الزاوية في ب

فإن : ....

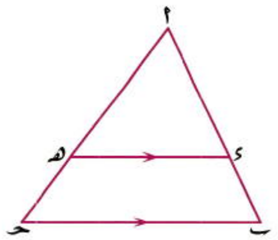
(أ) $\overrightarrow{\text{ب ء}} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

(ب) $\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{ب ء}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}}$

(د) $\|\,2\,\overrightarrow{\text{ب ء}}\,\| = \|\,\overrightarrow{\text{أ جـ}}\,\|$

(٧) في الشكل المقابل :



$\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ء هـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب جـ}} = \frac{4}{9}$

فإن : ....

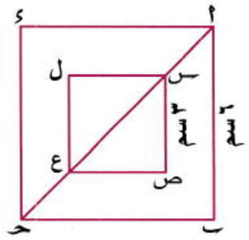
(أ) $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \frac{4}{9}\,\overrightarrow{\text{أ ب}}$

(ب) $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \frac{4}{9}\,\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أ هـ}} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

(د) $\overrightarrow{\text{ء هـ}} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

(٨) في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء ، س ص ع ل مربعان

طولا ضلعاهما ٦ سم ، ٣ سم على الترتيب

فإن : $\overrightarrow{\text{أ جـ}} =$ ....

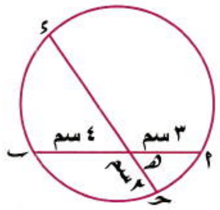
(أ) $6\sqrt{2}$

(ب) $\sqrt{2}\,\overrightarrow{\text{أ ب}}$

(جـ) $\sqrt{2}\,\overrightarrow{\text{س ع}}$

(د) $2\,\overrightarrow{\text{س ع}}$

(٩) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران في الدائرة

، $\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{جـ ء}} = \{\text{هـ}\}$

فإن : $\overrightarrow{\text{جـ ء}} =$ ....

(أ) $6\,\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$

(ب) $3\,\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$

(جـ) $4\,\overrightarrow{\text{هـ ء}}$

(د) $4\,\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$

مسائل على التطبيقات الفيزيائية

(١) في الشكل المقابل :

محصلة القوى الموضحة بدلالة

متجه الوحدة $\overrightarrow{\text{ى}} =$ ....

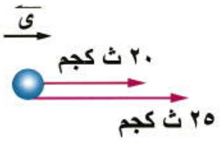
(أ) $8\,\overrightarrow{\text{ى}}$

(ب) $-8\,\overrightarrow{\text{ى}}$

(جـ) $32\,\overrightarrow{\text{ى}}$

(د) $-32\,\overrightarrow{\text{ى}}$

(٢) فى الشكل المقابل :

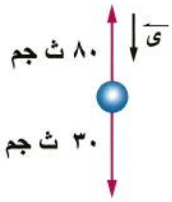


محصلة القوى الموضحة بدلالة

متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ = ...

(أ) ٥ $\overleftarrow{ى}$ (ب) −٥ $\overleftarrow{ى}$ (جـ) ٤٥ $\overleftarrow{ى}$ (د) −٤٥ $\overleftarrow{ى}$

(٣) فى الشكل المقابل :



محصلة القوى الموضحة بدلالة

متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ = ...

(أ) ٥٠ $\overleftarrow{ى}$ (ب) −٥٠ $\overleftarrow{ى}$

(جـ) ١١٠ $\overleftarrow{ى}$ (د) −١١٠ $\overleftarrow{ى}$

(٤) مقدار محصلة القوى المؤثرة على جسم عند محاولة تحريكه بقوة مقدارها ٧٠ نيوتن وكان مقدار قوة الاحتكاك ٥٥ نيوتن تساوى .... نيوتن.

(أ) ٧٠ (ب) ٥٥ (جـ) ١٢٥ (د) ١٥

(٥) إذا كان : $\overleftarrow{ق_1}$ = $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ تؤثران فى نقطة مادية

فإن : معيار القوة المحصلة = ... وحدة قوة.

(أ) ٢ $\sqrt{١٠}$ (ب) ٨ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٤

(٦) إذا كان : $\overleftarrow{ق_1}$ = (أ ، ب) ، $\overleftarrow{ق_2}$ = −٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ تؤثران فى نقطة مادية وكانت المجموعة متزنة

فإن : أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٧

(٧) إذا كانت : $\overleftarrow{ع_{أ}}$ = ١٢ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_{ب}}$ = ٨ $\overleftarrow{ى}$ فإن : $\overleftarrow{ع_{ب أ}}$ = ...

(أ) ٢٠ $\overleftarrow{ى}$ (ب) −٢٠ $\overleftarrow{ى}$ (جـ) ٤ $\overleftarrow{ى}$ (د) −٤ $\overleftarrow{ى}$

(٨) إذا كانت : $\overleftarrow{ع_{أ}}$ = ١٢٠ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_{ب}}$ = −٨٠ $\overleftarrow{ى}$ فإن : $\overleftarrow{ع_{أ ب}}$ = ...

(أ) ٤٠ $\overleftarrow{ى}$ (ب) ٢٠٠ $\overleftarrow{ى}$ (جـ) −٢٠٠ $\overleftarrow{ى}$ (د) −٤٠ $\overleftarrow{ى}$

(٩) إذا كان : $\overleftarrow{ع_{أ ب}}$ = ٧٥ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_{أ}}$ = −٦٠ $\overleftarrow{ى}$ فإن : $\overleftarrow{ع_{ب}}$ = ...

(أ) ١٣٥ $\overleftarrow{ى}$ (ب) −١٣٥ $\overleftarrow{ى}$ (جـ) ١٥ $\overleftarrow{ى}$ (د) −١٥ $\overleftarrow{ى}$

(١٠) يتحرك راكب دراجة أ على طريق مستقيم أفقى بسرعة ١٤ كم/ساعة فإذا قابل راكب آخر ب يتحرك بسرعة ٢٠ كم/ساعة فى الاتجاه المضاد. فإن معيار السرعة النسبية بينهما = ... كم/س

(أ) ٢٠ (ب) ١٤ (جـ) ٣٤ (د) ٦

(١١) تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س ، إذا تحركت دراجة بخارية بسرعة ٤٠ كم/س على نفس الطريق. فإن معيار سرعة الدراجة البخارية بالنسبة إلى السيارة عندما تتحركان فى نفس الاتجاه = ... كم/س

(أ) ٥٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٩٠ (د) ٤٠

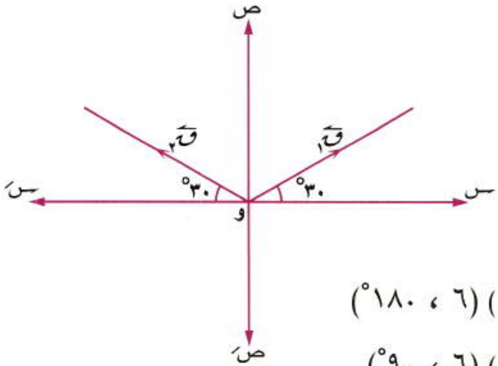
(١٢) إذا أثرت القوتان : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ − ٦ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = −٦ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ فى نقطة مادية فإن محصلتهما $\overrightarrow{ق}$ = ...

(أ) (٨ ، ١٣٥°) (ب) (٢ $\sqrt{٢}$ ، ٤٥°) (جـ) (٢ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) (د) (٨ ، ٤٥°)

(١٣) إذا كانت القوى : $\overrightarrow{ق_١}$ = (٧ ، −٢) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = (−٤ ، ب) تؤثر فى نقطة مادية ومتزنة فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −٣ (د) −١

(١٤) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $ق_١$ = $ق_٢$ = ٣ نيوتن

فإن محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ هى $\overrightarrow{ح}$ = ...

(أ) (٣ ، ١٨٠°) (ب) (٦ ، ١٨٠°)

(جـ) (٣ ، ٩٠°) (د) (٦ ، ٩٠°)

(١٥) إذا أثرت القوتان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فى نقطة مادية وكانت : $ق_١$ = ٣٤ ث.جم وتعمل فى اتجاه الشمال الشرقى ، $ق_٢$ = ٣٤ ث.جم وتعمل فى اتجاه الجنوب الغربى فإن محصلة القوتين = ...

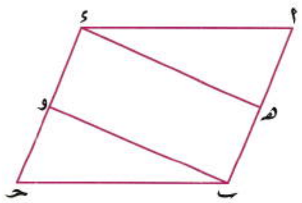
(أ) ٦٨ ث.جم فى اتجاه الشمال. (ب) ٣٤ $\sqrt{٢}$ ث.جم فى اتجاه الشمال الغربى.

(جـ) ٦٨ ث.جم فى اتجاه الشمال الغربى. (د) $\overline{\text{صفر}}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

مسائل على التطبيقات الهندسية

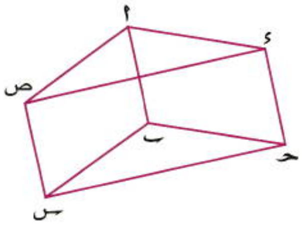
١ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، و منتصف $\overline{ء جـ}$

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل ء هـ ب و متوازى أضلاع.

٢ 📖 **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء ، أ ب س ص متوازيا أضلاع.

أثبت باستخدام المتجهات أن :

الشكل حـ س ص ء هو متوازى أضلاع.

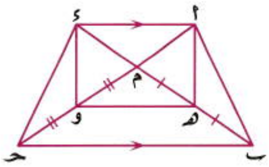
---

٣ إذا كان : س ص ع ل متوازى أضلاع ، هـ $\in$ $\overline{\text{س ل}}$ ، و $\in$ $\overline{\text{ص ع}}$

بحيث : هـ س = ع و أثبت باستخدام المتجهات أن : $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{ص ل}}$ ينصف كل منهما الآخر.

---

٤ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، أ ء = $\frac{1}{2}$ ب حـ وتقاطع قطراه فى م

فإذا كانت : هـ ، و منتصفى $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م حـ}}$ على الترتيب

أثبت باستخدام المتجهات أن : أ هـ و ء متوازى أضلاع.

---

٥ 📖 أ ب حـ ء شكل رباعى ، إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$ **فأثبت أن :** أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

---

٦ **استخدم المتجهات لإثبات أن :** القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين متقابلين من أضلاع متوازى أضلاع توازى الضلعين الآخرين وطولها يساوى طول كل منهما.

---

٧ 📖 **باستخدام المتجهات أثبت أن :** إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى فإن الضلعين الآخرين يكونان متساويين ومتوازيين أيضًا أى أن الشكل يكون متوازى أضلاع.

---

٨ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

باستخدام المتجهات أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

---

٩ 📖 إذا كان : أ (٦ ، ٥) ، ب (٨ ، −٣) ، حـ (−٢ ، −٥) هى رؤوس المثلث أ ب حـ

فأوجد باستخدام المتجهات إحداثيى نقطة تقاطع متوسطاته. «(٤ ، −١)»

---

١٠ 📖 إذا كانت : أ = (٥ ، ١) ، ب = (٢ ، ٥) ، حـ = (−٢ ، ٣) ، ء = (−٥ ، −٤)

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف.

---

١١ 📖 **باستخدام المتجهات أثبت أن النقط :**

أ = (٣ ، ٤) ، ب = (١ ، −١) ، حـ = (−٤ ، −٣) ، ء = (−٢ ، ٢) هى رؤوس معين.

١٢ إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا فيه :

أ = (١ ، −٢) ، ب = (٩ ، ٠) ، حـ = (٨ ، ٤) ، ء = (٠ ، ٢)

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل أ ب حـ ء مستطيل ثم أوجد محيطه ومساحته. «$٦\sqrt{١٧}$ ، ٣٤»

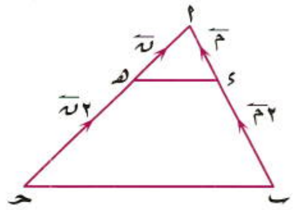
---

١٣ **باستخدام المتجهات أثبت أن النقط :** أ (١ ، ٣) ، ب (٦ ، ١) ، حـ (٤ ، −٤) ، ء (−١ ، −٢)

هى رؤوس مربع ، وأوجد مساحته. «٢٩»

---

١٤ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أحـ}}$

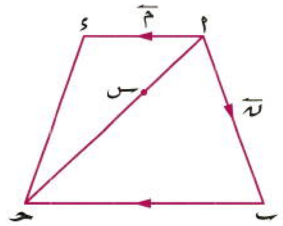
$\overrightarrow{\text{ءأ}}$ = $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـأ}}$ = $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{بء}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـهـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ن}}$

أوجد : $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$

ثم برهن أن : $\overline{\text{بحـ}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ «٣ ($\overrightarrow{\text{م}}$ − $\overrightarrow{\text{ن}}$)»

---

١٥ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف ، $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$

، أء = $\frac{١}{٢}$ بحـ ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ = $\overrightarrow{\text{م}}$

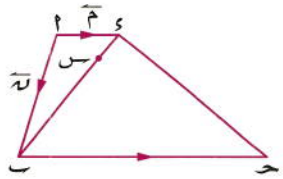
(١) عبر بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ عن كل من : $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءب}}$

(٢) إذا كانت : س ∈ $\overline{\text{أحـ}}$ حيث أس = $\frac{١}{٣}$ أحـ

أثبت أن النقط : ء ، س ، ب تقع على استقامة واحدة.

---

١٦ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$

، بحـ = ٤ أء ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ = $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ن}}$

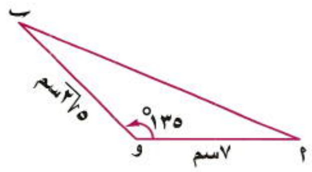
(١) عبر بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ عن كل من : $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{بء}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$

(٢) إذا كانت : س ∈ $\overline{\text{ءب}}$ حيث : ءس = $\frac{١}{٤}$ س ب

أثبت أن النقط : أ ، س ، حـ تقع على استقامة واحدة.

---

١٧ في الشكل المقابل :



و أ ب مثلث فيه : و أ = ٧ سم ، و ب = $٥\sqrt{٢}$ سم

، ق (∠ أ و ب) = °١٣٥

أوجد باستخدام المتجهات : طول $\overline{\text{أب}}$ «١٣ سم»

١٨ 📖 أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب.

باستخدام المتجهات أثبت أن :

(١) الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع.

(٢) محيط الشكل س ص ع ل يساوى مجموع طولى قطرى الشكل الرباعى.

مسائل على التطبيقات الفيزيائية

١ إذا أثرت القوى : $\overleftarrow{ق_1} = ٢ \overleftarrow{س} - ٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ٤ \overleftarrow{س} + ٧ \overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_3} = ٣ \overleftarrow{س} + ٨ \overleftarrow{ص}$ فى نقطة مادية. **أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.**

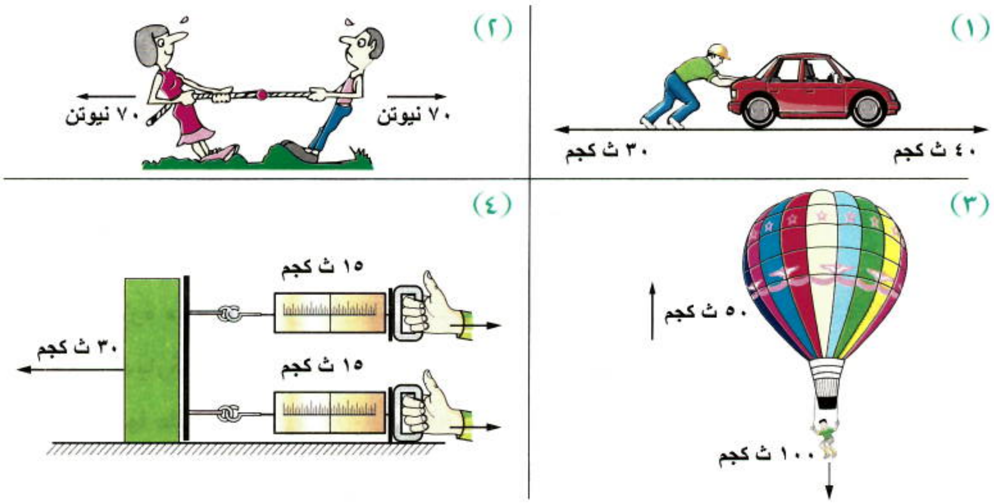
(القوى مقيسة بالنيوتن) «١٥ نيوتن ، ٤٨ً ٧َ ٥٣°»

---

٢ إذا أثرت القوى : $\overleftarrow{ق_1} = (-٦ ، ٦)$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ٩ \overleftarrow{س} + ١٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3} = (٢ ، -٧)$ فى نقطة مادية حيث إن القوى مقيسة بالداين. **أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.** «١٣ داين ، ٤٨ً ٢٢َ ٦٧°»

---

٣ 📖 **أوجد محصلة القوى المؤثرة $\overleftarrow{ق}$ فى كل مما يأتى :**



---

٤ 📖 **فى كلٍّ مما يأتى القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثران فى نقطة مادية ، وضح مقدار واتجاه محصلة كل قوتين منها :**

(١) $ق_1$ = ١٥ نيوتن فى اتجاه الشرق ، $ق_2$ = ٤٠ نيوتن فى اتجاه الغرب.

(٢) $ق_1$ = ٥٠ داين تعمل فى اتجاه ٦٠° غرب الشمال ، $ق_2$ = ٥٠ داين تعمل فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

(٣) $ق_1$ = ٣٠ نيوتن تعمل فى اتجاه ٢٠° شرق الشمال ، $ق_2$ = ٣٠ نيوتن تعمل فى اتجاه ٧٠° شمال الشرق.

٥ إذا كانت القوى : $\overrightarrow{ق_1} = ٢ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٥ \overrightarrow{س} + ب \overrightarrow{ص}$

تؤثر فى نقطة مادية **أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت محصلة هذه القوى $\overrightarrow{ق}$:**

(١) $\overrightarrow{ق} = ٥ \overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص}$ (٢) $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{٠}$ «−٢ ، −٦ ، −٧ ، −٤»

٦ إذا كانت القوى : $\overrightarrow{ق_1} = ٧ \overrightarrow{س} - ٥ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_3} = -٤ \overrightarrow{س} + (ب - ٣) \overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية **أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت :**

(١) محصلة مجموعة القوى تساوى $٤ \overrightarrow{س} - ٧ \overrightarrow{ص}$ (٢) مجموعة القوى متزنة. «١ ، −٢ ، −٣ ، ٥»

٧ تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ١٤٠ كم/س وتتحرك السيارة ب على نفس الطريق بسرعة ١١٠ كم/س. **أوجد سرعة السيارة أ بالنسبة إلى السيارة ب عندما :**

(١) تتحرك السيارتان فى اتجاه واحد.

(٢) تتحرك السيارتان فى اتجاهين متضادين. «٣٠ كم/س ، ٢٥٠ كم/س»

٨ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٧٥ كم/س فإذا تحركت على الطريق نفسه دراجة بخارية بسرعة ٤٥ كم/س. **فأوجد سرعتها بالنسبة للسيارة فى كلٍ من الحالتين الآتيتين :**

(١) الدراجة تسير فى عكس اتجاه حركة السيارة.

(٢) الدراجة تسير فى نفس اتجاه حركة السيارة. «١٢٠ كم/س ، ٣٠ كم/س»

٩ تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على الطريق الصحراوى «القاهرة – الإسكندرية» بسرعة ٣٠ كم/س راقبت هذه السيارة حركة شاحنة قادمة فى الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم/س.

فما هى السرعة الفعلية للشاحنة ؟ «٨٠ كم/س»

١٠ تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على أحد الطرق الصحراوية بسرعة ٤٠ كم/س. راقبت هذه السيارة حركة سيارة قادمة فى الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١٣٥ كم/س. فإذا كانت أقصى سرعة مسموح بها على هذا الطريق ١٠٠ كم/س.

هل السيارة القادمة مخالفة للسرعة المقررة أم لا ؟ فسر إجابتك. «غير مخالفة»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1} = (٦ ، \frac{٢\pi}{٣})$ ، $\overrightarrow{ق_2} = (٦ ، \frac{٤\pi}{٣})$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٩ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$ مقدرة بالداين

فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... داين

(أ) ١٣ (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) $٦\sqrt{٣}$

(٢) إذا كانت القوى $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = \left(8\sqrt{2} \text{ ، } \frac{3\pi}{4}\right)$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = \text{أ}\,\overrightarrow{\text{س}} + 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{ق}}_3 = -5\,\overrightarrow{\text{س}} + (\text{ب} + 2)\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى نقطة واحدة والمجموعة فى حالة اتزان

فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(أ) ١٣ (ب) -١٣ (جـ) ١ (د) -١

(٣) إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = \overrightarrow{\text{س}} - 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = 3\,\overrightarrow{\text{س}} + 6\,\overrightarrow{\text{ص}}$ فإن القوة $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ التى تجعل محصلة القوى الثلاث هى متجه الوحدة فى اتجاه الموجب لمحور الصادات تساوى ....

(أ) $-3\,\overrightarrow{\text{س}} - 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$ (ب) $-4\,\overrightarrow{\text{س}} - 2\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(جـ) $-5\,\overrightarrow{\text{س}} - 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$ (د) $-4\,\overrightarrow{\text{س}} - 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$

(٤) مجموعة مكونة من ١٠٠ قوة مقدار كل قوة ١٠ نيوتن تؤثر فى نقطة واحدة، قياس الزاوية بين كل قوة والتى تليها $\frac{\pi}{50}$ فإن معيار محصلة هذه القوى = ... نيوتن.

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠٠ (جـ) ١٠ (د) صفر

---

٢ إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = 5\,\overrightarrow{\text{س}} + 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = (7 + \text{أ})\,\overrightarrow{\text{س}} + 6\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3 = -14\,\overrightarrow{\text{س}} + (3 - \text{ب})\,\overrightarrow{\text{ص}}$

ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت القوة المحصلة بالصورة القطبية $(\overrightarrow{\text{ح}}) = \left(10\sqrt{2} \text{ ، } 135^\circ\right)$

أوجد قيمتى : أ ، ب «-٨ ، ٢»

---

٣ قامت سيارة (أ) متحركة على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) أمامها تسير فى نفس الاتجاه فوجدتها ٢٠ كم/ساعة ولما خفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف وأعادت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة (ب) أصبحت ٥٠ كم/ساعة. فما هى السرعة الفعلية لكلٍ من السيارتين ؟ «٦٠ كم/س ، ٨٠ كم/س»

الوحدة 5

الخط المستقيم

دروس الوحدة

الدرس 1 تقسيم قطعة مستقيمة.

الدرس 2 معادلة الخط المستقيم.

الدرس 3 قياس الزاوية بين مستقيمين.

الدرس 4 طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.

الدرس 5 المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

نواتج التعلّم

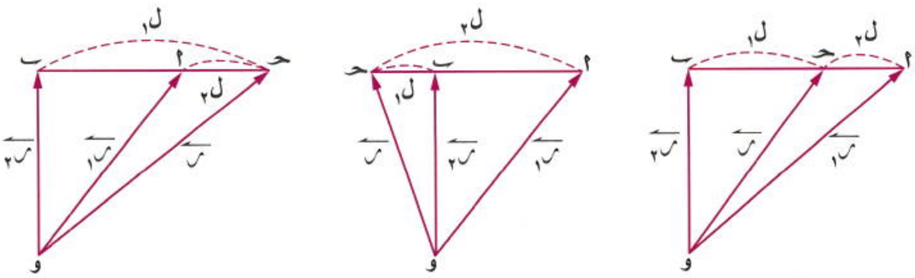
فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يوجد إحداثيى نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم.
- يوجد النسبة التى تنقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج إذا علم إحداثيا نقطة التقسيم.
- يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد المعادلة المتجهة, والمعادلات البارامترية ، والمعادلة الكارتيزية للخط المستقيم.
- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات.
- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.
- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.
- يوجد المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

الدرس 1 تقسيم قطعة مستقيمة

• إذا كانت : $\overleftarrow{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة موجهة $\subset$ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ فإن أى نقطة ح $\in$ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ إلى قطعتين مستقيمتين موجهتين $\overleftarrow{\text{أح}}$ ، $\overleftarrow{\text{حب}}$ بحيث $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{أح}} + \overleftarrow{\text{حب}}$

وإذا كانت النقطة ح تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة معلومة $ل_2 : ل_1$ وكانت $\overleftarrow{ر_1}$ ، $\overleftarrow{ر_2}$ ، $\overleftarrow{ر}$ هى المتجهات الممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{وأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{وب}}$ ، $\overleftarrow{\text{وح}}$ حيث (و) هى نقطة الأصل.



شكل(٣) شكل(٢) شكل(١)

فإن : $\frac{\text{أح}}{\text{حب}} = \frac{ل_2}{ل_1}$

$\therefore ل_1 \cdot \overleftarrow{\text{أح}} = ل_2 \cdot \overleftarrow{\text{حب}}$

$\therefore ل_1 (\overleftarrow{\text{ح}} - \overleftarrow{\text{أ}}) = ل_2 (\overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{ح}})$

$\therefore ل_1 (\overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ر_1}) = ل_2 (\overleftarrow{ر_2} - \overleftarrow{ر})$

$\therefore ل_1 \overleftarrow{ر} - ل_1 \overleftarrow{ر_1} = ل_2 \overleftarrow{ر_2} - ل_2 \overleftarrow{ر}$

$\therefore ل_1 \overleftarrow{ر} + ل_2 \overleftarrow{ر} = ل_1 \overleftarrow{ر_1} + ل_2 \overleftarrow{ر_2}$

$\therefore \overleftarrow{ر} (ل_1 + ل_2) = ل_1 \overleftarrow{ر_1} + ل_2 \overleftarrow{ر_2}$

$\therefore \boxed{\overleftarrow{ر} = \frac{ل_1 \overleftarrow{ر_1} + ل_2 \overleftarrow{ر_2}}{ل_1 + ل_2}}$ وتسمى بالصورة المتجهة.

ملاحظـات

١ إذا كانت : $\text{حـ} \in \overline{\text{أب}}$ فإن «حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الداخل»

ويكون $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـب}}$ لهما نفس الاتجاه وتكون القيمتان $ل_١$ ، $ل_٢$ موجبتين

أى أن $\frac{ل_٢}{ل_١} > ٠$ **[شكل(١)]**

٢ إذا كانت : $\text{حـ} \in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\text{حـ} \notin \overline{\text{أب}}$ فإن «حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الخارج» ويكون $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـب}}$ لهما اتجاهان متضادان وتكون إحدى القيمتين $ل_١$ ، $ل_٢$ موجبة والأخرى سالبة

أى أن $\frac{ل_٢}{ل_١} < ٠$ وفى هذه الحالة يكون لدينا احتمالان :

أولًا : $|ل_٢| > |ل_١|$ تكون $\text{حـ} \in \overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\text{حـ} \notin \overline{\text{أب}}$ **[شكل(٢)]**

ثانيًا : $|ل_٢| < |ل_١|$ تكون $\text{حـ} \in \overleftarrow{\text{بأ}}$ ، $\text{حـ} \notin \overline{\text{أب}}$ **[شكل(٣)]**

٣ $\frac{\|\overleftarrow{\text{أحـ}}\|}{\|\overleftarrow{\text{حـب}}\|} = \left|\frac{ل_٢}{ل_١}\right|$

أى أن $\frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}} = \left|\frac{ل_٢}{ل_١}\right|$

- إذا فرضنا أن أ = $(س_١ ، ص_١)$ ، ب = $(س_٢ ، ص_٢)$ ، حـ = $(س ، ص)$

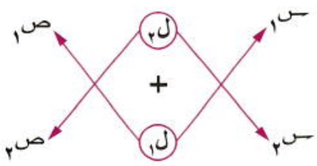
$$\because \overleftarrow{ر} = \frac{ل_١ \overleftarrow{ر_١} + ل_٢ \overleftarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$$

$$\therefore (س ، ص) = \frac{ل_١ (س_١ ، ص_١) + ل_٢ (س_٢ ، ص_٢)}{ل_١ + ل_٢} = \frac{(ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢ ، ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢)}{ل_١ + ل_٢}$$

$$\therefore \boxed{(س ، ص) = \left(\frac{ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢}{ل_١ + ل_٢}\right)}$$

وتسمى بالصورة الإحداثية.

- يمكن الاستعانة بالشكل المجاور لتبسيط إيجاد الصورة الإحداثية.



مثال ١

إذا كانت : أ = (١ ، −٤) ، ب = (٦ ، ٦) أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

الحل

∵ حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الداخل

∴ $\frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ $\overleftarrow{\text{ر}} = \frac{\text{ل}_١ \overleftarrow{\text{ر}_١} + \text{ل}_٢ \overleftarrow{\text{ر}_٢}}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

لاحظ أن

حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$

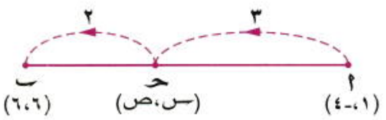
∴ $\overleftarrow{\text{ر}_١}$ = أ (١ ، −٤)

، $\overleftarrow{\text{ر}_٢}$ = ب (٦ ، ٦)

∴ $\overleftarrow{\text{ر}} = \frac{٢\,(١ \text{ ، } ٤-) + ٣\,(٦ \text{ ، } ٦)}{٢ + ٣} = \left(\frac{٢ \times ١ + ٣ \times ٦}{٥} \text{ ، } \frac{٢ \times ٤- + ٣ \times ٦}{٥}\right) = (٤ \text{ ، } ٢)$

∴ حـ = (٤ ، ٢)

حل آخر باستخدام المتجهات :



∵ حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

∴ $\frac{\overleftarrow{\text{أحـ}}}{\overleftarrow{\text{حـب}}} = \frac{٣}{٢}$ ∴ ٢ $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{حـب}}$

∴ ٢ (س − ١ ، ص + ٤) = ٣ (٦ − س ، ٦ − ص)

∴ (٢ س − ٢ ، ٢ ص + ٨) = (١٨ − ٣ س ، ١٨ − ٣ ص)

∴ ٢ س − ٢ = ١٨ − ٣ س ومنها س = ٤

، ٢ ص + ٨ = ١٨ − ٣ ص ومنها ص = ٢

∴ حـ = (٤ ، ٢)

مثال ٢

إذا كانت : أ = (٢ ، −٣) ، ب = (١ ، −١) أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overleftarrow{\text{بأ}}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

الحل

∵ حـ تقسم $\overleftarrow{\text{بأ}}$ من الخارج

∴ $\frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = \frac{٤-}{٣}$

، ∵ $\overleftarrow{\text{ر}} = \frac{\text{ل}_١ \overleftarrow{\text{ر}_١} + \text{ل}_٢ \overleftarrow{\text{ر}_٢}}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

لاحظ أن

حـ تقسم $\overleftarrow{\text{بأ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ر}_١}$ = ب (١ ، −١)

، $\overleftarrow{\text{ر}_٢}$ = أ (٢ ، −٣)

∴ $\overleftarrow{\text{ر}} = \frac{٣\,(١ \text{ ، } ١-) + (٤-)\,(٢ \text{ ، } ٣-)}{٣ + (٤-)} = \left(\frac{٣ \times ١ - ٤ \times ٢}{١-} \text{ ، } \frac{٣ \times ١- - ٤ \times ٣-}{١-}\right) = (٥ \text{ ، } ٩-)$

∴ حـ = (٥ ، −٩)

* لاحظ أننا اعتبرنا نسبة التقسيم $\text{ل}_٢$: $\text{ل}_١$ = −٤ : ٣ ولو اعتبرناها ٤ : −٣ فسوف نحصل على نفس النتيجة.

$\overleftarrow{\text{ر}} = \frac{٣-\,(١ \text{ ، } ١-) + ٤\,(٢ \text{ ، } ٣-)}{٣- + ٤} = (٥ \text{ ، } ٩-)$

حـل آخر باستخدام المتجهات :

∵ حـ تقسم $\overline{\text{ب أ}}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ٣ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$

∴ ٣ (س − ١ ، ص + ١) = ٤ (س − ٢ ، ص + ٣)

∴ (٣ س − ٣ ، ٣ ص + ٣) = (٤ س − ٨ ، ٤ ص + ١٢)

∴ ٣ س − ٣ = ٤ س − ٨ ومنها س = ٥

، ٣ ص + ٣ = ٤ ص + ١٢ ومنها ص = −٩ ∴ حـ = (٥ ، −٩)

مثال ٣

إذا كانت : أ = (٣ ، −١) ، ب = (٥ ، ٢) وكانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بحيث : ٢ أ حـ = ٣ حـ ب

فأوجد إحداثيي حـ إذا كان : ١ التقسيم من الداخل. ٢ التقسيم من الخارج.

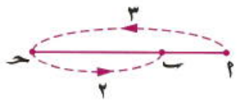
الحـل

∵ ٢ أ حـ = ٣ حـ ب ∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\left|\frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١}\right| = \frac{٣}{٢}$

١ إذا كان التقسيم من الداخل فإن : $\frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = \frac{٣}{٢}$

$$\overrightarrow{\text{ر}} = \frac{\text{ل}_١ \overrightarrow{\text{ر}_١} + \text{ل}_٢ \overrightarrow{\text{ر}_٢}}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢} = \frac{٢ (٣ ، -١) + ٣ (٥ ، ٢)}{٢ + ٣} = \left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$$

∴ حـ = $\left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$



٢ إذا كان التقسيم من الخارج فإن : $\frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = -\frac{٣}{٢} = \frac{٣}{-٢}$

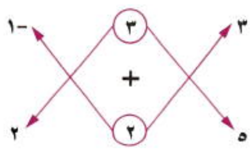
$$\overrightarrow{\text{ر}} = \frac{\text{ل}_١ \overrightarrow{\text{ر}_١} + \text{ل}_٢ \overrightarrow{\text{ر}_٢}}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢} = \frac{-٢ (٣ ، -١) + ٣ (٥ ، ٢)}{-٢ + ٣} = (٩ ، ٨)$$

∴ حـ = (٩ ، ٨)

• **لاحظ أن :** $|\text{ل}_٢| > |\text{ل}_١|$ وعلى ذلك فإن : حـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$

حـل آخر باستخدام الصورة الإحداثية لنقطة التقسيم :

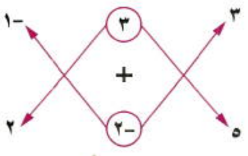
$$\text{حـ} = \left(\frac{\text{ل}_١ \text{س}_١ + \text{ل}_٢ \text{س}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢} ، \frac{\text{ل}_١ \text{ص}_١ + \text{ل}_٢ \text{ص}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}\right)$$



١ أ = (٣ ، −١) ، ب = (٥ ، ٢) ، $\text{ل}_٢ : \text{ل}_١$ = ٣ : ٢

$$\therefore \text{حـ} = \left(\frac{٢ \times ٣ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times (-١) + ٣ \times ٢}{٢ + ٣}\right) = \left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$$

٢ أ = (٣ ، −١) ، ب = (٥ ، ٢) ، ل١ : ل٢ = ٣ : −٢



$$\therefore ح = \left(\frac{-٢ \times ٣ + ٣ \times ٥}{-٢ + ٣} ، \frac{-٢ \times (-١) + ٣ \times ٢}{-٢ + ٣}\right) = (٩ ، ٨)$$

حاول بنفسك

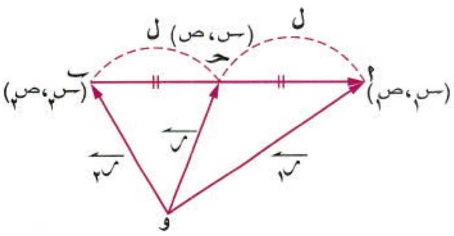
أ = (١ ، ٢) ، ب = (٨ ، −٥) أوجد إحداثيي النقطة ح التي تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ إذا كان:

١ التقسيم من الداخل.   ٢ التقسيم من الخارج.

ملاحظة

إذا كانت: ح منتصف $\overleftarrow{أب}$ حيث: أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

فإن: ل١ = ل٢ = ل



$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{ل\,\overleftarrow{ر_١} + ل\,\overleftarrow{ر_٢}}{ل + ل} = \frac{ل\,(\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢})}{٢\,ل}$$

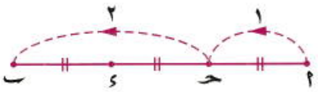
$$\therefore \boxed{\overleftarrow{ر} = \frac{\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢}}{٢}}$$ الصورة المتجهة

، $$\boxed{(س ، ص) = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)}$$ الصورة الإحداثية.

مثال ٤

إذا كانت: أ = (−١ ، ٤) ، ب = (٥ ، −٢) فأوجد إحداثيات النقطتين ح ، ء اللتين تقسمان $\overleftarrow{أب}$ إلى ثلاثة أجزاء متساوية الطول.

الحل



$\because$ ح تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل بنسبة $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{١}{٢}$

$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{٢\,(-١ ، ٤) + (٥ ، -٢)}{٢ + ١} = (١ ، ٢) \qquad \therefore ح = (١ ، ٢)$$

، $\because$ ء منتصف $\overleftarrow{حب}$

$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢}}{٢} = \frac{(١ ، ٢) + (٥ ، -٢)}{٢} = (٣ ، ٠)$$

$\therefore$ ء = (٣ ، ٠) ويمكن إيجاد ء باعتبار أنها تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل بنسبة ل١ : ل٢ = ٢ : ١

مثال ٥

أب حء متوازي أضلاع فيه: أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٠ ، ٣) ، ح = (−٢ ، −١)

أوجد إحداثيي الرأس ء

الحل

نفرض أن : ء = (س ، ص)

، ∵ القطران ينصف كل منهما الآخر فى متوازى الأضلاع.

∴ نقطة منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ = نقطة منتصف $\overline{\text{بء}}$

∴ $\frac{\text{٥} - \text{٢}}{\text{٢}} = \frac{\text{٠} + \text{س}}{\text{٢}}$ ∴ س = ٣

، $\frac{\text{٢} - \text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣} + \text{ص}}{\text{٢}}$

∴ ص = −٢ ∴ ء = (٣ ، −٢)

ملاحظات

* لإثبات أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة فإننا نثبت :

إما $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، ك ≠ ٠ (باستخدام المتجهات)

أو ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ (باستخدام الميل)

أو أ ب = ب حـ + أ حـ (باستخدام البُعد بين نقطتين حيث أ ب الطول الأكبر)

* إذا كانت حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة $\text{ل}_{\text{٢}}$: $\text{ل}_{\text{١}}$ فيكون التقسيم :

١ من الداخل إذا كان $\frac{\text{ل}_{\text{٢}}}{\text{ل}_{\text{١}}}$ موجبة. ٢ من الخارج إذا كانت $\frac{\text{ل}_{\text{٢}}}{\text{ل}_{\text{١}}}$ سالبة.

مثال ٦

أثبت أن النقط : أ = (١ ، −٣) ، ب = (−٢ ، −٩) ، حـ = (٥ ، ٥) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :

١ النسبة التى تقسم بها حـ القطعة $\overline{\text{أب}}$ ٢ النسبة التى تقسم بها أ القطعة $\overline{\text{بحـ}}$

الحل

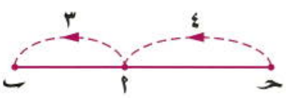
∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، −٩) − (١ ، −٣) = (−٣ ، −٦) = −٣ (١ ، ٢)

، $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، ٥) − (١ ، −٣) = (٤ ، ٨) = ٤ (١ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}} = -\frac{\text{٤}}{\text{٣}} \overrightarrow{\text{أب}}$

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة ، ب ، حـ فى جهتين مختلفتين من أ

، $\frac{\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ **وينتج أن :**



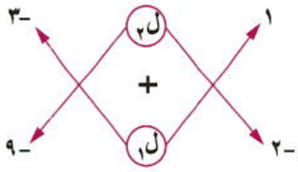
١ حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.

٢ أ تقسم $\overline{\text{بحـ}}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

حل آخر باستخدام الميل :

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-٩ + ٣}{-٢ - ١}$ = ٢ ، ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ = $\frac{٥ + ٣}{٥ - ١}$ = ٢

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

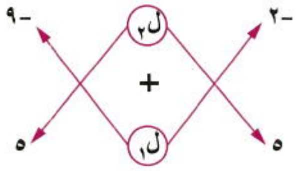


[١] نفرض أن حـ (٥ ، ٥) تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة $ل_٢ : ل_١$

∴ $\frac{ل_١ - ٢ ل_٢}{ل_١ + ل_٢} = ٥$ ∴ $ل_١ - ٢ ل_٢ = ٥ ل_١ + ٥ ل_٢$

∴ $٤ ل_١ = -٧ ل_٢$ ∴ $\frac{ل_٢}{ل_١} = -\frac{٤}{٧}$ (سالبة)

∴ حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.



[٢] نفرض أن أ (١ ، -٣) تقسم $\overleftarrow{ب حـ}$ بنسبة $ل_٢ : ل_١$

∴ $\frac{-٢ ل_١ + ٥ ل_٢}{ل_١ + ل_٢} = ١$ ∴ $-٢ ل_١ + ٥ ل_٢ = ل_١ + ل_٢$

∴ $٣ ل_١ = ٤ ل_٢$ ∴ $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٣}{٤}$ (موجبة)

∴ أ تقسم $\overleftarrow{ب حـ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

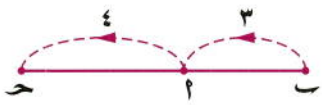
حل ثالث باستخدام البُعد بين نقطتين :

∵ أب = $\sqrt{(١ + ٢)^٢ + (-٣ + ٩)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة طول.

، ب حـ = $\sqrt{(-٢ - ٥)^٢ + (-٩ - ٥)^٢}$ = ٧ $\sqrt{٥}$ وحدة طول.

حـ أ = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-٣ - ٥)^٢}$ = ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طول. ∴ ب حـ = أب + أحـ

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة ، حـ $\notin$ $\overline{أب}$



، $\frac{أب}{أحـ} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٤\sqrt{٥}} = \frac{٣}{٤}$

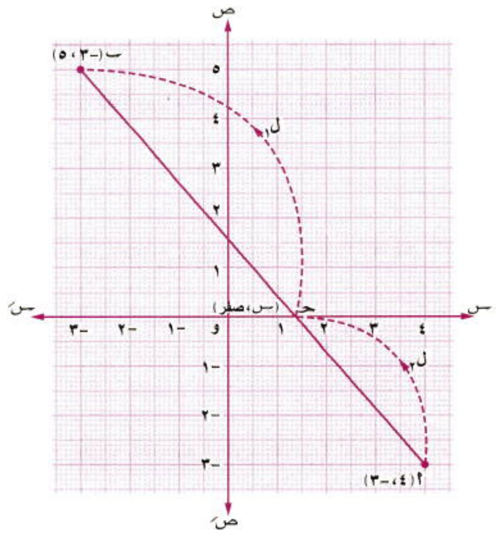
∴ حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج ، أ تقسم $\overleftarrow{ب حـ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

مثال ٧

أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftarrow{أب}$ بكل من نقطتى تقاطعها مع محورى الإحداثيات

إذا كانت : أ = (٤ ، -٣) ، ب = (-٣ ، ٥) ثم أوجد إحداثيات نقطتى التقسيم.

الحــل



أولًا : بفرض أن حـ = (س ، ٠) هى

نقطة تقاطع $\overline{\text{أب}}$ مع محور السينات

$\therefore\ ٠ = \frac{\text{ل}_٢ \times ٥ + \text{ل}_١ \times (-٣)}{\text{ل}_٢ + \text{ل}_١}$

$\therefore\ ٠ = ٥\ \text{ل}_٢ - ٣\ \text{ل}_١$

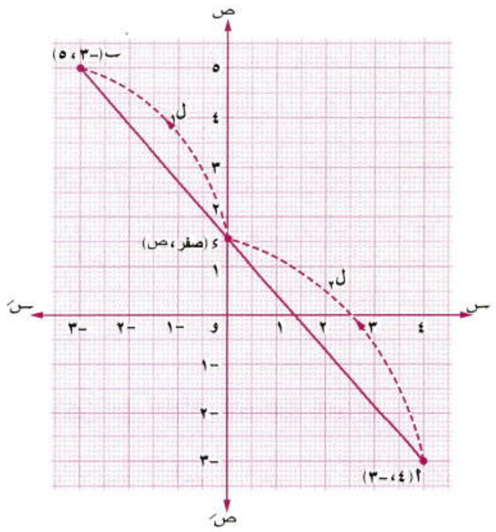
$\therefore\ ٥\ \text{ل}_٢ = ٣\ \text{ل}_١$ $\qquad \therefore\ \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\overline{\text{أب}}$ تنقسم بنقطة تقاطعها مع محور السينات

بنسبة ٣ : ٥ من الداخل.

، $\because\ \text{س} = \frac{\text{ل}_١ \text{س}_١ + \text{ل}_٢ \text{س}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$ $\qquad \therefore\ \text{س} = \frac{٥ \times ٤ + ٣ \times -٣}{٣ + ٥} = \frac{١١}{٨}$

∴ حـ (نقطة التقسيم) = $\left(\frac{١١}{٨}\ ،\ ٠\right)$



ثانيًا : بفرض أن ء = (٠ ، ص) هى

نقطة تقاطع $\overline{\text{أب}}$ مع محور الصادات

$\therefore\ ٠ = \frac{\text{ل}_٢ \times (-٣) + \text{ل}_١ \times ٤}{\text{ل}_٢ + \text{ل}_١}$

$\therefore\ ٠ = -٣\ \text{ل}_٢ + ٤\ \text{ل}_١$

$\therefore\ ٣\ \text{ل}_٢ = ٤\ \text{ل}_١$ $\qquad \therefore\ \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\overline{\text{أب}}$ تنقسم بنقطة تقاطعها مع

محور الصادات بنسبة ٤ : ٣ من الداخل.

، $\because\ \text{ص} = \frac{\text{ل}_١ \text{ص}_١ + \text{ل}_٢ \text{ص}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$

$\therefore\ \text{ص} = \frac{٣ \times -٣ + ٤ \times ٥}{٣ + ٤} = \frac{١١}{٧}$ $\qquad$ ∴ ء (نقطة التقسيم) = $\left(٠\ ،\ \frac{١١}{٧}\right)$

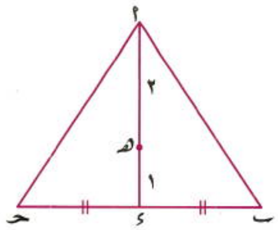
حاول بنفسك

إذا كانت : أ(٢ ، ٣) ، ب(−٢ ، ١) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ بنقطة تقاطعها مع محور السينات ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.

مثال ٨

إذا كانت : أ = (٢ ، ١) ، ب = (١ ، ٥) ، حـ = (٦ ، -٣) رءوس مثلث فأوجد إحداثيي نقطة تلاقى متوسطاته.

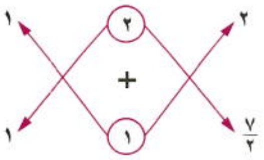
الحل



∵ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً من هذه المتوسطات من الداخل بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس وبفرض أن ء منتصف $\overline{بحـ}$

∴ ء = $\left(\frac{١ + ٦}{٢} ، \frac{٥ - ٣}{٢} \right) = \left(\frac{٧}{٢} ، ١ \right)$

، هـ (نقطة تقاطع المتوسطات) تقسم $\overline{أء}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١



∴ س = $\frac{٢ \times \frac{٧}{٢} + ١ \times ٢}{٢ + ١} = ٣$

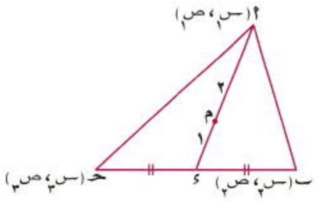
، ص = $\frac{٢ \times ١ + ١ \times ١}{٢ + ١} = ١$ ∴ هـ = (٣ ، ١)

ملاحظة

إذا كان أ ب حـ مثلثاً رءوسه أ = ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب = ($س_٢$ ، $ص_٢$)

، حـ = ($س_٣$ ، $ص_٣$) ، وكانت م نقطة تلاقى متوسطاته

فإن : م = $\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} \right)$



*** يمكن حل المثال السابق كما يلى :**

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} \right) = \left(\frac{٢ + ١ + ٦}{٣} ، \frac{١ + ٥ - ٣}{٣} \right) = (٣ ، ١)$$

لاحظ الفرق

إذا كانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ وكان :

١ $\overleftarrow{أحـ} = ٢ \overleftarrow{حـب}$ **فإن :** حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل.

٢ $\overleftarrow{أحـ} = -٢ \overleftarrow{حـب}$ **فإن :** حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الخارج.

٣ أحـ = ٢ حـب **فإن :** حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل أو الخارج.

تمارين 5 على تقسيم قطعة مستقيمة

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ = (٣ ، ٦) ، ب = (-٧ ، ٤) فإن : منتصف $\overline{\text{أب}}$ = ...

(أ) (-٤ ، ١٠) (ب) (-٤ ، ٥) (جـ) (٥ ، ١) (د) (-٢ ، ٥)

(٢) إذا كانت : م نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع أ ب جـ ء حيث : أ = (٣ ، ٧) ، جـ = (-٣ ، ١)

فإن : م = ...

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (٣ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٨) (د) (٦ ، ٦)

(٣) 📖 إذا كانت النقطة (٣ ، ٦) هى نقطة تنصيف $\overline{\text{أب}}$ حيث : أ = (-٣ ، ٧)

فإن : النقطة ب = ...

(أ) (٦ ، -١) (ب) (-٦ ، ١) (جـ) (٩ ، ٥) (د) (٠ ، ٦٫٥)

(٤) إذا كانت : جـ (٢ ، ٤) منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث : أ (س ، ٤) ، ب (١ ، ص)

فإن : س + ص = ...

(أ) ٧ (ب) ١ (جـ) -١ (د) -٧

(٥) دائرة مركزها (٢ ، -٢) فإذا كان قطرها له نقطة طرفية (٤ ، ٢) فإن نقطة الطرف الآخر للقطر هى ....

(أ) (-٤ ، ٢) (ب) (٠ ، -٦) (جـ) (-٣ ، -٣) (د) (٨ ، ٤)

(٦) إذا كانت : أ (-٣ ، -٧) ، ب (٤ ، ٠) فإن النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ٥ : ٢ من الداخل هى ....

(أ) (-٢ ، ٢) (ب) (٢ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (-٢ ، -٢)

(٧) إذا كانت : أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، -١) فإن النقطة جـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ هى ....

(أ) (-٢٥ ، -٧) (ب) (٢٥ ، ٧) (جـ) (١٧ ، ١٣) (د) (١٧ ، -١٣)

(٨) إذا كانت : أ = (-٤ ، ٤) ، ب = (٥ ، -٨) ، جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث جـ ب : أ جـ = ١ : ٢

فإن : جـ = ...

(أ) (٤ ، -٨) (ب) (٢ ، -٤) (جـ) (-٨ ، ٤) (د) (-٤ ، ٢)

(٩) إذا كانت : حـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ وكان أب = ٤ ب حـ ، أ (−١ ، ٤) ، ب (٣ ، ٤)
فإن النقطة حـ هى ....

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٢ ، ٤)

(١٠) إذا كانت : أ (−٣ ، −٤) ، ب (−٨ ، ٧) وكانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$
بحيث أ حـ = ٢ حـ ب فإن : حـ هى ....

(أ) (١٣ ، ١٨) (ب) (−١٣ ، ١٨) (جـ) (−١٣ ، −١٨) (د) (١٣ ، −١٨)

(١١) إذا كانت : ب (٠ ، ٣) ، حـ (٣ ، ٠) وكانت أ تقع فى ثلث المسافة من ب إلى حـ
فإن نقطة أ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (−١ ، −٢) (د) (−٢ ، −١)

(١٢) إذا كانت : أ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، −١) فإن النقطة حـ التى تقع فى ربع المسافة من أ إلى ب
هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (−٣ ، ٢)

(١٣) النقطة التى تقع فى $\frac{٢}{٥}$ المسافة من أ إلى ب للقطعة المستقيمة $\overleftarrow{\text{أب}}$
حيث أ (٣ ، −٢) ، ب (−١ ، ٥) هى ....

(أ) (−١ ، ٣) (ب) $\left(\frac{٧}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ (جـ) (٣ ، −١) (د) $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٧}{٥}\right)$

(١٤) إذا كانت : حـ (٤ ، ٤) تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل وكانت أ (٧ ، ٨) فإن : ب = ...

(أ) (−٢ ، −٤) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (−١ ، −٢) (د) (٢ ، ٤)

(١٥) إذا كان : $\overleftarrow{\text{أب}}$ = (٣ ، ٤) ، أ = (−٢ ، ٥) ، حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ٣ : ٢ من الخارج
فإن : حـ = ...

(أ) (٧ ، ١٧) (ب) (٨ ، ٣) (جـ) (−٨ ، ٣) (د) (−٧ ، −١٧)

(١٦) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overleftarrow{\text{أب}}$ حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −٢)
هى ....

(أ) ٥ : ٢ من الداخل. (ب) ٢ : ٣ من الداخل. (جـ) ٣ : ٢ من الخارج. (د) ٢ : ٥ من الخارج.

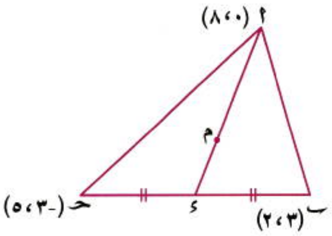
(١٧) النسبة التى يقسم بها محور الصادات $\overleftarrow{\text{أب}}$ حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٦ ، ٧) تساوى ....

(أ) ١ : ٣ من الخارج. (ب) ٣ : ١ من الداخل. (جـ) ١ : ٢ من الخارج. (د) ٣ : ٢ من الداخل.

(١٨) إذا كانت : أ (٢ ، ٥) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (٤ ، ص) ثلاث نقط على استقامة واحدة
فإن حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ....

(أ) ١ : ٢ من الداخل. (ب) ٢ : ١ من الداخل. (جـ) ٢ : ١ من الخارج. (د) ١ : ٢ من الخارج.

(١٩) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أء}}$ متوسط فى Δ أبحـ ، م نقطة تلاقى المتوسطات

حيث أ = (٠ ، ٨) ، ب = (٣ ، ٢) ، حـ = (−٣ ، ٥)

فإن : نقطة م هى ....

(أ) (٠ ، ٧,٥) (ب) (٠ ، ٥) (جـ) (−٣ ، ٥) (د) (٥ ، ٠)

(٢٠) إذا كان : $\overline{\text{أء}}$ متوسطاً فى Δ أبحـ حيث أ = (١ ، ٢) ، ء = (٤ ، −٤)

فإن نقطة تلاقى متوسطات Δ أبحـ هى ....

(أ) (٣ ، −٢) (ب) (−٣ ، ٢) (جـ) (٢ ، −٣) (د) (−٢ ، −٣)

(٢١) أبحـ مثلث فيه : أ(−٣ ، ١) ، ب(١ ، ٧) ، م هى نقطة تلاقى متوسطاته حيث م = (١ ، ٢)

فإن النقطة حـ هى ....

(أ) (٥ ، ٢) (ب) (٥ ، −٢) (جـ) (−٥ ، ٢) (د) (−٥ ، −٢)

(٢٢) أبحـ مثلث فيه : أ(٨ ، ٧) ، م هى نقطة تلاقى متوسطاته حيث م = (٢ ، ١)

فإن النقطة ء منتصف $\overline{\text{بحـ}}$ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (−١ ، −٢) (د) (−١ ، ٢)

(٢٣) إذا كان : $\overline{\text{أهـ}}$ متوسط Δ أبحـ ، م هى نقطة تقاطع متوسطات Δ أبحـ وكانت :

أ(٥ ، ٤) ، م(٧ ، ٨) فإن : $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ = ...

(أ) $\left(\frac{٤}{٣} ، \frac{٨}{٣}\right)$ (ب) $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right)$ (جـ) (٣ ، ٦) (د) (١ ، ٢)

(٢٤) إذا كانت : حـ تقسم $\overrightarrow{\text{بأ}}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل فإن : $\frac{\text{أحـ}}{\text{أب}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٢٥) إذا كانت : حـ تقسم $\overrightarrow{\text{أب}}$ بنسبة ٥ : ٧ من الخارج فإن : $\frac{\text{أحـ}}{\text{أب}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٢}$

(٢٦) إذا كانت : حـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ وكان : ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ فإن : حـ تقسم $\overrightarrow{\text{بأ}}$ بنسبة ....

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٢ (جـ) ٣ : ٥ (د) ٥ : ٣

(٢٧) إذا كانت أ تقسم $\overline{\text{بحـ}}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٣ فإن ....

(أ) ب تقسم $\overline{\text{أحـ}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ (ب) ب تقسم $\overline{\text{أحـ}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

(جـ) حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ١ (د) حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

(٢٨) أ ب حـ مثلث فيه : ب (٣ ، ٥) ، حـ (-٣ ، -٧) ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث مساحة Δ أ ب ء = $\frac{١}{٢}$ مساحة Δ أ ب حـ فإن : ء = ...

(أ) (٣ ، $\frac{١٧}{٣}$) (ب) ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢) (جـ) (٠ ، -١) (د) (١ ، ١)

(٢٩) إذا كانت نقط منتصفات أضلاع مثلث هى (-٢ ، ٣) ، (٧ ، -١) ، (٤ ، ٤)

فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٩ ، ٦) (جـ) (٥ ، ٠) (د) ($\frac{٥}{٣}$ ، ٠)

(٣٠) النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ ($س_١$ ، $ص_١$)

، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) هى .... من الداخل/الخارج حيث $س_١ \neq ٠$ ، $س_٢ \neq ٠$

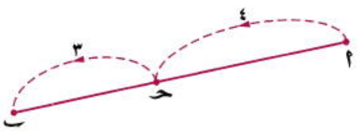
(أ) $\frac{|س_١|}{|س_٢|}$ (ب) $\frac{|س_٢|}{|س_١|}$ (جـ) $\frac{|ص_١|}{|ص_٢|}$ (د) $\frac{|ص_٢|}{|ص_١|}$

(٣١) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ ($س_١$ ، $ص_١$)

، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) هى .... من الداخل/الخارج حيث $ص_١ \neq ٠$ ، $ص_٢ \neq ٠$

(أ) $\frac{|س_١|}{|س_٢|}$ (ب) $\frac{|س_٢|}{|س_١|}$ (جـ) $\frac{|ص_١|}{|ص_٢|}$ (د) $\frac{|ص_٢|}{|ص_١|}$

(٣٢) فى الشكل المقابل :



كل مما يأتى صحيح ما عدا ....

(أ) حـ تقسم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بنسبة ٤ : ٣ من الداخل.

(ب) ب تقسم $\overleftrightarrow{\text{حـ أ}}$ بنسبة ٣ : ٧ من الخارج.

(جـ) أ تقسم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.

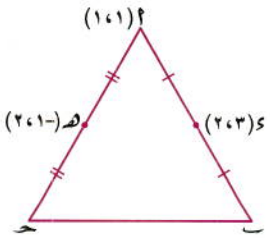
(د) حـ تقسم $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

(٣٣) إذا كان أ ∈ محور السينات ، ب ∈ محور الصادات وكانت النقطة حـ (٣ ، ٢) تقسم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ فإن النقطتان أ ، ب على الترتيب هما ....

(أ) (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) (ب) (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(جـ) (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥) (د) (١ ، ٠) ، (٠ ، ٨)

(٣٤) فى الشكل المقابل :



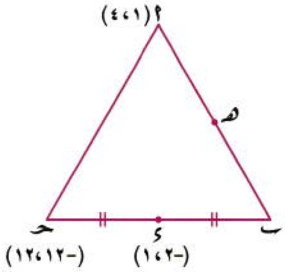
إذا كانت ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

وكان : أ (١ ، ١) ، ء (٣ ، ٢) ، هـ (-١ ، ٢)

فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....

(أ) (-١ ، $\frac{٧}{٣}$) (ب) (١ ، $\frac{٧}{٣}$) (جـ) ($\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{٧}{٣}$) (د) ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٧}{٣}$)

(٣٥) في الشكل المقابل :



ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث

٣ هـ ب = ٤ هـ أ فإن إحداثي النقطة هـ هو ....

(أ) (٣ ، -٣) (ب) (٤ ، -٢)

(جـ) (٥ ، -١) (د) (٦ ، ٢)

(٣٦) إذا كان : أ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) نقطتان في المستوى وكان محور الصادات يقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الخارج فمن المؤكد أن ....

(أ) س$_١$ ، س$_٢$ موجبان. (ب) س$_١$ س$_٢$ > صفر

(جـ) ص$_١$ ، ص$_٢$ موجبان. (د) ص$_١$ ص$_٢$ > صفر

(٣٧) إذا كانت حـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ وكانت ء تقسم $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

فإن ء تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بنسبة ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٣٨) إذا كانت النقطة حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢ ونقطة ء تقسم $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٤

فإن نقطة ء تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بنسبة ....

(أ) ١ : ٦ (ب) ١ : ٨ (جـ) ٣ : ٢٢ (د) ٤ : ١٧

(٣٩) إذا كانت : حـ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ء (س$_٢$ ، ص$_٢$) هما نقطتي تثليث $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (-١ ، ٤) ، ب (٨ ، ٦)

فإن : س$_١$ + س$_٢$ = ...

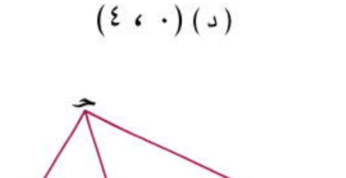
(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٤٠) إذا كانت : أ (-٢ ، ٥) ، ب (٦ ، ١) وكانت حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة م$_١$: م$_٢$

وكانت ء تقسم $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ من الداخل بنسبة م$_١$: م$_٢$ وكانت حـ = (٤ ، ٢) فإن : ء = ...

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٤ ، ٦) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٠ ، ٤)

(٤١) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (١ ، -٤) ، ب (٦ ، ٦)

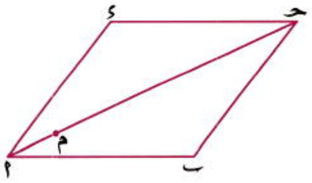
، ء (٤ ، ٢) ، أ حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم

فإن كل مما يأتي صحيح ما عدا ....

(أ) مساحة Δ أ حـ ء = $\frac{٣}{٢}$ مساحة Δ ب حـ ء (ب) محيط Δ أ حـ ء > محيط Δ ب حـ ء

(جـ) $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ أ حـ ب (د) ء تقسم $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ بنسبة ٣ : ٢ من الداخل.

(٤٢) في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه :

أ (−٣ ، −٥) ، ب (٢ ، −٨) ، ء (٨ ، ٦)

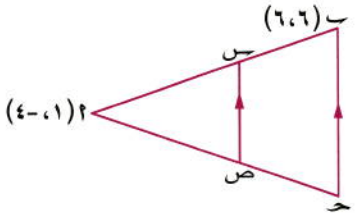
وكان : $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{أم}}$ فإن : م = ...

(أ) (٣ ، −٢) (ب) (−٥ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (١ ، −٣)

(٤٣) إذا كانت نقطة الأصل على رادار مراقبة هى ميناء بحرى وتحركت منه سفينتان فى نفس الوقت الأولى نحو الشرق بسرعة ٦٠ كم/س والأخرى شمالاً بسرعة ٤٠ كم/س فإن إحداثيات النقطة التى تقع فى منتصف المسافة بين السفينتين بعد مرور ٣ ساعات هى .... «حيث كم هو وحدة الأطوال»

(أ) (٩٠ ، ٦٠) (ب) (٦٠ ، ٩٠) (جـ) (١٨٠ ، ١٢٠) (د) (١٢٠ ، ١٨٠)

(٤٤) في الشكل المقابل :



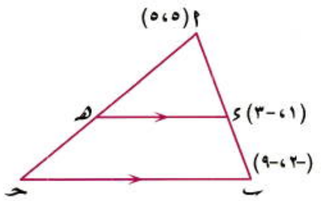
إذا كان : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، $\frac{\text{أص}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٥}$

فإن : س = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (−٤ ، ٢)

(٤٥) في الشكل المقابل :

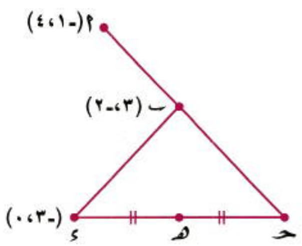


$\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٤٦) في الشكل المقابل :



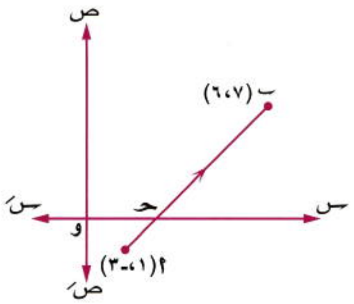
إذا كان أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$

وكان : أجـ = ٣ أب

فإن : هـ = ...

(أ) (٤ ، −٢) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٤ ، −٧) (د) (٨ ، −٥)

(٤٧) فى الشكل المقابل :



النقطة حـ هى ....

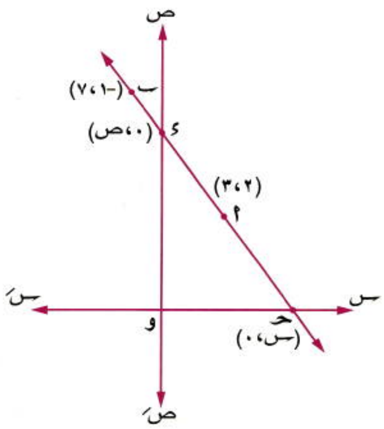
(أ) (٥ ، ٠)

(ب) (٤ ، ٠)

(جـ) (٣ ، ٠)

(د) (٢ ، ٠)

(٤٨) فى الشكل المقابل :



حـ أ : حـ ب = ...

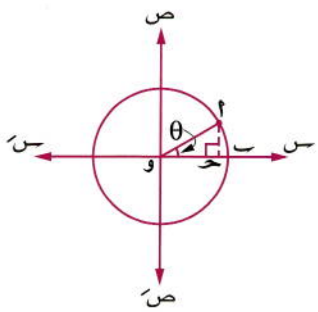
(أ) ٢ : ١

(ب) ٧ : ٣

(جـ) ٣ : ٧

(د) ١ : ٢

(٤٩) فى الشكل المقابل :



زاوية θ فى وضعها القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى أ

فإن و تقسم $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ من الخارج بالنسبة ....

(أ) $\frac{١}{١ - \text{حتا}\,\theta}$ (ب) حتا θ

(جـ) قا θ (د) قتا θ

(٥٠) إذا كان متجه موضع النقطة أ بالصورة القطبية هو $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\left(٥\sqrt{٢} \text{ ، } \frac{٣\pi}{٤}\right)$ ، ب (٢ ، ٥) ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

فإذا كانت ب تقسم $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ بنسبة ٧ : ٤ من الخارج فإن : حـ = ...

(أ) (-٢ ، ٥) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (-٢ ، ٤) (د) $\left(-٢ \text{ ، } ٥\sqrt{٢}\right)$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : أ = (٠ ، -٣) ، ب = (٣ ، ٦) فأوجد إحداثيى النقطة حـ التى تقسم $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ «(٢ ، ٣)»

٢ إذا كانت : أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−١ ، ٥) فأوجد :

(١) إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل.

(٢) إحداثيي النقطة ء التي تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ من الخارج. «($\frac{٧}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$) ، (−١٣ ، ٢٦)»

---

٣ أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقع عند خمس المسافة من النقطة أ = (−١ ، −١)

إلى النقطة ب = (٩ ، ٤) «(١ ، ٠)»

---

٤ إذا كانت : حـ ∈ $\overleftarrow{بأ}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$ وكانت أ = (٣ ، ١) ، ب = (٤ ، ٢)

وكان : أحـ = ٢ أب أوجد إحداثيي نقطة حـ «(١ ، −١)»

---

٥ إذا كانت : أ = (١ ، ٣) ، ب = (−٤ ، −٢) أوجد إحداثيي النقطة حـ

إذا كانت : حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ بحيث ٣ أحـ = ٢ حـب «(−١ ، ١)»

---

٦ إذا كانت : أ = (٤ ، ٣) ، ب = (−٣ ، ٥)

فأوجد حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ بحيث ٣ أحـ = ٥ حـب «($\frac{-٣}{٨}$ ، $\frac{١٧}{٤}$) ، (−$\frac{٢٧}{٢}$ ، ٨)»

---

٧ إذا كانت : أ = (٢ ، ١) ، ب = (−١ ، −٢) فأوجد إحداثيي النقطة حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$

، حـ ∉ $\overline{أب}$ بحيث بعدها عن أ أربعة أمثال بعدها عن ب «(−٢ ، −٣)»

---

٨ إذا كانت النقطة أ = (٣ ، −٤) ، حـ = (−١ ، ل) ، ب = (ك ، ١)

على استقامة واحدة ، حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، $\frac{أحـ}{حـب} = \frac{٢}{٣}$ أوجد : ل ، ك «−٢ ، −٧»

---

٩ إذا كانت : أ = (٨ ، −٤) ، ب = (−١ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقطتين اللتين تقسمان $\overleftarrow{أب}$

إلى ثلاثة أجزاء متساوية في الطول. «(٥ ، −٢) ، (٢ ، ٠)»

---

١٠ إذا كانت : أ = (١ ، −٤) ، ب = (٥ ، ٤) فأوجد إحداثيات النقط حـ ، ء ، هـ التي تقسم $\overleftarrow{أب}$

إلى أربعة أجزاء متساوية في الطول. «(٢ ، −٢) ، (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٢)»

---

١١ إذا كانت : أ ∈ محور السينات ، ب ∈ محور الصادات ، حـ = (−٤ ، ٣) منتصف $\overline{أب}$

فأوجد إحداثيي كل من أ ، ب «(−٨ ، ٠) ، (٠ ، ٦)»

---

١٢ إذا كانت : أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−٢ ، ٣) فأوجد النسبة التي تقسم بها النقطة

حـ = (٨ ، ص) القطعة $\overline{أب}$ مبيناً نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص «١ : ٢ (من الخارج) ، −٧»

١٣ أوجد النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (−٣ ، ٧) مبينًا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم. «$\frac{٢}{٣}$ (من الداخل) ، (٠ ، $\frac{٢٣}{٥}$)»

---

١٤ إذا كانت : أ = (−٢ ، ٣) ، ب = (٤ ، −٢) فأوجد النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ مبينًا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم. «$\frac{٣}{٢}$ (من الداخل) ، ($\frac{٨}{٥}$ ، ٠)»

---

١٥ إذا كانت : أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٢ ، −١) فأوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أب}$ بكل من نقطتى تقاطع $\overleftrightarrow{أب}$ مع محورى الإحداثيات ، مبينًا نوع التقسيم فى كل حالة ، ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.

«٢ : ١ (من الداخل) ، ٥ : ٢ (من الخارج) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٣)»

---

١٦ إذا كانت : حـ ، ء نقطتى تقاطع $\overleftrightarrow{أب}$ مع محورى الإحداثيات فأوجد النسبة التى تقسم بها كل من حـ ، ء القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ مبينًا نوع التقسيم ، علمًا بأن : أ = (−٥ ، ٧) ، ب = (−٣ ، ٢)

«٧ : ٢ (من الخارج) ، ٥ : ٣ (من الخارج)»

---

١٧ إذا كانت النقط أ = (١ ، −١) ، ب = (−١ ، ١) ، حـ = ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$) هى رءوس مثلث فأوجد إحداثيى نقطة تقاطع متوسطاته. «($\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$)»

---

١٨ إذا كانت : أ = (٤ ، ١٢) ، ب = (−٢ ، ١٠) ، حـ = (١ ، ٣) ، ء = (٢ ، ٧) ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، م تقسم $\overline{حـ ء}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ أوجد طول $\overline{هـ م}$ «٥ وحدات طول»

---

١٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإذا كانت : أ = (٧ ، −٢) ، ب = (١٥ ، ٤) ، حـ = (٩ ، ٦) فأوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ثم أوجد إحداثيى الرأس ء «(٨ ، ٢) ، (١ ، ٠)»

---

٢٠ إذا كان : أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا ، أ = (٤ ، ٣) ، ب = (٠ ، ٢) ، حـ = (−٢ ، −٣) ، ء = (٢ ، −٢) أوجد نقطة منتصف كل من $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ثم حدد نوع الشكل أ ب حـ ء «(١ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، متوازى أضلاع»

---

٢١ أثبت أن النقط أ = (١ ، ٤) ، ب = (٣ ، −٢) ، حـ = (−٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :

(١) النسبة التى تقسم بها أ القطعة المستقيمة $\overline{ب حـ}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «١ : ٢ (من الداخل)»

(٢) النسبة التى تقسم بها ب القطعة المستقيمة $\overline{حـ أ}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «٣ : ١ (من الخارج)»

(٣) النسبة التى تقسم بها حـ القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «٢ : ٣ (من الخارج)»

٢٢ ء ، هـ ، ں منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـأ}$ على الترتيب فى Δ أبحـ

فإذا كانت : ء = (٢ ، ٣) ، هـ = (-١ ، ٤) ، ں = (٤ ، ٥)

فأوجد إحداثيات : أ ، ب ، حـ «(٧ ، ٤) ، (-٣ ، ٢) ، (١ ، ٦)»

---

٢٣ أبحـ مثلث رءوسه أ = (٣ ، ٥) ، ب = (٦ ، -٤) ، حـ = (١ ، ١)

فإذا كانت : ء تقسم $\overrightarrow{أب}$ بنسبة ١ : ٢ ، هـ تقسم $\overrightarrow{أحـ}$ بنسبة ١ : ٢ أيضًا

فأثبت أن : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ ، ءهـ = $\frac{١}{٣}$ بحـ

---

٢٤ **الربط بالمسافة :** تتحرك سيارة نقل ركاب فى طريقها من المدينة أ إلى المدينة ب حيث أ = (٥ ، -٦) ، ب = (١ ، ٠) وتوقفت مرتين أثناء سيرها. أوجد إحداثيات النقطتين اللتين توقفت عندهما السيارة إذا كانت :

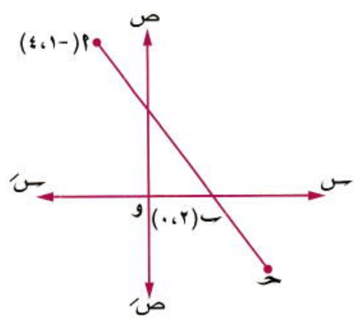
(١) وقفت فى منتصف الطريق.

(٢) توقفت فى ثلثى الطريق من جهة النقطة أ «(٣ ، -٣) ، ($\frac{٧}{٣}$ ، -٢)»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) فى الشكل المقابل :



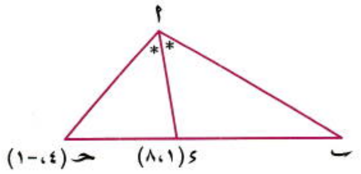
إذا كان : بحـ = ٢,٥ وحدة طول

فإن النقطة حـ = ...

(أ) (٣ ، -٢) (ب) (٣,٥ ، -٢)

(جـ) (١ ، -٢) (د) (٢,٥ ، -١)

(٢) فى الشكل المقابل :

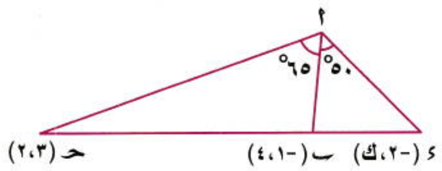


إذا كان : ٤ أحـ = ٣ أب

فإن النقطة ب هى ....

(أ) (-٥ ، ١٤) (ب) (-٤ ، ١٦) (جـ) (-٣ ، ٢٠) (د) (-٢ ، ٢١)

(٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ب $\in \overline{حـء}$

فإن : $\frac{أب}{أء}$ = ...

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٤) إذا كانت أ ، ب هما صورتا النقطة (٣ ، ١) بالانعكاس فى محور السينات والصادات على الترتيب فإن النقطة التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ هى ....

(أ) (٣ ، −١)　(ب) $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-١}{٥}\right)$　(جـ) $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{١}{٥}\right)$　(د) (٠ ، ٠)

(٥) إذا كانت نقطة الأصل هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث الذى رؤوسه (أ ، ب) ، (ب ، جـ) ، (جـ ، أ)

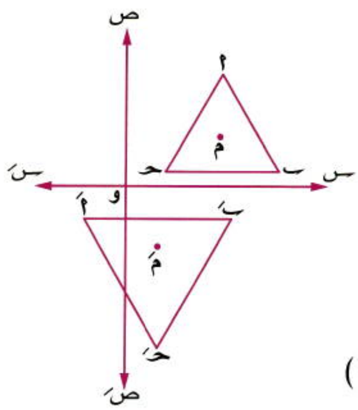
فإن : أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣} = ...

(أ) صفر　(ب) أ ب جـ　(جـ) أ + ب + جـ　(د) ٣ أ ب جـ

(٦) إذا كانت النقطتان أ ، ب تقعان على منحنى الدالة : ص = س^{٢} حيث أ (٣ ، ٩) وكان محور الصادات يقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ٣ : ٢ من الداخل　فإن : ب = ...

(أ) (−١ ، ١)　(ب) (−٢ ، ٤)　(جـ) (−١,٥ ، ٢,٢٥)　(د) (−٣ ، ٩)

(٧) فى الشكل المقابل :



إذا كانت : م (٣ ، ٢) نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب جـ

، مَ (١ ، −٣) نقطة تلاقى متوسطات Δ أَ بَ جـَ

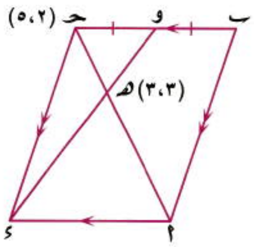
فإن : $\overleftarrow{\text{أأَ}}$ + $\overleftarrow{\text{ببَ}}$ + $\overleftarrow{\text{جـجـَ}}$ = ...

(أ) (٢ ، ٥)　(ب) (٦ ، ١٥)

(جـ) (−٢ ، −٥)　(د) (−٦ ، −١٥)

---

٢ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

، $\overline{\text{أجـ}}$ ∩ $\overline{\text{د و}}$ = {هـ}

فإذا كانت : هـ = (٣ ، ٣)

، جـ = (٢ ، ٥) **فأوجد :** إحداثيى النقطة أ　«(٥ ، −١)»

---

٣ إذا كانت : أ = (٢ ، ٢) ، ب = (٥ ، ٦) ، جـ = (١٠ ، −٤) هى رءوس مثلث

، د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث $\overleftarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ أ من الداخل أوجد إحداثيى النقطة د　«$\left(\frac{٢٠}{٣} ، \frac{٨}{٣}\right)$»

الدرس 2

معادلة الخط المستقيم

درسنا فى السنوات السابقة أن :

* **الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى :** $\boxed{\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{حـ} = ٠}$

حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ، ب لا يساويان الصفر معًا وتمثل بيانيًا بخط مستقيم

فمثلًا كل من العلاقات : س + $\sqrt{٣}$ ص = ٦ ، ص = ٣ ، س − ٤ = ٠ تمثل خطًا مستقيمًا

، كل من العلاقتين : ص + $\sqrt{\text{س}}$ = ٤ ، س + $\frac{١}{\text{ص}}$ = ٥ لا تمثل خطًا مستقيمًا.

* **ميل الخط المستقيم :**

١ إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ، $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢)$

فإن : $\boxed{\text{م (ميل المستقيم ل)} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}}$

فمثلًا المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ميله يساوى $\frac{٢ - ٣}{٤ - ١} = \frac{-١}{٣}$

٢ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : أ س + ب ص + حـ = ٠ .

فإن : $\boxed{\text{ميل المستقيم} = \frac{-\text{ معامل س}}{\text{معامل ص}}}$

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠ ميله = $\frac{-٥}{٢}$

٣ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : ص = م س + حـ فإن : $\boxed{\text{ميله} = \text{م}}$

، يقطع جزءًا من محور الصادات طوله القيمة المطلقة للعدد حـ ويمر بالنقطة (٠ ، حـ)

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ص = ٣ س − ٥

ميله = ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٥ وحدات طولية ويمر بالنقطة (٠ ، −٥)

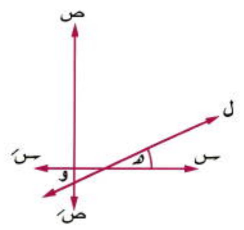
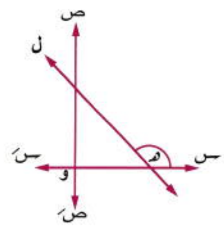
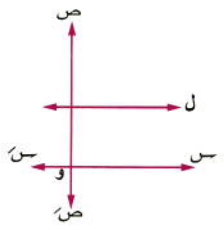
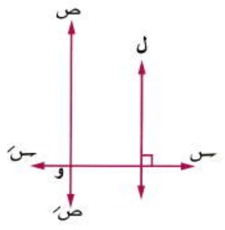
٤ إذا كان : هـ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فإن : $\boxed{\text{ميل المستقيم = طا هـ}}$

فمثلًا إذا كان قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ٤٥°

فإن ميل المستقيم = طا ٤٥° = ١

وبالتالى نلاحظ أن ميل الخط المستقيم يتغير بتغير قياس الزاوية (هـ) كما يلى :

١ حادة	٢ منفرجة	٣ صفرية	٤ قائمة
إذا كان الميل موجبًا	**إذا كان الميل سالبًا**	**إذا كان الميل = ٠**	**إذا كان الميل غير معرف**
			
٥ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر			
٦ ميل محور الصادات وميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) كل منهما غير معرف.			

* إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ فإن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

* **العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمتعامدين :**

إذا كان : ل$_١$ ، ل$_٢$ مستقيمين ميلاهما م$_١$ ، م$_٢$ على الترتيب فإن :

١ ل$_١$ // ل$_٢$ $\Longleftrightarrow$ م$_١$ = م$_٢$

أى أن المستقيمين المتوازيين ميلاهما متساويان ، والعكس صحيح.

٢ ل$_١$ $\perp$ ل$_٢$ $\Longleftrightarrow$ م$_١$ م$_٢$ = −١ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

أى أن حاصل ضرب ميلى مستقيمين متعامدين يساوى −١ ، والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان المستقيم ل$_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (−٣ ، −١)

يكون ميله م$_١$ = $\frac{٥ + ١}{٣ + ٣}$ = ١

، المستقيم ل$_٢$ معادلته : ٣ س − ٣ ص + ٥ = ٠ يكون ميله م$_٢$ = $\frac{-٣}{-٣}$ = ١

، المستقيم ل$_٢$ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٣٥°

يكون ميله م$_٢$ = طا ١٣٥° = −١

، ∵ م$_١$ = م$_٢$ ∴ ل$_١$ // ل$_٢$

، ∵ $م_١ \times م_٣ = ١ \times -١ = -١$ ∴ $ل_١ \perp ل_٣$

، ∵ $م_٢ \times م_٣ = ١ \times -١ = -١$ ∴ $ل_٢ \perp ل_٣$

* أى نقطتين مختلفتين فى المستوى يمر بهما خط مستقيم واحد ، ومن أى نقطة خارج هذا المستقيم يمكن رسم مستقيم آخر وحيد يوازيه.

* لتحديد معادلة أى خط مستقيم فإنه يلزمنا معرفة معلومتين عن هذا المستقيم كأن نعرف نقطتين عليه ، أو نقطة عليه وميله ، أو ما شابه ذلك كما سيتضح فيما يلى من شرح.

تعريف متجه اتجاه المستقيم

هو متجه غير صفرى يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على خط مستقيم.

* **ففى الشكل المقابل :**

كل من $\overleftarrow{سص}$ ، $\overleftarrow{صع}$ ، $\overleftarrow{عس}$ ، $\overleftarrow{صس}$

هو متجه اتجاه للخط المستقيم ل

* **إذا كان :** $\overleftarrow{ى} \neq \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$ // المستقيم ل **فإن :** $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه المستقيم ل

* **إذا كان :** $\overleftarrow{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه المستقيم.

فإن : ك $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه لنفس المستقيم حيث ك $\in ح^*$

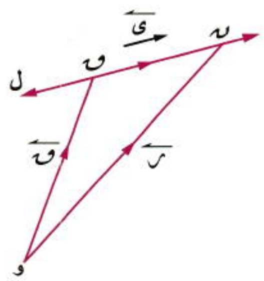
فمثلًا **إذا كان :** $\overleftarrow{ى} = (٣ ، ٤)$ متجه اتجاه مستقيم ما فإن كلًا من المتجهات (٦ ، ٨) ، (-٣ ، -٤) ، (١,٥ ، ٢) ، (١٥ ، ٢٠) ، ...... متجه اتجاه لهذا المستقيم.

ملاحظة

إذا كان : $\overleftarrow{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{ب}{أ}$ ، والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان : (٢ ، -٣) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{-٣}{٢}$ ، المستقيم الذى ميله = $\frac{-٤}{٧}$ يكون المتجه $\overleftarrow{ى} = (٧ ، -٤)$ متجه اتجاه له.

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم



* إذا كان ل مستقيمًا يمر بالنقطة ى ، $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه له وبفرض نقطة ن تقع على المستقيم ل وأن $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ر}$ هما المتجهان الممثلان بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين و ى ، و ن على الترتيب

* يوجد عدد ك $\in ح^*$ بحيث $\overleftarrow{ى ن} = \overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ى} =$ ك $\overleftarrow{ى}$

∴ $\boxed{\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ى} + ك \overleftarrow{ى}}$ وتسمى هذه الصورة «المعادلة المتجهة للخط المستقيم»

حيث ك عدد حقيقى ويسمى بارامتر وعند كل قيمة للبارامتر ك يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

* بفرض $ر = (س ، ص)$ ، $و = (س_1 ، ص_1)$ ، $\overleftarrow{ى} = (أ ، ب)$

∴ معادلة الخط المستقيم هى : $(س ، ص) = (س_1 ، ص_1) + ك (أ ، ب)$

∴ $\boxed{س = س_1 + ك أ \text{ ، } ص = ص_1 + ك ب}$

وتسمى هذه الصورة «المعادلات الوسيطية (البارامترية)»

∴ $\frac{س - س_1}{أ} = ك$ ، $\frac{ص - ص_1}{ب} = ك$

وبحذف ك من المعادلتين : ∴ $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب}$ ∴ $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ب}{أ}$

، ∵ الميل (م) $= \frac{ب}{أ}$ ∴ $\boxed{\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م}$

وتسمى هذه الصورة «المعادلة الكارتيزية»

نلخص ما سبق فيما يلى :

المستقيم ل الذى يمر بالنقطة $و = (س_1 ، ص_1)$ والمتجه $\overleftarrow{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه له تكون :

- **المعادلة المتجهة هى :** $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك \overleftarrow{ى}$

أى أن $(س ، ص) = (س_1 ، ص_1) + ك (أ ، ب)$

- **المعادلتان الوسيطيتان هما :** $\left\{\begin{array}{l} س = س_1 + ك أ \\ ص = ص_1 + ك ب \end{array}\right.$

- **المعادلة الكارتيزية هى :** $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م$

مثـــال ١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة $و = (٣ ، -٢)$ والمتجه $\overleftarrow{ى} = (-٢ ، ١)$ متجه اتجاه له.

الحـــل

* المعادلة المتجهة للمستقيم هى : $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك \overleftarrow{ى}$ ∴ $\overleftarrow{ر} = (٣ ، -٢) + ك (-٢ ، ١)$

أى أن $(س ، ص) = (٣ ، -٢) + ك (-٢ ، ١)$

* المعادلتان الوسيطيتان هما : $س = ٣ - ٢ ك$ ، $ص = -٢ + ك$

* المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص + ٢}{س - ٣} = \frac{١}{-٢}$

∴ $س - ٣ = -٢ ص - ٤$

∴ الصورة العامة هى : $س + ٢ ص + ١ = ٠$

تذكر أن

∵ $(-٢ ، ١)$ متجه اتجاه للمستقيم

∴ ميل المستقيم $= \frac{١}{-٢}$

حل آخر لإيجاد المعادلة الكارتيزية :

بحذف ك من المعادلتين الوسيطيتين $\therefore \frac{س - ٣}{-٢} = \frac{ص + ٢}{١}$

أى أن $\boxed{س + ٢ ص + ١ = ٠}$

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (-٢ ، ١) وميله = $-\frac{٤}{٥}$

الحل

$\because$ الميل م = $\frac{-٤}{٥}$ $\therefore$ المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٥ ، -٤) متجه اتجاه لهذا المستقيم.

* المعادلة المتجهة هى : $\overleftarrow{ر}$ = (-٢ ، ١) + ك (٥ ، -٤)

أى أن $\boxed{(س ، ص) = (-٢ ، ١) + ك (٥ ، -٤)}$

* المعادلتان الوسيطيتان هما : س = -٢ + ٥ ك ، ص = ١ - ٤ ك

* المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ١}{س + ٢} = -\frac{٤}{٥}$ $\therefore$ الصورة العامة هى : ٤ س + ٥ ص + ٣ = ٠

حاول بنفسك

أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (١ ، ٤) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$

معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه و = (س$_١$ ، ص$_١$) ، ه = (س$_٢$ ، ص$_٢$)

المتجه $\overleftarrow{ى}$ = $\overleftarrow{و ه}$ = ($\overleftarrow{ه}$ - $\overleftarrow{و}$) متجه اتجاه للمستقيم.

$\therefore$ **المعادلة المتجهة هى :** $\boxed{\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك (\overleftarrow{ه} - \overleftarrow{و})}$

، $\because$ الميل (م) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ وبالتعويض عن الميل فى الصورة الكارتيزية.

$\therefore$ **المعادلة الكارتيزية هى :** $\boxed{\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}}$

مثال ٣

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين : و = (٣ ، -١) ، ه = (-٢ ، ٤)

الحـل

$\overrightarrow{\text{ى}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{و}}$ = (−٢ ، ٤) − (٣ ، −١) = (−٥ ، ٥) متجه اتجاه للمستقيم المطلوب

∴ $\overrightarrow{\text{ى}'} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{\text{ى}} = \frac{1}{5}$ (−٥ ، ٥) = (−١ ، ١) متجه اتجاه أيضًا للمستقيم ، ميل المستقيم = $\frac{1}{-1}$ = −١

∴ المعادلة المتجهة هى : $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{و}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}'}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، −١) + ك (−١ ، ١)

أى أن : (س ، ص) = (٣ ، −١) + ك (−١ ، ١)

، المعادلتان الوسيطيتان هما : س = ٣ − ك   ،   ص = −١ + ك

، المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{\text{ص} + 1}{\text{س} - 3} = -1$

أى أن : ص + ١ = − س + ٣

∴ الصورة العامة هى : ص + س − ٢ = ٠

مـلاحظـات

١ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠) هى :

* المعادلة المتجهة : $\boxed{\overrightarrow{\text{ر}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}}}$ حيث $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه اتجاه له.

* المعادلة الكارتيزية : $\boxed{\text{ص} = \text{م}\,\text{س}}$ حيث م ميل المستقيم.

٢ متجه اتجاه المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة (س_1 ، ص_1) هو $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (س_1 ، ص_1)

٣ المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (س_1 ، ص_1) يكون المتجه

$\overrightarrow{\text{س}}$ = (١ ، ٠) متجه اتجاه له.

، معادلته المتجهة : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س_1 ، ص_1) + ك (١ ، ٠)

، معادلته الكارتيزية : $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{0}{1}$ $\boxed{\text{أى أن : ص} = \text{ص}_1}$

٤ المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (س_1 ، ص_1)

يكون المتجه $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠ ، ١) متجه اتجاه له.

، معادلته المتجهة : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س_1 ، ص_1) + ك (٠ ، ١)

، معادلته الكارتيزية : $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{1}{0}$ (غير معرف) $\boxed{\text{أى أن : س} = \text{س}_1}$

٥ معادلة محور السينات هى : $\boxed{\text{ص} = 0}$ أو $\boxed{\overrightarrow{\text{ر}} = \text{ك}\,(1 \text{ ، } 0)}$

٦ معادلة محور الصادات هى : $\boxed{\text{س} = 0}$ أو $\boxed{\overrightarrow{\text{ر}} = \text{ك}\,(0 \text{ ، } 1)}$

مثال ٤

أوجد الصورة المتجهة والكارتيزية للخط المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة و = (–٣ ، ٥)

الحل

∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل.

∴ المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (–٣ ، ٥) متجه اتجاه لهذا المستقيم

، ميل المستقيم = $\frac{-٥}{٣}$

∴ المعادلة المتجهة هى : $\overleftarrow{ر}$ = ك $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ر}$ = ك (–٣ ، ٥)

، المعادلة الكارتيزية هى : ص = م س

∴ ص = $\frac{-٥}{٣}$ س

∴ ٣ ص + ٥ س = ٠

متجه اتجاه العمودى على المستقيم

* **إذا كان :** $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه مستقيم فإن أيًا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك (ب ، – أ) حيث ك ∈ ح* يكون متجه اتجاه العمودى على المتجه $\overleftarrow{ى}$
* **إذا كان :** $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب) عموديًا على خط مستقيم فإن أيًا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك = (ب ، – أ) حيث ك ∈ ح* يكون متجه اتجاه المستقيم.

فمثلًا **إذا كان :** $\overleftarrow{ى}$ = (٤ ، ٥) متجه اتجاه مستقيم فإن متجه اتجاه العمودى عليه هو :

(٥ ، –٤) ، (–٥ ، ٤) ، (–١٠ ، ٨) ، .....

مثال ٥

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم ل الذى يمر بالنقطة و (–٣ ، ٢) وعمودى على المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، ٤)

الحل

∵ $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، ٤) عمودى على المستقيم ل

∴ $\overleftarrow{ى}$ = (٤ ، –١) متجه اتجاه للمستقيم ل

∴ المعادلة المتجهة هى : $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{و}$ + ك $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ر}$ = (–٣ ، ٢) + ك (٤ ، –١)

أى أن (س ، ص) = (–٣ ، ٢) + ك (٤ ، –١)

، المعادلتان الوسيطيتان هما : س = –٣ + ٤ ك ، ص = ٢ – ك

، المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ٢}{س + ٣} = \frac{-١}{٤}$

أى أن ٤ ص – ٨ = – س – ٣

∴ الصورة العامة هى : س + ٤ ص – ٥ = ٠

مـلاحظـة

إذا كانت المعادلة العامة للمستقيم هى : أ س + ب ص + حـ = ٠ فإن :

* المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب) = (معامل س ، معامل ص) هو متجه عمودى على المستقيم.

* المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (ب ، – أ) هو متجه اتجاه لهذا المستقيم.

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ٢ س + ٣ ص + ٧ = ٠ يكون :

المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (٢ ، ٣) هو متجه عمودى عليه ، المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٣ ، –٢) هو متجه اتجاه له.

مثــال ٦

أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم : ٣ س – ٢ ص + ١٢ = ٠

الحــل

∵ المستقيم : ٣ س – ٢ ص + ١٢ = ٠

∴ المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (٣ ، –٢) متجه عمودى عليه. ∴ المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٢ ، ٣) متجه اتجاه له.

وللحصول على الصورة المتجهة لمعادلة هذا المستقيم نبحث عن أى نقطة يمر بها وذلك بأن نعطى س (أو ص) أى قيمة ونوجد قيمة ص (أو س) المناظرة.

فبوضع س = ٠ نجد أن : –٢ ص + ١٢ = ٠ ∴ ص = ٦

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٦) ∴ معادلته المتجهة هى : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (٢ ، ٣)

حاول بنفسك

أوجد المعادلة المتجهة والكارتيزية للمستقيم ل الذى يمر بالنقطة (–٤ ، ١) والمتجه (–٣ ، ٦) عمودى عليه.

معادلة المستقيم بمعلومية ميله (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

∵ المستقيم ميله (م) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، حـ)

أى أنه يقطع جزءًا من محور الصادات طوله القيمة المطلقة للعدد حـ

وبالتعويض فى الصورة الكارتيزية نجد أن : $\frac{\text{ص} - \text{حـ}}{\text{س} - ٠}$ = م

أى أن $\boxed{\text{ص = م س + حـ}}$

معادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ، محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

∴ ميل المستقيم (م) = $\frac{\text{ب} - ٠}{٠ - \text{أ}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

وبالتعويض فى الصورة الكارتيزية :

$\therefore \frac{ص - ٠}{س - أ} = \frac{-ب}{أ}$

$\therefore$ أ ص = − ب س + أ ب

$\therefore$ ب س + أ ص = أ ب «وبالقسمة على أ ب»

$\therefore \frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

مثال ٧

أوجد المعادلة العامة لكل مما يأتى :

١ المستقيم $ل_١$ الذى ميله ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٧ وحدات طولية.

٢ المستقيم $ل_٢$ الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٤ وحدات ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات.

الحل

١ معادلة المستقيم $ل_١$ هى : ص = م س + جـ

$\therefore$ ص = ٣ س − ٧

٢ معادلة المستقيم $ل_٢$ هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

$\therefore \frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$

أى ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠

حاول بنفسك

أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بالمستقيم : ٣ س + ٨ ص − ٢٤ = ٠

ملاحظات

* **المعادلة :** أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ، ب لا يساويان الصفر معًا

تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

١ **إذا كان :** أ = ٠ ، ب ≠ ٠ **فإن :** ب ص + جـ = ٠ **أى أن** $\boxed{ص = \frac{-جـ}{ب}}$

وهى معادلة مستقيم موازى لمحور السينات ويمر بالنقطة $\left(٠ ، \frac{-جـ}{ب}\right)$

٢ **إذا كان :** أ ≠ ٠ ، ب = ٠ **فإن :** أ س + جـ = ٠ **أى أن** $\boxed{س = \frac{-جـ}{أ}}$

وهى معادلة مستقيم موازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\frac{-جـ}{أ} ، ٠\right)$

٣ **إذا كان :** جـ = ٠ **فإن :** أ س + ب ص = ٠

وهى معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل.

* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع $\boxed{ص = ٠}$
* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع $\boxed{س = ٠}$

مثال ٨

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها الخط المستقيم : ٣ س + ٢ ص + ٦ = ٠

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم أوجد إحداثيات نقطتى تقاطعه مع محورى الإحداثيات.

الحل

∵ ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ ∴ ظا هـ = $\frac{-٣}{٢}$

∵ الميل السالب. ∴ الزاوية منفرجة.

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{٣}{٢}$ هو ٥٦° ١٩َ ٥٦ً ∴ ق (د هـ) = ١٨٠° − ٥٦° ١٩َ = ١٢٣° ٤١َ

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ ∴ ٣ × ٠ + ٢ ص + ٦ = ٠

∴ ص = −٣ ∴ نقطة التقاطع هى (٠ ، −٣)

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ ∴ ٣ س + ٢ × ٠ + ٦ = ٠

∴ س = −٢ ∴ نقطة التقاطع هى (−٢ ، ٠)

حل آخر لإيجاد نقطتى التقاطع مع محورى الإحداثيات :

∵ ٣ س + ٢ ص + ٦ = ٠

∴ ٣ س + ٢ ص = −٦ بالقسمة على −٦ ∴ $\frac{\text{س}}{-٢} + \frac{\text{ص}}{-٣} = ١$

∴ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (−٢ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، −٣)

مثال ٩

أثبت أن النقط : أ = (٤ ، −٣) ، ب = (−٦ ، ٧) ، حـ = (٥ ، −٤) تقع على استقامة واحدة.

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٧ + ٣}{-٦ - ٤}$ = −١ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{-٤ - ٧}{٥ + ٦}$ = −١

∴ النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

حل آخر : ∵ معادلة $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ هى : $\frac{\text{ص} + ٣}{\text{س} - ٤}$ = $\frac{-٤ + ٣}{٥ - ٤}$ = −١ أى ص + س − ١ = ٠

، ∵ النقطة ب = (−٦ ، ٧) تحقق المعادلة. ∴ ب ∈ $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

مثال ١٠

أوجد المعادلة العامة لكل من المستقيمات الآتية :

$\boxed{١}$ المستقيم ل، الذى يمر بالنقطة (٣ ، −١) وميله = $-\frac{٣}{٤}$

٢ المستقيم $ل_٢$ الذى يمر بالنقطة $(٤ ، \sqrt{٣})$ ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $١٢٠°$

٣ المستقيم $ل_٣$ الذى يمر بالنقطة $(-٢ ، -٥)$ والمتجه $\overleftarrow{ى} = (٣ ، ١)$ متجه اتجاه له.

٤ المستقيم $ل_٤$ الذى يمر بالنقطة $(٤ ، -٢)$ والعمودى على المتجه $\overleftarrow{ن} = (-١ ، ٥)$

٥ المستقيم $ل_٥$ الذى يمر بالنقطة $(-٣ ، ٧)$ ويوازى محور السينات.

٦ المستقيم $ل_٦$ الذى يمر بالنقطتين $(٤ ، -٢)$ ، $(٥ ، ٣)$

٧ المستقيم $ل_٧$ الذى يمر بالنقطة $(١ ، ٢)$ موازيًا المستقيم : $٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠$

٨ المستقيم $ل_٨$ الذى يمر بالنقطة $(٢ ، ٣)$ عموديًا على المستقيم الذى ميله $\frac{٥}{٢}$

الحل

١ معادلة المستقيم $ل_١$ هى : $\frac{ص + ١}{س - ٣} = -\frac{٣}{٤}$ أى $٣ س + ٤ ص - ٥ = ٠$

٢ ∵ ميل المستقيم $ل_٢$ = ظا $١٢٠° = -\sqrt{٣}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٢$ هى : $\frac{ص - \sqrt{٣}}{س - ٤} = -\sqrt{٣}$ أى $ص + \sqrt{٣} س = ٥\sqrt{٣}$

٣ ∵ ميل المستقيم $ل_٣ = \frac{١}{٣}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٣$ هى : $\frac{ص + ٥}{س + ٢} = \frac{١}{٣}$ أى $س - ٣ ص - ١٣ = ٠$

٤ المتجه $\overleftarrow{ى} = (٥ ، ١)$ متجه اتجاه للمستقيم $ل_٤$ ∴ ميله $= \frac{١}{٥}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٤$ هى : $\frac{ص + ٢}{س - ٤} = \frac{١}{٥}$ أى $س - ٥ ص - ١٤ = ٠$

٥ معادلة المستقيم $ل_٥$ هى : $ص = ٧$ أى $ص - ٧ = ٠$

٦ ∵ ميل المستقيم $ل_٦ = \frac{٣ + ٢}{٥ - ٤} = ٥$

∴ معادلة المستقيم $ل_٦$ هى : $\frac{ص + ٢}{س - ٤} = ٥$ أى $٥ س - ص - ٢٢ = ٠$

٧ ∵ ميل المستقيم المعطى $= \frac{-٢}{٣}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب $= \frac{-٢}{٣}$

∴ معادلته هى : $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$ أى $٣ ص + ٢ س - ٨ = ٠$

٨ ∵ ميل المستقيم المعطى $= \frac{٥}{٢}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب $= \frac{-٢}{٥}$

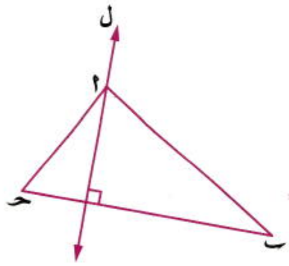
∴ معادلته هى : $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{-٢}{٥}$ أى $٢ س + ٥ ص - ١٩ = ٠$

مثال ١١

أ ب حـ مثلث رءوسه النقط : أ = (−١ ، ٥) ، ب = (٤ ، −٢) ، حـ = (−٣ ، ٠)

أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ عموديًا على $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

الحل



∵ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٣ ، ٠) − (٤ ، −٢) = (−٧ ، ٢)

، ∵ المتجه $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = (−٧ ، ٢) عمودى على المستقيم ل

∴ المتجه $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (٢ ، ٧) متجه اتجاه المستقيم ل

∴ ميل المستقيم = $\frac{٧}{٢}$

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة أ = (−١ ، ٥)

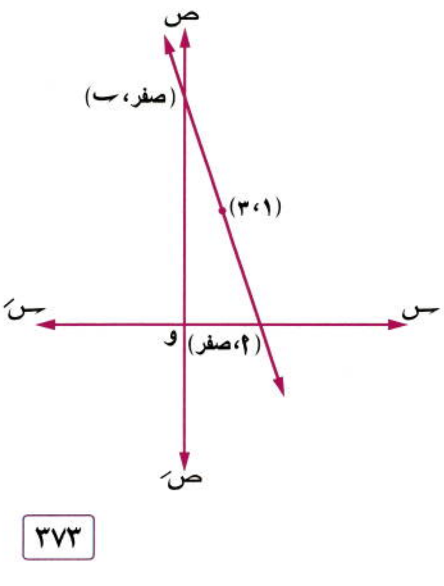
∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} + ١} = \frac{٧}{٢}$ ∴ ٧ س + ٧ = ٢ ص − ١٠

أى ٧ س − ٢ ص + ١٧ = ٠

مثال ١٢

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) وميله سالب والذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثًا مساحته ٦ وحدات مربعة.

الحل



نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات فى (أ ، ٠)

، الصادات فى (٠ ، ب)

∴ معادلته تكون على الصورة : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$

، ∵ (١ ، ٣) نقطة على المستقيم.   ∴ $\frac{١}{\text{أ}} + \frac{٣}{\text{ب}} = ١$

∴ ب + ٣ أ = أ ب   (١)

، ∵ مساحة المثلث = ٦ وحدات مربعة.

∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٦

∴ أ ب = ١٢   (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ب + ٣ أ = ١٢   ∴ ب = ١٢ − ٣ أ

وبالتعويض فى (٢) :

$\therefore$ ٠ (١٢ – ٣ ٠) = ١٢ $\quad$ $\therefore$ ١٢ ٠ – ٣ ٠^{٢} = ١٢ $\quad$ $\therefore$ ٣ ٠^{٢} – ١٢ ٠ + ١٢ = ٠

$\therefore$ ٠^{٢} – ٤ ٠ + ٤ = ٠ $\quad$ $\therefore$ (٠ – ٢)^{٢} = ٠ $\quad$ $\therefore$ ٠ = ٢ ومنها ب = ٦

$\therefore$ معادلة المستقيم هى : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٦} = ١$ $\quad$ $\boxed{\text{أى } ٣ س + ص = ٦}$

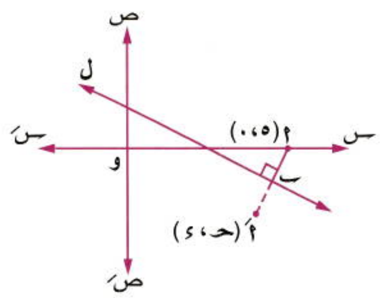
مثال ١٣

أوجد مسقط النقطة ٠ (٥ ، ٠) على المستقيم ل : ٢ س + ص = ٥

ثم أوجد صورة النقطة ٠ بالانعكاس فى نفس المستقيم.

الحل

بفرض نقطة ب هى مسقط النقطة ٠ على المستقيم ل



$\because$ معادلة المستقيم ل هى ٢ س + ص = ٥ (١)

$\therefore$ ميل المستقيم ل = –٢

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{٠ب} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ معادلة $\overleftrightarrow{٠ب}$ هى $\frac{ص - ٠}{س - ٥} = \frac{١}{٢}$

أى أن : س – ٢ ص = ٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : $\therefore$ س = ٣ ، ص = –١

$\therefore$ ب = (٣ ، –١)

أى أن : مسقط النقطة ٠ على المستقيم ٢ س + ص = ٥ هى النقطة ب = (٣ ، –١)

لإيجاد ٠َ (حـ ، ى) صورة ٠ (٥ ، ٠) بالانعكاس فى المستقيم ل

$\therefore$ ب منتصف $\overline{٠٠َ}$ $\quad$ $\therefore$ $\left(\frac{٥ + حـ}{٢} ، \frac{٠ + ى}{٢}\right)$ = (٣ ، –١)

$\therefore$ حـ = ١ ، ى = –٢ $\quad$ $\therefore$ ٠َ = (١ ، –٢)

ملاحظات

١ ميل المستقيم الذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثًا متساوى الساقين يساوى ١ أو –١

٢ مساحة المثلث الذى يصنعه المستقيم $\frac{س}{٠} + \frac{ص}{ب} = ١$ مع محورى الإحداثيات يساوى $\frac{١}{٢}$ | ٠ × ب | وحدة مربعة.

تمارين 6

على معادلة الخط المستقيم

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : ٢ (٣ ، -٢) ، ب (٥ ، ٦) فإن ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

(أ) -١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) ١

(٢) المستقيم الذى معادلته العامة : ٤ س + ٣ ص + ٥ = ٠ يكون ميله = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(٣) المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، -٢) ، (٥ ، ٣) يكون ميل المستقيم العمودى عليه = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) -٥ (د) $\frac{-١}{٥}$

(٤) إذا كان ميل المستقيم : (٣ ٢ + ١) س - ٢ ٢ ص + ٣ = ٠ يساوى ٢ فإن : ٢ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) -$\frac{١}{٢}$

(٥) إذا كان المستقيم : ٢ س - ٤ ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٠,٧٥

فإن : ٢ = ...

(أ) $\frac{-١٦}{٣}$ (ب) -٣ (جـ) $\frac{١٦}{٣}$ (د) ٣

(٦) إذا كانت النقط : (١ ، ٨) ، (٣ ، ص) ، (٩ ، -٤) تقع على استقامة واحدة فإن : ص = ...

(أ) ١١ (ب) ٥ (جـ) -١١ (د) -٥

(٧) إذا توازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) والمستقيم ص = ٢ س - ٣

فإن : ٢ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(٨) إذا كان المستقيمان : ٣ س - ٢ ص + ٧ = ٠ ، ٢ س + ٣ ص + ٥ = ٠ متعامدين

فإن : ٢ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) -١

(٩) ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ هو ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٠) المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون

متجه اتجاهه = ...

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (-١ ، ١) (د) (١ ، ١)

(١١) المستقيم الذى معادلته ص = $\frac{٥}{٤}$ س + ٧ يكون متجه اتجاهه = ...

(أ) (٥ ، ٤) (ب) (٤ ، ٥) (جـ) (−٥ ، ٤) (د) (٥ ، −٤)

(١٢) المستقيم : أ س + ب ص + حـ = ٠ له متجه اتجاه هو ....

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ ، −ب) (جـ) (ب ، أ) (د) (ب ، −أ)

(١٣) ميل المستقيم المار بالنقطتين (أ ، أ^{٢}) ، (ب ، ب^{٢}) هو ....

(أ) أ^{٢} − ب^{٢} (ب) أ − ب (جـ) أ + ب (د) أ ب

(١٤) إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = (٢ ، −٥) متجه اتجاه لمستقيم ما فإن جميع المتجهات التالية تكون متجهات اتجاه لنفس المستقيم ما عدا المتجه ....

(أ) (−٢ ، ٥) (ب) (٦ ، −١٥) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (−١ ، ٢,٥)

(١٥) إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = $\left(\frac{١}{٢} ، ١\right)$ متجه اتجاه للمستقيم فإن جميع المتجهات التالية عمودية على المستقيم عدا المتجه ....

(أ) $\left(١ ، -\frac{١}{٢}\right)$ (ب) (٢ ، −١) (جـ) $\left(-١ ، -\frac{١}{٢}\right)$ (د) (٤ ، −٢)

(١٦) إذا كان ميل المستقيم = $\frac{-٢}{٣}$ فإن متجه اتجاهه يكون ....

(أ) (٣ ، −٢) (ب) (−٣ ، ٢)

(جـ) (٦ ، −٤) (د) كل ما سبق صحيح.

(١٧) إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٣ ، م) متجهى اتجاه لمستقيمين متعامدين فإن : م = ...

(أ) $\frac{٢}{٩}$ (ب) $\frac{-٢}{٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢}$ (د) $\frac{-٩}{٢}$

(١٨) متجه اتجاه المستقيم العمودى على محور الصادات يمكن أن يكون ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (١ ، ١) (د) (−١ ، −١)

(١٩) كل من العلاقات الآتية تمثل خطًا مستقيمًا ما عدا ....

(أ) ص = $\sqrt{٥}$ س (ب) س = ٥ (جـ) $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٢} = ١$ (د) ص = $\sqrt{س}$

(٢٠) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٣) هى ....

(أ) ٣ س + ٤ ص = ١٢ (ب) ٤ س + ٣ ص = ١٢

(جـ) ٣ س + ٤ ص = ٠ (د) ٣ ص + ٤ س = ٠

(٢١) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س + ٣ = ٠ (ب) ص + ٣ = ٠ (جـ) س − ٢ = ٠ (د) ص − ٣ = ٠

(٢٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يمر بالنقطة (−٢ ، ٧) ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) ص = ٢ (ب) ص = −٢ (جـ) س = ٧ (د) س = −٢

(٢٣) معادلة المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٥ وحدات هى ....

(أ) ص = س − ٥ (ب) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥

(جـ) ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ س + ٥ (د) ص = س + ٥

(٢٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٢) عموديًا على المستقيم ص = ٧ هى ....

(أ) س = ٣ (ب) س = ٧ (جـ) ص = −٢ (د) ص = ٧

(٢٥) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السينى والصادى جزأين موجبين مقداراهما ٢ ، ٣ على الترتيب هى ....

(أ) ٣ س + ٢ ص = ٦ (ب) ٣ س + ٢ ص = ١

(جـ) ٢ س + ٣ ص = ٦ (د) ٢ س + ٣ ص = ١

(٢٦) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (−٤ ، ٣) ومتجه الاتجاه له (٢ ، ٥) هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٤ ، ٣) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٢ ، ٥)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٥ ، ٢) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (٣ ، −٤)

(٢٧) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (١ ، ٢) هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٢) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٢ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٠ ، ١)

(٢٨) المعادلة المتجهة لمحور السينات هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (٠ ، ٠) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٠) + ك (١ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)

(٢٩) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٣ ، ٥) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (٠ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠)

(٣٠) جميع المعادلات الآتية تمثل معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ما عدا المعادلة ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٠) + ك (٥ ، −٢) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٥ ، −٢)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٠) + ك (٢ ، ٥) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (−١٠ ، ٤)

(٣١) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ومتجه الاتجاه له (−١ ، ٤) هما ....

(أ) س = ١ − ك ، ص = ٥ + ٤ ك (ب) س = ك ، ص = ٥ + ٤ ك

(جـ) س = ٥ + ٤ ك ، ص = − ك (د) س = − ك ، ص = ٥ + ٤ ك

(٣٢) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° ويمر بالنقطة (٣ ، –٥) هما ....

(أ) س = ٣ + ك ، ص = –٥ + ك (ب) س = ٣ + ك ، ص = ٥ + ك

(جـ) س = ١ + ٣ ك ، ص = ١ – ٥ ك (د) س = ١ – ٣ ك ، ص = ١ + ٥ ك

(٣٣) المستقيم ل : س = ١ – ٢ ك ، ص = –١ + ٤ ك يمر بالنقطة ....

(أ) (١ ، ١) (ب) (١ ، –١) (جـ) (–١ ، –١) (د) (–١ ، ١)

(٣٤) المستقيم الذى معادلته المتجهة هى $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، –١) + ك (٣ ، –٥) يكون متجه اتجاه العمودى عليه = ...

(أ) (٣ ، –٥) (ب) (٢ ، –١) (جـ) (٥ ، ٣) (د) (–٥ ، ٣)

(٣٥) إذا كان المستقيمان : ٤ س + ب ص + ٩ = ٠ ، $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٥) + ك (٢ ، ٦) متوازيين فإن : ب = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(٣٦) إذا مر مستقيم بالنقطة (٢ ، ١) وكان المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، ٣) عموديًا عليه فإن معادلة المستقيم هى ....

(أ) س + ٢ ص + ٥ = ٠ (ب) س + ٣ ص – ٥ = ٠

(جـ) س – ٣ ص = ٠ (د) ٣ س – ص – ٥ = ٠

(٣٧) المستقيم العمودى على المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك ($\sqrt{٣}$ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٣٨) المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك (٠ ، ١) يوازى ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم س = ص (د) المستقيم ص = ٢

(٣٩) مساحة المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم ٢ س + ٣ ص = ٦ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١٢

(٤٠) أى النقط الآتية تقع على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (–٢ ، ١) + ك (١ ، –٣) ؟

(أ) ($\frac{-٥}{٣}$ ، –٢) (ب) ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) (جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، –$\frac{١}{٢}$) (د) ($\frac{-٧}{٣}$ ، ٢)

(٤١) النقطة التى تقع على المستقيم : س = –١ + ٢ ك ، ص = ٣ – ك والتى إحداثيها السينى = ٣ هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (٣ ، –١) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٢)

(٤٢) طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم : ٢ س + ٣ ص − ٦ = ٠ هو .... وحدة طول.

(أ) ٣　　(ب) ٢　　(جـ) ٥　　(د) ٦

(٤٣) إذا كانت الصورة البارامترية لمعادلة مستقيم هى س = ٦ + ٣ ك ، ص = ١ − ٢ ك

فإن ميل هذا المستقيم = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$　　(ب) ٦　　(جـ) $\frac{-٢}{٣}$　　(د) $\frac{-٣}{٢}$

(٤٤) المستقيمان $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ ، $\frac{س}{-أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ يكونان ....

(أ) متوازيان.　　(ب) متقاطعان ومتعامدان.

(جـ) متقاطعان وغير متعامدان.　　(د) يتقاطعان فى النقطة (أ ، ٠)

(٤٥) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) وعمودى على المستقيم س + ٣ ص = ١١ هى ....

(أ) س − ٣ ص + ١٢ = ٠　　(ب) س − ٣ ص − ١٢ = ٠

(جـ) ٣ س − ص − ١٤ = ٠　　(د) ٣ س − ص + ١٤ = ٠

(٤٦) إذا كانت المعادلة البارامترية للمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى س = ٤ ك − ١ ، ص = ٤

فإن ميل المستقيم العمودى على $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٤}$　　(ب) صفر.　　(جـ) ١　　(د) غير معرف.

(٤٧) إذا كانت معادلتا المستقيمان الذين يحملان قطرا متوازى الأضلاع أ ب حـ ء هما س + ٣ ص = ٤

، ٦ س − ٢ ص = ٧ فإن الشكل أ ب حـ ء يجب أن يكون ....

(أ) مستطيل.　　(ب) مربع.　　(جـ) رباعى دائرى.　　(د) معين.

(٤٨) إذا كان $\overline{أء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ الذى فيه : أ (٢ ، ٢) ، ب (٦ ، −١) ، حـ (٧ ، ٣)

فإن معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ١) موازيًا $\overline{أء}$ هى ....

(أ) ٢ س − ٩ ص − ٧ = ٠　　(ب) ٢ س − ٩ ص − ١١ = ٠

(جـ) ٢ س + ٩ ص − ١١ = ٠　　(د) ٢ س + ٩ ص + ٧ = ٠

(٤٩) معادلة محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، −١) ، ب (٤ ، ٣) هى ....

(أ) س + ٢ ص = ٠　　(ب) س + ٢ ص = ٥

(جـ) ٢ س − ص = ٥　　(د) س − ٢ ص = ٥

(٥٠) إذا كانت النقطة (٤ ، ٦) هى منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها على محورى الإحداثيات

فإن معادلة الخط المستقيم الذى يحمل هذه القطعة هى ....

(أ) ٣ س + ٢ ص = ٢٤　　(ب) ٢ س + ٣ ص = ٢٦

(جـ) ٤ س + ٦ ص = ٥٢　　(د) ٣ س + ٢ ص = ٤٨

(٥١) إذا كان : أ (١ ، −٢) ، ب (٣ ، −١) فإن معادلة المستقيم الذى يقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ٣ : ١ من الداخل على التعامد هى ....

(أ) ٤ س + ٢ ص = ٥ (ب) ٤ س + ٢ ص = ١٥

(جـ) ٨ س + ٤ ص = ٥ (د) ٨ س + ٤ ص = ١٥

(٥٢) إذا كانت النقطة (−٤ ، ٥) إحدى رؤوس مربع ، أحد قطريه يقع على المستقيم ٧ س − ص + ٨ = ٠ فإن معادلة القطر الآخر هى ....

(أ) س + ٣ ص = ٢١ (ب) ٢ س − ٣ ص = ٧

(جـ) س + ٧ ص = ٣١ (د) ٢ س + ٣ ص = ٢١

(٥٣) إذا كان المستقيم : أ س + ب ص = ١٢ يقطع جزءًا موجبًا من محور السينات طوله ٦ وحدات ، وجزءًا سالبًا من محور الصادات طوله ٤ وحدات فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) −٤ (د) −٢

(٥٤) معادلة الخط المستقيم الذى يقع على بعدين متساويين من المستقيمين ص = −٢ ، ص = ١٠ هى ....

(أ) ص = ٨ (ب) ص = ٤ (جـ) س = ٤ (د) س = −١٢

(٥٥) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة حـ (٣ ، ٤) ويقطع الجزئين الموجبين لمحورى الإحداثيات السينى والصادى فى النقطتين أ ، ب على الترتيب بحيث أ حـ : حـ ب = ٢ : ٣ هى ....

(أ) ٢ س + ص = ١٠ (ب) س + ٢ ص = ١٠

(جـ) ٢ س + ص = ٥ (د) س + ص = ١٠

(٥٦) مساحة المثلث المحدد بالمستقيم المار بالنقطة أ (٢ ، ٣) وميله = $\frac{١}{٢}$ ومحورى الإحداثيات تساوى .... وحدة مربعة.

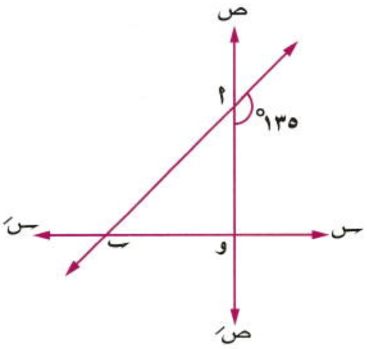
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥٧) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٣) ويقطع من محورى الإحداثيات جزءين مجموعهما −١ هى ....

(أ) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٣} = ١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = ١$ (ب) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ، $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{١} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٣} = -١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = -١$ (د) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = -١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = ١$

(٥٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان طول $\overline{\text{أب}}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى ....

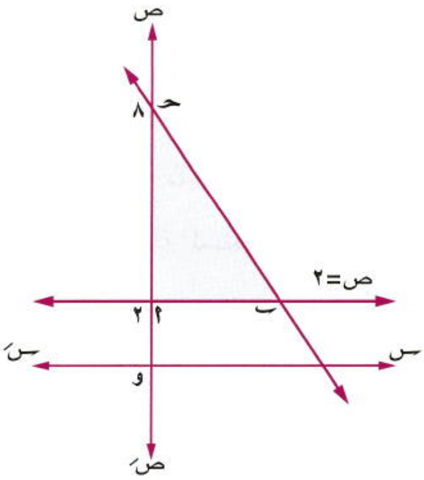
(أ) $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٢} = ١$

(ب) $\frac{\text{س}}{٢} - \frac{\text{ص}}{٢} = ١$

(جـ) $\frac{\text{س}}{٢} - \frac{\text{ص}}{٢} = -١$

(د) $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٢} = -١$

(٥٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان مساحة Δ أ ب حـ = ٩ وحدة مربعة

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

هى ....

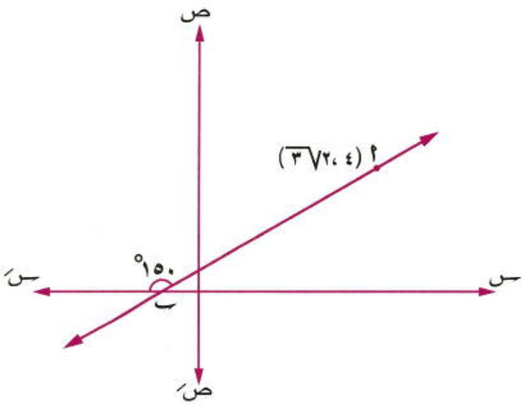
(أ) ٣ س + ٢ ص − ١٦ = ٠

(ب) س + ص = ٨

(جـ) ٢ س − ص + ٨ = ٠

(د) ٢ س + ص − ٨ = ٠

(٦٠) فى الشكل المقابل :



معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى ....

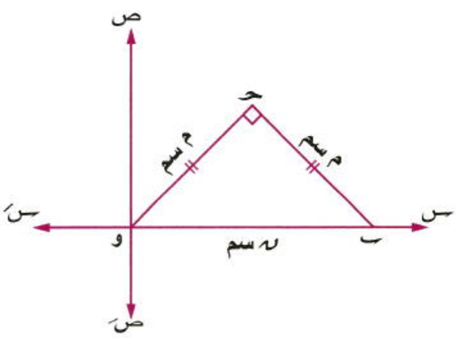
(أ) س − $\sqrt{٣}$ ص − ١ = ٠

(ب) س − $\sqrt{٣}$ ص + ٢ = ٠

(جـ) $\sqrt{٣}$ س + ص − $\sqrt{٣}$ = ٠

(د) ٣ س − $\sqrt{٣}$ ص − ٦ = ٠

(٦١) فى الشكل المقابل :



إذا كان : و حـ = ب حـ ، ق (∠ حـ) = ٩٠°

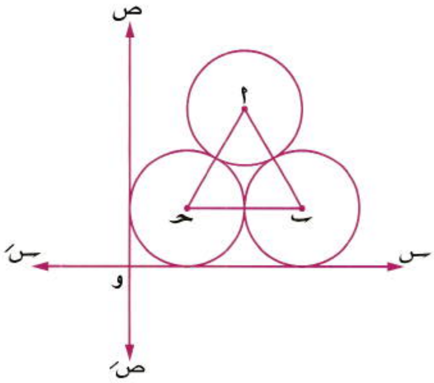
أى مما يأتى يعتبر معادلة

للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{و حـ}}$ ؟

(أ) ص = $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ س (ب) ص = س

(جـ) ص = $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ س (د) ص = م ن س

(٦٢) في الشكل المقابل :



ثلاث دوائر متطابقة متماسة مثنى مثنى إذا كانت :

حـ = (٤ ، ٤) فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هي ....

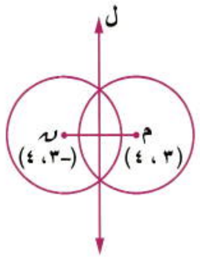
(أ) $\vec{ر}$ = (٤ ، ٤) + ك (١ ، − $\sqrt{٣}$)

(ب) $\vec{ر}$ = (٨ ، ٤) + ك (١ ، − $\sqrt{٣}$)

(جـ) $\vec{ر}$ = (١٢ ، ٤) + ك (١ ، − $\sqrt{٣}$)

(د) $\vec{ر}$ = (١٢ ، ٤) + ك (− $\sqrt{٣}$ ، ١)

(٦٣) في الشكل المقابل :



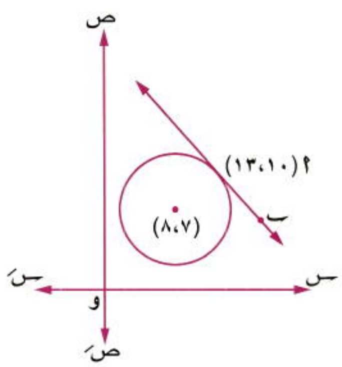
دائرتان متطابقتان فإن

معادلة المستقيم ل هي ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠

(جـ) س + ٤ ص = ٠ (د) ٣ س + ٤ ص = ٠

(٦٤) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها (٧ ، ٨) ، المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس لها عند النقطة أ

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هي ....

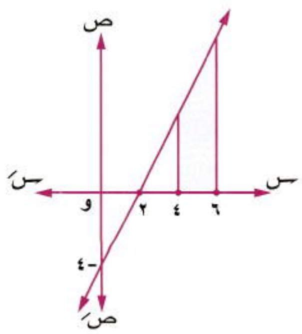
(أ) ٥ س + ٣ ص = ٩٥

(ب) ٣ س + ٥ ص = ٣٥

(جـ) ٣ س + ٥ ص + ٩٥ = ٠

(د) ٣ س + ٥ ص = ٩٥

(٦٥) في الشكل المقابل :

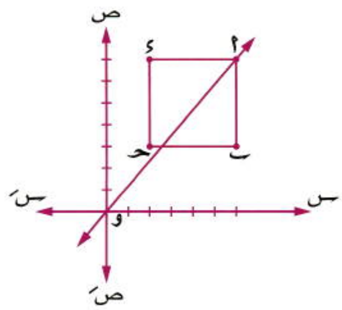


مساحة الشكل المظلل = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٦ (ب) ١٢

(جـ) ٨ (د) ٢٤

(٦٦) فى الشكل المقابل :



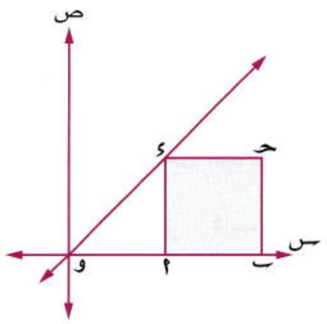
أ ب حـ ء مربع فيه : حـ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٣)

فإن معادلة $\overleftrightarrow{\text{أو}}$ هى ....

(أ) ٤ س − ٣ ص = ٠ (ب) ٦ س − ٣ ص = ٠

(جـ) ٧ س − ٦ ص = ٠ (د) ٥ س − ص = ٠

(٦٧) فى الشكل المقابل :



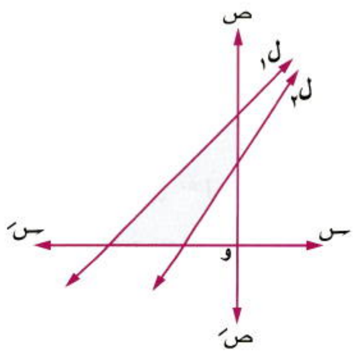
إذا كان : أ ب حـ ء مربع ، حـ (٩ ، ٥)

فإن معادلة $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$ هى ....

(أ) ٤ س − ٥ ص = ٠ (ب) ٤ س + ٥ ص = ٠

(جـ) ٥ س − ٤ ص = ٠ (د) ٥ س + ٤ ص = ٠

(٦٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان معادلة المستقيم ل١ هى س − ٢ ص + ١٢ = ٠

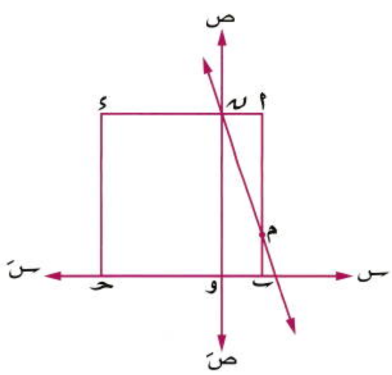
، معادلة المستقيم ل٢ هى س − ص + ٤ = ٠

فإن مساحة الشكل الرباعى المظلل = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ٢٦

(جـ) ٢٨ (د) ٣٠

(٦٩) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع فيه : ء (−٣ ، ٤)

، م أ = ٣ م ب فإن معادلة $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ هى ....

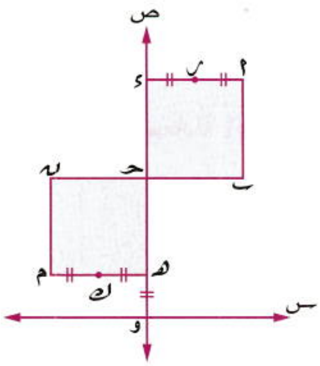
(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (١ ، −٣)

(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (٣ ، −١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك (١ ، ٣)

(د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك (−١ ، ١)

(٧٠) في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ ء ، حـ هـ م ن مربعان متطابقان ، هـ (٠ ، ١)

، ك ، ى منتصف $\overline{هـ م}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ى ك}$ هي ....

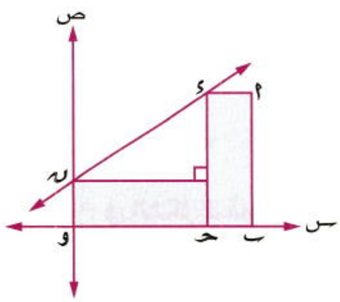
(أ) س − ٢ ص + ٦ = ٠

(ب) ٢ س − ص + ٣ = ٠

(جـ) ٢ س − ص + ١٢ = ٠

(د) ٢ س − ص + ٦ = ٠

(٧١) في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ ء ، و حـ م ن مستطيلان متطابقان

وكان أ (٨ ، ٦) فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ن ء}$ هي ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٦) + ك (٢ ، ٣)

(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٦) + ك (−٣ ، ٢)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٣ ، ٢)

(د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (−٢ ، ٣)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ **أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية ، وبين أيًا من هذه المستقيمات متوازيًا وأيها متعامد :**

(١) (٣ ، ١) ، (−٢ ، ٥)

(٢) (٤ ، ٠) ، (٢ ، −١)

(٣) (٧ ، −١) ، (٣ ، −٣)

(٤) (−٥ ، −٢) ، (−١ ، ٣)

---

٢ إذا كانت معادلتا المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ هما على الترتيب ٢ س − ٣ ص + أ = ٠

، ٣ س + ب ص − ٦ = ٠

(١) أوجد ميل المستقيم $ل_١$

(٢) أوجد قيمة ب التي تجعل $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيين.

(٣) أوجد قيمة ب التي تجعل $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدين.

(٤) إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطة (١ ، ٣) **فأوجد قيمة : أ**

«$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٩}{٢}$ ، ٢ ، ٧»

٣ أى المستقيمات الآتية يكون موازيًا لمحور الصادات ، وأيها يكون موازيًا لمحور السينات ، وأيها يمر بنقطة الأصل ، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محورى الإحداثيات (إن وجدت) :

(١) ٢ س + ٣ = ٠ | (٢) س + ٣ ص = ٠

(٣) ٢ س + ٣ ص = ١٢ | (٤) ص − ٥ = ٠

---

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى :

(١) يمر بالنقطة ن (٣ ، −١) والمتجه $\overrightarrow{ى}$ = (−٣ ، ٥) متجه اتجاه له.

(٢) يمر بالنقطة (٥ ، −١) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥°

(٣) يمر بالنقطتين (٢ ، −٣) ، (٥ ، ١)

(٤) يمر بالنقطة (٢ ، −١) وميله = $\frac{١}{٣}$

(٥) يمر بالنقطة ن (٢ ، −٣) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (−١ ، ٢) متجه اتجاه عمودى عليه.

(٦) يمر بالنقطة (١ ، ٣) ويكون عموديًا على المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٢ ، ١)

(٧) يمر بالنقطة ن (٣ ، ٥) عموديًا على المتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٥ ، ٤)

(٨) يحمل متجه الموضع $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −٣)

---

٥ أوجد المعادلة العامة للمستقيم الذى :

(١) يمر بالنقطة (٣ ، −٤) ويوازى المستقيم : س + ٢ ص − ٧ = ٠

(٢) يمر بالنقطة ن (−١ ، −٣) والمتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ = (−٤ ، ٣) ، ب = (−٥ ، −٢) متجه اتجاه له.

(٣) يقطع طولًا قدره ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات والمتجه $\overrightarrow{ى}$ = (٧ ، −٣) متجه اتجاه له.

(٤) يقطع طولًا قدره ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات وميله = $-\frac{١}{٢}$

(٥) يقطع طولًا قدره ٢ وحدة من الجزء السالب لمحور السينات ويقطع طولًا قدره ٤ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات.

(٦) يمر بالنقطة (−٧ ، ٢ $\sqrt{٣}$) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ($\frac{٢\pi}{٣}$)

(٧) يمر بالنقطة (٣ ، −٥) عموديًا على المستقيم : س + ٣ ص = ١١

(٨) يمر بالنقطة (٣ ، ٥) عموديًا على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٥ ، ٤)

(٩) يكون عموديًا على $\overline{أب}$ من نقطة أ حيث أ = (−٣ ، ٦) ، ب = (٢ ، ١)

(١٠) يكون عموديًا على $\overline{أب}$ من نقطة المنتصف حيث : أ = (−٤ ، ١) ، ب = (−٢ ، ٣)

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) وميله = ٢ وإذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٧) ، (٥ ، ب) **فأوجد قيمتى : أ ، ب** «٧ ، ٣»

٧ أوجد معادلة المستقيم الذى ميله م ، والمار بالنقطة (أ ، ٠) ما هى نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور الصادات ؟

٨ **أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين :** أ = (٤ ، −١) ، ب = (٢ ، ٣) يوازى المستقيم المار بالنقطتين حـ = (٢ ، ١) ، ء = (٣ ، −١) ثم أوجد معادلة كل من المستقيمين.

٩ إذا كانت : أ (٠ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (−٢ ، ٣) ثلاث نقط فى المستوى ، فأوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، ثم أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

١٠ **أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم :** ٢ س − ٣ ص + ١٢ = ٠ .

١١ أوجد معادلتى المستقيمين اللذين يمران بالنقطة (−٣ ، ٢) ويوازيان المحورين.

١٢ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٢) ويصنع زاوية موجبة جيب تمامها يساوى $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

١٣ إذا كانت : أ = (−٤ ، ٤) ، ب = (−١ ، −٢) ، حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل فأوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة حـ والنقطة (٢ ، ٣)

١٤ إذا كانت : أ = (١ ، ٤) ، ب = (−٤ ، ٦) فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ ويكون عموديًا على المستقيم ٥ س − ٤ ص − ١٢ = ٠ .

١٥ **الربط بالهندسة :** $\overline{\text{أب}}$ قطر فى دائرة مركزها م فإذا كان : ب (−٧ ، ١١) ، م (−٢ ، ٣) فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ

١٦ **الربط بالهندسة :** إذا قطع المستقيم ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ محورى الإحداثيات السينى والصادى فى النقطتين أ ، ب على الترتيب **فأوجد :**

(١) مساحة سطح ∆ و أ ب حيث و نقطة الأصل.

(٢) معادلة المستقيم العمودى على $\overline{\text{أب}}$ ويمر بنقطة منتصفها.

١٧ **أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم الذى يمر بالنقطتين :** (−٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)

١٨ **أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم :** $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، −١) + ك (٢ ، ٥)

١٩ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٥ ، −٢) عموديًا على المستقيم الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزءًا طوله ٤ وحدات ومن الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٣ وحدات.

---

٢٠ **أثبت أن النقط :** ﺃ = (٢ ، −٣) ، ﺏ = (٧ ، ٢) ، ﺣ = (١ ، ١) هى رؤوس مثلث وإذا كانت ء ∈ $\overline{\text{ﺃﺏ}}$ بحيث ﺃء : ﺃﺏ = ٢ : ٥ فأوجد إحداثيى النقطة ء ثم اكتب الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ﺣء}}$

---

٢١ **أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان :**

(١) ل : ٣ ص + س = ٦

(٢) ل يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٢)

(٣) ل يقطع من محورى السينات والصادات جزءين موجبين طولاهما ٤ ، ٦ وحدات طولية على الترتيب.

(٤) ل : س = ٢ + ٣ ك ، ص = −١ + ٢ ك

(٥) المتجه $\overleftarrow{ى}$ = ($\sqrt{٣}$ ، ١) متجه اتجاه له.

(٦) المتجه $\overleftarrow{ى}$ = ($\sqrt{٣}$ ، ١) متجه اتجاه العمودى عليه.

---

٢٢ **أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم ل :** ٢ س − ٣ ص − ٦ = ٠

---

٢٣ **أوجد الصورة المتجهة والصورة العامة لمعادلة المستقيم ل :** س = ٣ − ٢ ك ، ص = −١ + ٣ ك

---

٢٤ **أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم ل :** $\frac{\text{س}}{\text{ﺃ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ﺏ}}$ = ١ حيث ﺃ ≠ ٠ ، ﺏ ≠ ٠

---

٢٥ أوجد معادلة محور تماثل $\overline{\text{ﺃﺏ}}$ حيث ﺃ = (٢ ، ٣) ، ﺏ = (−٤ ، ٥)

---

٢٦ إذا كانت : ﺃ (٥ ، −٦) ، ﺏ (٣ ، ٧) ، ﺣ (١ ، −٣)

، فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة ﺃ وينصف $\overline{\text{ﺏﺣ}}$

---

٢٧ ﺃﺏﺣ مثلث رءوسه النقط ﺃ = (−١ ، ٥) ، ﺏ = (٤ ، −٢) ، ﺣ = (−٣ ، ٠)

أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس ﺃ عموديًا على $\overline{\text{ﺏﺣ}}$

---

٢٨ **أثبت أن المعادلتين :** $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ٣) + ك (٦ ، −٤) ، $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، −١) + ك (−٣ ، ٢)

تدلان على نفس المستقيم.

---

٢٩ ﺃﺏﺣء مربع فيه : ﺃ = (٣ ، ٢) ، ﺣ = (−١ ، ٤) أوجد معادلتى قطريه.

---

٣٠ ﺃﺏﺣ مثلث رءوسه النقط ﺃ = (٣ ، ١) ، ﺏ = (−١ ، ١) ، ﺣ = (٢ ، ٤)

أوجد :

(١) معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه. (٢) معادلات المستقيمات الحاملة لمتوسطاته.

٣١ أثبت أن النقطة : م = (٥ ، −٤) هى مركز الدائرة المارة برءوس المثلث ؟ ب حـ حيث :

؟ = (١ ، −١) ، ب = (١ ، −٧) ، حـ = (٢ ، ٠) ثم أوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (؟ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) يمر بالنقطة ....

(أ) (؟ ، ب) (ب) ($\frac{١}{٢}$ ؟ ، $\frac{١}{٢}$ ب)

(جـ) ($\frac{١}{٣}$ ؟ ، $\frac{١}{٣}$ ب) (د) ($\frac{١}{٤}$ ؟ ، $\frac{١}{٤}$ ب)

(٢) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات السينى والصادى الموجبين بواسطة المستقيم ل$_١$ هى ؟ ، ب على الترتيب وكانت الأجزاء المقطوعه من محورى الإحداثيات السينى والصادى الموجبين بواسطة المستقيم ل$_٢$ هى ٢ ؟ ، ٢ ب على الترتيب فإن ....

(أ) ل$_١$ $\perp$ ل$_٢$ (ب) ل$_١$ // ل$_٢$

(جـ) ل$_١$ $\cap$ ل$_٢$ = {(؟ ، ب)} (د) غير ذلك.

(٣) إذا كان ل$_١$ مستقيم يمر بالنقطة ؟ (٢ ، ٣) ويصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإذا دار المستقيم ل$_١$ حول نقطة ؟ زاوية قياسها ١٥° فى اتجاه دوران عقارب الساعة فإن معادلة المستقيم فى الوضع الجديد هى ....

(أ) ص − س = ١ (ب) ص + س = ١

(جـ) ٢ س + ص = ١ (د) ٢ س + ٣ ص = ٥

(٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويقطع جزئين متساويين فى الطول من محورى الإحداثيات يمكن أن تكون ....

(أ) س + ص = ٧ (ب) س − ص = −١

(جـ) ص + ٢ س = ١٠ (د) (أ) ، (ب) معًا.

(٥) إذا كانت : ؟ (٣ ، −٥) ، ب (−٤ ، ٨) فإن النسبة التى يقسم بها المستقيم س + ص = ٠ القطعة المستقيمة $\overline{؟ب}$ من جهة ؟ هى ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٣ : ٢

(٦) مسقط النقطة (٢ ، ٣) على المستقيم ل : س + ص = ١١ هو ....

(أ) (−٦ ، ٥) (ب) (٦ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٦) (د) (−٥ ، ٦)

(٧) صورة النقطة (٣ ، ٨) بالانعكاس فى المستقيم ل : س + ٣ ص − ٧ = ٠ هى ....

(أ) (−١ ، −٤)   (ب) (−٣ ، −٨)   (جـ) (١ ، −٤)   (د) (٣ ، ٨)

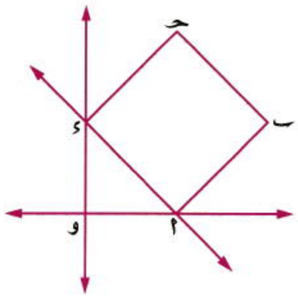
(٨) إذا كانت النقطة أ (٠ ، ٠) هى صورة النقطة ب (٤ ، ٢) بالانعكاس فى المستقيم ل

فإن معادلة المستقيم ل هى ....

(أ) س = ٢ ص   (ب) ٢ س + ص = ٥

(جـ) ٢ س − ص = ٥   (د) س + ص = ٦

(٩) الشكل المقابل :



يمثل مربع أ ب حـ ء ، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

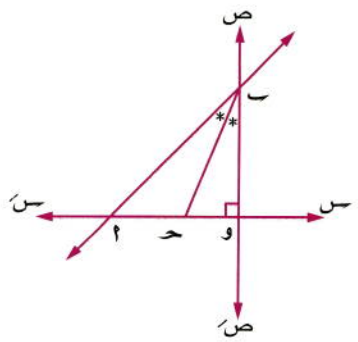
هى س + ص = ٤

فإن معادلة القطر $\overline{\text{بء}}$ هى ....

(أ) س = ٤   (ب) ص = ٤

(جـ) س + ص = ٢   (د) س + ص = ٤ $\sqrt{٢}$

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى : $\frac{\text{ص}}{٦} - \frac{\text{س}}{٨} = ١$

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ هى ....

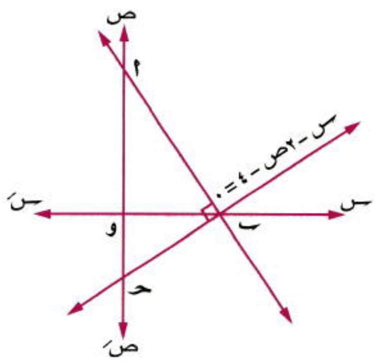
(أ) $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٦} = ١$

(ب) $\frac{\text{س}}{-٣} + \frac{\text{ص}}{٦} = ١$

(جـ) $\frac{\text{س}}{٦} - \frac{\text{ص}}{٣} = ١$

(د) س + ص = ١٨

(١١) فى الشكل المقابل :



مساحة Δ أ ب حـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٥

(ب) ٢٠

(جـ) ٢٤

(د) ٣٢

(١٢) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ١٥ وحدة مربعة.

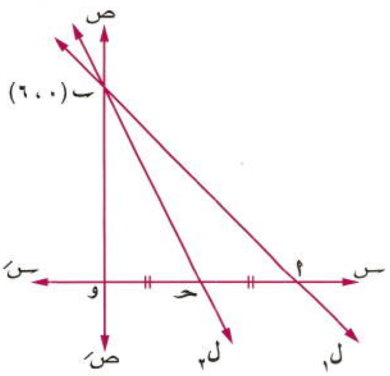
، حـ أ = حـ و فإن معادلة $ل_١$ هي ....

(أ) $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٦} = ١$

(ب) $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٥} = ١$

(جـ) $\frac{س}{١٠} + \frac{ص}{٦} = ١$

(د) $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{١٠} = ١$



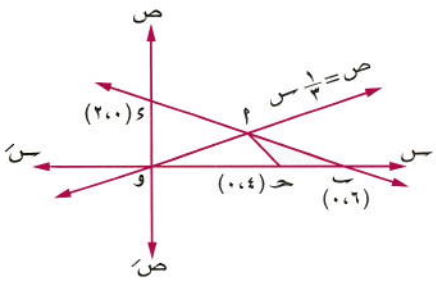
(١٣) في الشكل المقابل :

مساحة المثلث أ ب حـ

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) ١ (د) $\frac{٣}{٢}$



(١٤) في الشكل المقابل :

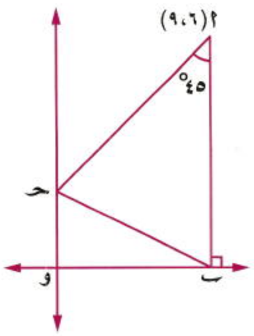
المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هي ....

(أ) $\vec{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (٢ ، −١)

(ب) $\vec{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٢ ، −١)

(جـ) $\vec{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (−١ ، ٢)

(د) $\vec{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (−١ ، ٢)



(١٥) في الشكل المقابل :

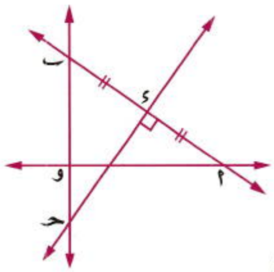
إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$

هي ٢ س + ٣ ص = ١٢

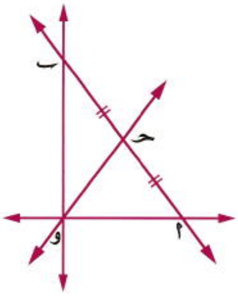
فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{ء حـ}$ هي ....

(أ) $\vec{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٢ ، ٣) (ب) $\vec{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٣ ، ٢)

(جـ) $\vec{ر}$ = (٣ ، ٢) + ك (٢ ، ٣) (د) $\vec{ر}$ = (٣ ، ٢) + ك (٣ ، ٢)



(١٦) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٨} = ١$

فإن المعادلة البارامترية للمستقيم $\overleftrightarrow{وحـ}$ هى ....

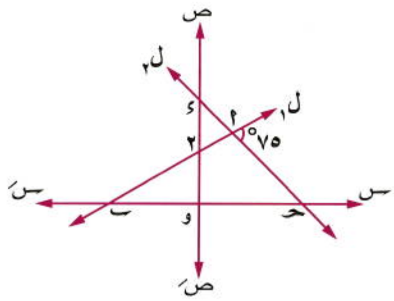
(أ) س = ٣ + ٤ ك ، ص = ٤ + ٣ ك

(ب) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٤ + ٤ ك

(جـ) س = ٣ + ٣ ك ، ص = ٤ + ٤ ك

(د) س = ٤ + ٤ ك ، ص = ٣ + ٣ ك

(١٧) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ل١ ∩ ل٢ = {أ} ، و حـ = و ء

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم ل١ هى ....

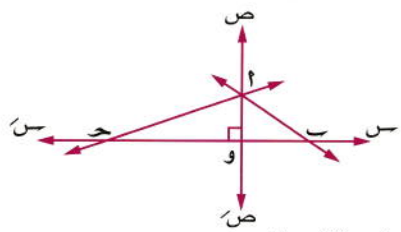
(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (١ ، $\sqrt{٣}$)

(ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (-١ ، -١)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك ($\sqrt{٣}$ ، ١)

(د) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك ($\sqrt{٣}$ ، -١)

(١٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان : و حـ = ٢ و ب ، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

هى ٢ س + ٣ ص = ٦

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$ هى ....

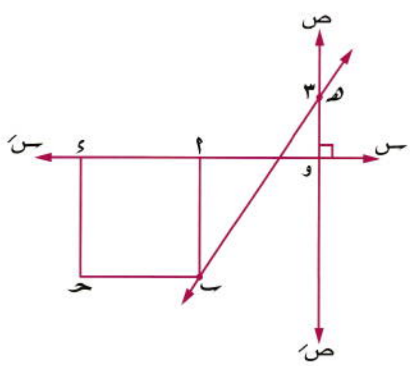
(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (-٦ ، ٠) + ك (١ ، ٣)

(ب) $\overrightarrow{ر}$ = (-٦ ، ٠) + ك (٣ ، ١)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ٣)

(د) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (٣ ، ١)

(١٩) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المربع أبحـء = ٣٦ وحدة مربعة

، ء (-١٢ ، ٠) فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{هـب}$

هى ....

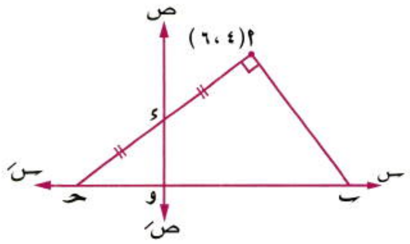
(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (٣ ، ٢)

(ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (-٣ ، ٢)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (-٦ ، -٦) + ك (-٢ ، ٣)

(د) $\overrightarrow{ر}$ = (-٦ ، -٦) + ك (٢ ، ٣)

(٢٠) المعادلتان الوسيطيتان للمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هما ....



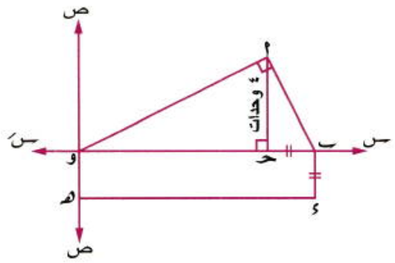
(أ) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٦ + ٤ ك

(ب) س = ٣ − ٤ ك ، ص = ٤ − ٦ ك

(جـ) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٦ − ٤ ك

(د) س = ٣ − ٤ ك ، ص = ٤ + ٦ ك

(٢١) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المستطيل

و ب ء هـ = ٢٠ وحدة مربعة

فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي ....

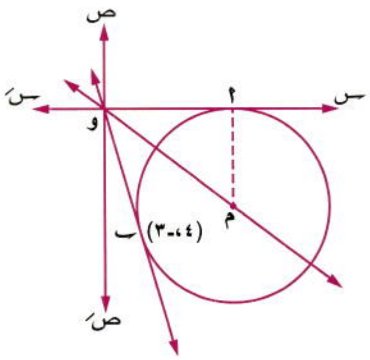
(أ) ٢ س + ص + ٢٠ = ٠

(ب) ٢ س + ص − ٢٠ = ٠

(جـ) ٢ س − ص = ٢٠

(د) ص = ٢ س + ٢٠

(٢٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{وأ}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$ مماسين للدائرة م

عند أ ، ب فإن المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{وم}$

هي ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك (−١ ، ٣)

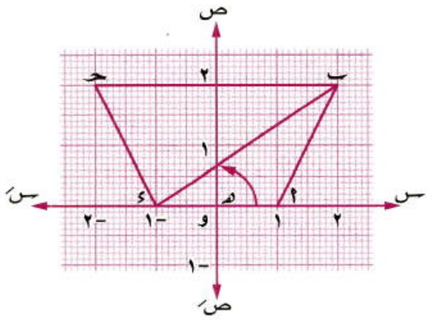
(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٣ ، −١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك (٣ ، −١)

(د) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٠) + ك (٣ ، −١)

---

٢ في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ ء شكلاً رباعياً

أوجد :

(١) ميل $\overleftrightarrow{ب ء}$ ثم استنتج ق (∠ هـ)

(٢) معادلتي : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$

٣ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٤ ، ٣) ويقطع من محورى الإحداثيات جزأين غير متساويين وموجبين مجموعهما ١٤

---

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٢) وميله سالب والذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثًا مساحته ١٢ وحدة مربعة.

---

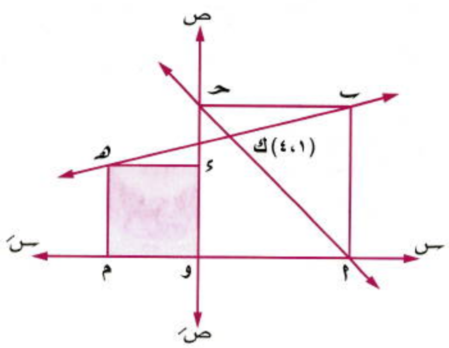
٥ في الشكل المقابل :

و ؟ ب حـ ، و م هـ ء مربعان

، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـ ؟}} = \{\text{ك}\}$

، ك = (١ ، ٤)

أوجد مساحة المربع المظلل.

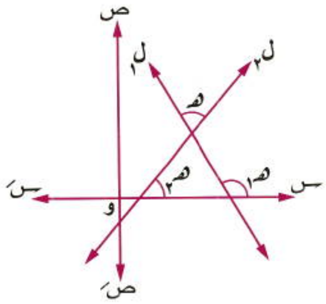


«٩ وحدات مربعة»

الدرس 3 قياس الزاوية بين مستقيمين

بصفة عامة ينتج دائمًا من تقاطع المستقيمين زاويتان [إحداهما مكملة للأخرى]

إما قائمتان أو إحداهما حادة والأخرى منفرجة.



* إذا كانت هـ هى قياس الزاوية بين

المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ اللذين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$

فإن : $\boxed{\text{ظا هـ} = \left|\dfrac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|}$

حيث : $\text{هـ} \in \left[\,٠ ، \dfrac{\pi}{٢}\right]$ ، $م_١ = \text{ظا هـ}_١$ ، $م_٢ = \text{ظا هـ}_٢$

مع ملاحظة ما يأتى :

١ إذا كان ظل الزاوية موجبًا فإننا نحصل على الزاوية الحادة.

٢ إذا كان ظل الزاوية يساوى الصفر فإن قياس الزاوية بينهما يساوى الصفر

[ويكون $م_١ = م_٢$ والمستقيمان متوازيان أو منطبقان]

٣ إذا كان ظل الزاوية غير معرف فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ٩٠°

[ويكون $م_١ م_٢ = -١$ والمستقيمان متعامدان]

٤ قياس الزاوية المنفرجة = قياس مكملة الزاوية الحادة.

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$ل_١$: س − ٢ ص + ٥ = ٠ ، $ل_٢$: ٢ س + ٤ ص − ٧ = ٠

الحـــل

$\because$ م$_1$ = $\frac{1}{2}$ ، م$_2$ = $\frac{-2}{4}$ = $\frac{-1}{2}$

$\therefore$ طا هـ = $\left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right|$ = $\left|\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)}\right|$ = $\frac{4}{3}$

$\therefore$ هـ ≃ ٨َ ٣ ٥٣°

! تذكر أن

ميل المستقيم أ س + ب ص + حـ = ٠

يساوى $\frac{-أ}{ب}$

مثـــال ٢

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

ل$_1$: $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٤ ، ٣) ، ل$_2$: $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٦) + كَ (٧ ، −١)

الحـــل

$\because$ م$_1$ = $\frac{3}{4}$ ، م$_2$ = $\frac{-1}{7}$ $\therefore$ طا هـ = $\left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right|$ = $\left|\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-1}{7}\right)}\right|$ = ١

$\therefore$ هـ = ٤٥°

حاول بنفسك

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ل$_1$: س + ٥ ص = ٣ ، ل$_2$: $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٤ ، ١)

مثـــال ٣

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين ل$_1$: س − ٢ ص + ١ = ٠

، ل$_2$: س + ك ص + ٢ = ٠ يساوى ٤٥° فأوجد قيمة : ك

الحـــل

$\because$ م$_1$ = $\frac{1}{2}$ ، م$_2$ = $\frac{-1}{ك}$ ، هـ = ٤٥° $\therefore$ طا ٤٥° = $\left|\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}}\right|$

$\therefore$ ١ = $\left|\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}}\right|$ $\therefore$ $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}}$ = ± ١

$\therefore$ إما $\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}$ = ١ − $\frac{1}{2ك}$ $\therefore$ $\frac{3}{2ك}$ = $\frac{1}{2}$ $\therefore$ ك = ٣

أ، $\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}$ = $\frac{1}{2ك}$ − ١ $\therefore$ $\frac{1}{2ك}$ = $\frac{-3}{2}$ $\therefore$ ك = $\frac{-1}{3}$

مثال ٤

أوجد قياسات زوايا المثلث ٩ب حـ الذى رءوسه :

٩ = (٦ ، ٥) ، ب = (٦ ، ١) ، حـ = (٣ ، ١)

الحل

ميل $\overleftrightarrow{٩ب}$ = $\frac{٥-١}{٦-٦}$ = $\frac{٤}{٠}$ (غير معرف) ∴ $\overleftrightarrow{٩ب}$ يوازى محور الصادات (١)

، ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ = $\frac{١-١}{٦-٣}$ = $\frac{٠}{٣}$ = صفر ∴ $\overleftrightarrow{بحـ}$ يوازى محور السينات (٢)

، ميل $\overleftrightarrow{٩حـ}$ = $\frac{٥-١}{٦-٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ (٣)

من (١) ، (٢) : ∴ ق(∠ب) = ٩٠° ∴ ∠٩ ، ∠حـ حادتان.

، من (٢) ، (٣) : ∴ ظا حـ = $\left|\frac{\frac{٤}{٣} - \text{صفر}}{١ + \text{صفر} \times \frac{٤}{٣}}\right|$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق(∠حـ) ≃ ٥٣° ٨َ ٣ً ∴ ق(∠٩) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٣° ٨َ ٣ً) = ٣٦° ٥٢َ ٢ً

ملاحظة

* لتعيين نوع المثلث ٩ب حـ حسب زواياه (حيث ٩حـ يمثل طول أكبر أضلاع المثلث) :

١ إذا كان : $(٩حـ)^٢ > (٩ب)^٢ + (بحـ)^٢$ فإن المثلث منفرج الزاوية فى ب

٢ إذا كان : $(٩حـ)^٢ = (٩ب)^٢ + (بحـ)^٢$ فإن المثلث قائم الزاوية فى ب

٣ إذا كان : $(٩حـ)^٢ < (٩ب)^٢ + (بحـ)^٢$ فإن المثلث حاد الزوايا.

مثال ٥

أوجد قياسات زوايا المثلث الذى رؤوسه :

٩ = (٤ ، ٣) ، ب = (−١ ، ١) ، حـ = (−٦ ، ٤) ثم أوجد مساحته.

الحل

∵ ٩ب = $\sqrt{(٤+١)^٢ + (٣-١)^٢}$ = $\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.

، بحـ = $\sqrt{(-١+٦)^٢ + (١-٤)^٢}$ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول.

، ٩حـ = $\sqrt{(٤+٦)^٢ + (٣-٤)^٢}$ = $\sqrt{١٠١}$ وحدة طول.

∴ $(٩حـ)^٢ > (٩ب)^٢ + (بحـ)^٢$ ∴ Δ ٩ب حـ منفرج الزاوية فى ب

∴ ∠ أ ، ∠ حـ حادتان.

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٣ - ١}{٤ + ١}$ = $\frac{٢}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $\frac{١ - ٤}{-١ + ٦}$ = $\frac{-٣}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ = $\frac{٣ - ٤}{٤ + ٦}$ = $\frac{-١}{١٠}$

∴ ظا أ = $\left| \frac{\frac{٢}{٥} + \frac{١}{١٠}}{١ - \frac{٢}{٥٠}} \right|$ = $\frac{٢٥}{٤٨}$ ∴ ق (∠ أ) ≃ ٢٨°

، ظا حـ = $\left| \frac{-\frac{٣}{٥} + \frac{١}{١٠}}{١ + \frac{٣}{٥٠}} \right|$ = $\frac{٢٥}{٥٣}$ ∴ ق (∠ حـ) ≃ ٢٥°

∴ ق (∠ ب) = ١٨٠° − (٢٨° + ٢٥°) = ١٢٧°

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ × أب × أحـ جا أ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٢٩}$ × $\sqrt{١٠١}$ × جا ٢٨°

≃ ١٢,٧ وحدة مربعة.

حاول بنفسك

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ إذا كان :

أ = (٢ ، ٣) ، ب = (-١ ، ٣) ، حـ = (٢ ، ٥)

تمارين 7

على قياس الزاوية بين مستقيمين

اختبر نفسك

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرس

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) 📖 قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين ميلاهما ٢ ، $-\frac{١}{٢}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين اللذين ميلاهما $\frac{-٣}{٤}$ ، -٧ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٥٤°

(٣) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين اللذين ميلاهما $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٩}$ يساوى تقريبًا ....

(أ) ٢٨° (ب) ١٤° (جـ) ٣٢° (د) ١٥°

(٤) 📖 قياس الزاوية بين المستقيمين : ٢ س = ٣ ، ص = ٤ يساوى ....

(أ) ٩٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، −٢) + ك (٣ ، −١)

، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (٢ ، ١) يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : ٦ س − ٣ ص + ٥ = ٠ والمستقيم الذى ميله $\frac{١}{٣}$ يساوى ....

(أ) ١٣٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ٤٥°

(٧) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_١$: ص − $\sqrt{٣}$ س − ٥ = ٠ ، $ل_٢$: س − $\sqrt{٣}$ ص − ٦ = ٠

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٨) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٣ ، ١) ، $ل_٢$: ٢ س = ٣ − ص

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٥٠°

(٩) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: س + ٢ ص + ٥ = ٠ ، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك (١ ، ٢)

يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٣٥°

(١٠) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_{١}$: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٣ ، -٤) ، $ل_{٢}$: ٤ س + ٣ ص - ٥ = ٠ هو ....

(أ) ٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(١١) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_{١}$: ٢ س + ٣ ص = ١٥ ، $ل_{٢}$: $\overrightarrow{ر}$ = (-٢ ، -١) + ك (١ ، -٣) يساوى تقريبًا ....

(أ) ٥٢° (ب) ٥١° (جـ) ٣٩° (د) ٣٨°

(١٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_{١}$: ٢ س - ص - ٣ = ٠ ، $ل_{٢}$: س = ك ، ص = ١ + ك يساوى تقريبًا ....

(أ) ١٩° (ب) ٧١° (جـ) ١٨° (د) ٧٢°

(١٣) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س = ٣ ص ، س + ٢ ص = ٠ هو ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(١٤) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم : س - ٢ ص + ٣ = ٠ ، والمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، -١) ، (٢ ، ١) يساوى تقريبًا ....

(أ) ٣٤َ ٧١° (ب) ٢٨َ ١٩° (جـ) ٣٢َ ٧٠° (د) ٢٦َ ١٨°

(١٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $\sqrt{٣}$ س - ص = ٥ ، ص = ٢ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٢٠°

(١٦) قياس الزاوية بين المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (-٣ ، ٠) والمستقيم ص = ٠ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(١٧) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٢) + ك (١ ، ١) والمستقيم س = ٠ هو ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

(١٨) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : س = ٧ ، ص = أ س + ٢ يساوى ٩٠° فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٩٠ (د) -١

(١٩) إذا كان : أ (-٢ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (-٢ ، -٤) فإن قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هو ....

(أ) $ظا^{-١}$ (١) (ب) $ظا^{-١}$ $\left(\frac{٢}{٣}\right)$ (جـ) $ظا^{-١}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ (د) $ظا^{-١}$ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$

(٢٠) مجموعة قيم ك التى تجعل قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س + ك ص - ٨ = ٠ ، ٢ س - ص - ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ هى ....

(أ) $\left\{٣ ، \frac{-١}{٣}\right\}$ (ب) $\left\{-٣ ، \frac{١}{٣}\right\}$ (جـ) $\left\{٣ ، \frac{١}{٣}\right\}$ (د) $\{٣\}$

(٢١) معادلة المستقيم ل الذى ميله موجب ويمر بالنقطة (٤ ، ١) ويصنع مع المستقيم : ٣ س − ص + ٤ = ٠

زاوية ظل قياسها $\frac{١}{٢}$ هى ....

(أ) ص − س − ٣ = ٠ (ب) ص − س + ٣ = ٠

(جـ) ص + ٧ س − ٢٩ = ٠ (د) ص − ٧ س + ٢٩ = ٠

(٢٢) قياس الزاوية بين المستقيمين أ س + ب ص + حـ = ٠ ، (أ + ب) س = (أ − ب) ص

يساوى ....

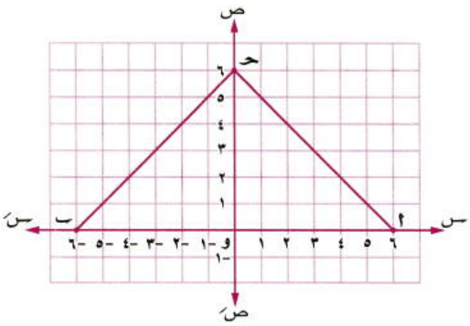
(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٢٣) إذا كان : أ > ٠ ، ب > ٠ فإن قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ ، $\frac{س}{أ} - \frac{ص}{ب} = ١$

يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) ٢ ظا$^{-١}$ $\left(\frac{ب}{أ}\right)$ (د) ظا$^{-١}$ $\left(\frac{٢ أ ب}{أ^{٢} + ب^{٢}}\right)$

(٢٤) يبين الشكل المقابل قطعة أرض مثلثة الشكل



إحداثيات رؤوسها هى : أ (٦ ، ٠) ، ب (−٦ ، ٠)

، حـ (٠ ، ٦) فإن :

أولًا : قياس الزاوية الحادة بين $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ومحور السينات

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥° (د) ١٣٥°

ثانيًا : قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

ثالثًا : المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{أ حـ}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ٠) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (٠ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (−١ ، ١) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ١)

رابعًا : المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (−١ ، ١) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (١ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (−١ ، ١) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (١ ، ٠)

خامسًا : المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة حـ ، ويوازى $\overleftrightarrow{أ ب}$ هى ....

(أ) ص = ٦ (ب) س = ٦ (جـ) س + ص = ٦ (د) س − ص = ٦

سادسًا : مساحة سطح المثلث أ ب حـ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ **أوجد قياس الزاوية الحادة بين كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية :**

(١) $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠) ، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، −٢) + ك َ (١ ، −٢)

(٢) 📖 $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ١) + ك (١ ، ١) ، $ل_٢$: ٢ س − ص − ٣ = ٠

(٣) $ل_١$: س + ٢ ص + ٥ = ٠ ، $ل_٢$: ٤ س − ص − ٣ = ٠

(٤) 📖 $ل_١$: س + ٢ ص + ٣ = ٠ ، $ل_٢$: س − ٣ ص + ١ = ٠

(٥) $ل_١$: ٣ ص + ٢ س − ٦ = ٠ ، $ل_٢$: $\frac{س}{٥}$ − ص = ٣

(٦) $ل_١$: $\frac{-س}{٣}$ − $\frac{ص}{٢}$ = ١ ، $ل_٢$: ص − ٤ س = ٢

(٧) $ل_١$: ٣ ص = ٥ ، $ل_٢$: ٢ س + ٥ ص = ١

(٨) $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (−٢ ، −٣) + ك (١ ، −٢) ، $ل_٢$: س = ٣ + ٢ ك ، ص = ٣ ك − ١

---

٢ إذا كان $ل_١$: أ س − ٣ ص + ٧ = ٠ ، $ل_٢$: ٤ س + ٦ ص − ٥ = ٠ ، $ل_٣$: $\frac{س}{٣}$ − $\frac{ص}{٢}$ = ٣

فأوجد قيمة أ التى تجعل :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٣$ هو صفر° «٢»

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ هو ٩٠° «$\frac{٩}{٢}$»

---

٣ **أوجد معادلة المستقيم :**

(١) المار بالنقطة (−١ ، ٣) ويصنع مع المستقيم : س + ٢ ص + ٦ = ٠ زاوية ظل قياسها $\frac{١}{٧}$

(٢) المار بالنقطة (٢ ، −٢) ويصنع مع المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −١) + ك (٣ ، −٤) زاوية قياسها ٤٥°

---

٤ إذا كان هـ هو قياس الزاوية بين المستقيمين : س − ص + ٦ = ٠ ، أ س − ٢ ص + ٤ = ٠ حيث جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$

فأوجد قيمة : أ «$\frac{٢}{٧}$ أ ، ١٤»

---

٥ إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : ك ص + س = ٦ ، ٢ س + ص = ٣ يساوى $\frac{٣}{٤}$

أوجد قيمة : ك «٢ أ ، $\frac{-٢}{١١}$»

---

٦ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : ٣ س − ٥ ص − ١ = ٠ ، ك س − ص = ٣ يساوى ٤٥°

فأوجد قيمة : ك «$-\frac{١}{٤}$ أ ، ٤»

٧ إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : $\overleftarrow{\text{ر}} = (\text{٠} \text{ ، } \frac{\text{٩}}{\text{٢}}) + \text{ك} (\text{٢} \text{ ، } \text{٣ أ})$

، $\overleftarrow{\text{ر}} = (\text{٤} \text{ ، } \text{١}) + \text{ك} (\text{١} \text{ ، } \text{٢})$ يساوى $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ **فأوجد قيمة : أ**

« $\frac{\text{٨}}{\text{٢١}}$ أ ، $\frac{\text{١٦-}}{\text{٣}}$ »

---

٨ مستقيمان ميلاهما م ، $\frac{\text{٣}}{\text{٨}}$م وظل قياس الزاوية بينهما = $\frac{\text{٥}}{\text{١١}}$ ويمران بالنقطة (٣ ، −١)

أوجد معادلتيهما علمًا بأن م > ٠

---

٩ أ ب ح مثلث فيه : أ = (٠ ، ٢) ، ب = (٣ ، ١) ، ح = (−٢ ، −١)

أوجد قياس زاوية : أ

«١٠٥° ١٥َ ١٨ً»

---

١٠ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ح الذى رءوسه أ = (٤ ، ٧) ، ب = (−٢ ، −١)

، ح = (٢ ، −٤)

«٣٤َ ٢٦° ، ٩٠° ، ٢٦َ ٦٣°»

---

١١ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ح حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (٥ ، ١) ، ح = (−٢ ، ١)

ثم أوجد : مساحة المثلث لأقرب وحدة.

«٧ وحدات مربعة»

---

١٢ أ ب ح مثلث فيه : أ = (٠ ، ٥) ، ب = (٢ ، −١) ، ح = (٦ ، ٣)

أثبت أن : المثلث متساوى الساقين ثم أوجد قياس زاوية أ

ثم أوجد : مساحته لأقرب رقمين عشريين.

«٨َ ٥٣° ، ١٦ وحدة مربعة»

---

١٣ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى أ ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ هى $\overleftarrow{\text{ر}} = (\text{١} \text{ ، } \text{١}) + \text{ك} (\text{١-} \text{ ، } \text{٣})$

ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى $\overleftarrow{\text{ر}} = (\text{١-} \text{ ، } \text{٥}) + \text{ك} (\text{١} \text{ ، } \text{٢})$ **أوجد :** ق (∠ أ ح ب)

«٤٥°»

---

١٤ إذا كان المثلث أ ب ح قائم الزاوية فى ب حيث : أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٧) ، ح (١ ، ص)

فأوجد قيمة : ص ، ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الأخريين.

«١٠ ، ٤٥° ، ٤٥°»

---

١٥ أ ب ح مثلث رءوسه أ = (−٣ ، ٢) ، ب = (−٣ ، −١٣) ، ح = (٥ ، ٣) ، نصفت $\overline{\text{ب ح}}$ فى ء

أوجد : قياس الزاوية الحادة بين $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

«١٩َ ٥٦°»

---

١٦ Δ أ ب ح فيه : أ = (٥ ، ٧) ، ب = (١ ، ٥) ، ح = (٤ ، ٢)

(١) **أوجد :** إحداثيى نقطة ء التى تقسم $\overline{\text{ب ح}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

(٢) **أثبت أن :** $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب ح}}$

(٣) **أثبت أن :** أ ء = ب ح

(٤) **أوجد :** ق (∠ ب)

(٥) **أوجد مساحة سطح المثلث : أ ب ح**

١٧ إذا كانت : أ = (٥ ، ٧) ، ب = (٦ ، -١) ، حـ = ($\frac{٣}{٢}$ ، ٥)

فأثبت أن : المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (-٢ ، ١) يصنع مع المستقيمين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مثلثًا متساوى الساقين رأسه أ

---

١٨ أثبت أن المثلث الذى معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه هى :

٣ س + ٤ ص = ٣٦ ، س - ٧ ص + ١٣ = ٠ ، ٧ س + ص = ٩

هو مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيمين : ص = (٢ - $\sqrt{٣}$) (س + ٥) ، ص = (٢ + $\sqrt{٣}$) (س - ٧)

هو ....

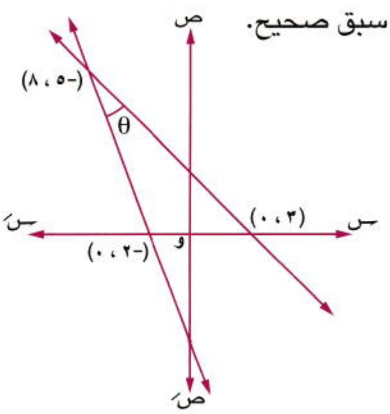
(أ) ١٥٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٢٠°

(٢) ل$_١$ ، ل$_٢$ مستقيمان ظل الزاوية بينهما يساوى $\frac{١}{٣}$ ، ميل ل$_١$ يساوى ضعف ميل ل$_٢$

فإن ميل المستقيم ل$_٢$ = ...

(أ) ± $\frac{١}{٢}$ (ب) ± ١

(جـ) ١ ، $\frac{١}{٢}$ (د) جميع ما سبق صحيح.



(٣) فى الشكل المقابل :

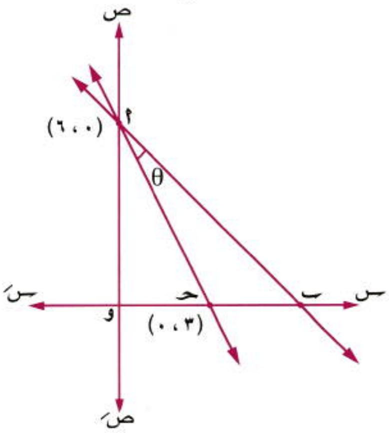
ظا θ = ...

(أ) $\frac{٨}{٣}$

(ب) $\frac{٣}{١١}$

(جـ) $\frac{٥}{١١}$

(د) $\frac{٧}{١١}$



(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : جتا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

فإن النقطة ب = ...

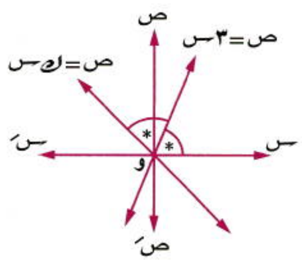
(أ) (٨ ، ٠)

(ب) (٧ ، ٠)

(جـ) (٦ ، ٠)

(د) (٤ ، ٠)

(٥) في الشكل المقابل :

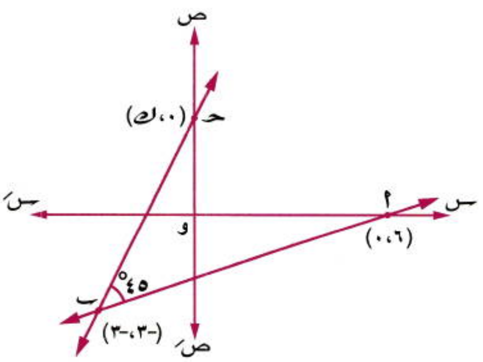


ك = ...

(أ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٦) في الشكل المقابل :



ك = ...

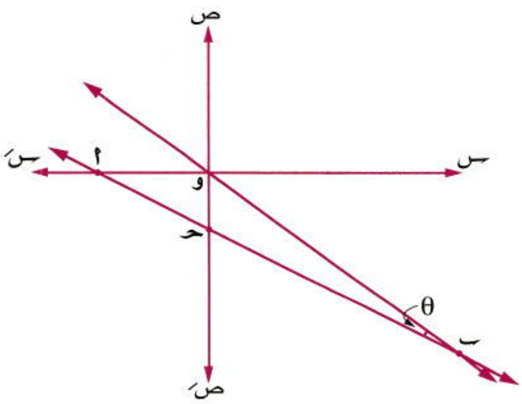
(أ) ٣

(ب) -٣

(جـ) $\frac{٩}{٢}$

(د) $\frac{-٩}{٢}$

(٧) في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى س + ٢ ص + ٦ = ٠

وكان ب حـ = ٢ أ حـ

فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{١١}{١٠}$

(ب) $\frac{٢}{١١}$

(جـ) $\frac{١٠}{١١}$

(د) $\frac{١١}{٢}$

(٨) إذا دار المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ٠) ، ب (٣ ، ٢) حول نقطة أ بزاوية قياسها ٤٥° في اتجاه ضد عقارب الساعة فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ في وضعه الجديد هى ....

(أ) ٣ س + ص = ٦ (ب) س − ٣ ص = ٢

(جـ) س + ٣ ص = ٦ (د) س + ٣ ص = −٢

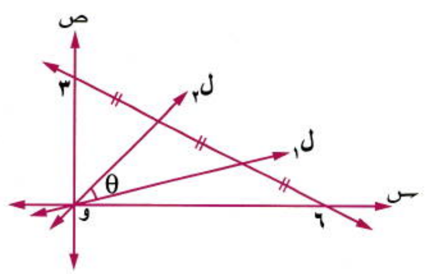
(٩) مثلث متساوى الساقين معادلتا المستقيمان الحاملين لساقيه هما ص = ٥ ، ٤ س − ٣ ص + ٧ = ٠

إذا كان م هو ميل الضلع الثالث للمثلث فإن م = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ أ، −٢ (ب) $\frac{-١}{٢}$ أ، ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ أ، ٢ (د) − $\frac{١}{٢}$ أ، −٢

(١٠) فى الشكل المقابل :

طا θ = ...



(أ) $\frac{٣}{٤}$

(ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{١}{٣}$

(د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

---

٢ أوجد معادلة أحد الضلعين المتساويين فى المثلث القائم الزاوية إذا كانت معادلة الوتر هى ٣ س + ٤ ص + ٤ = ٠

ونقطة رأس الزاوية القائمة هى (٢ ، ٢) «س − ٧ ص + ١٢ = ٠ أ، ٧ س + ص − ١٦ = ٠»

---

٣ إذا كان الخط المستقيم ل يصنع زاوية جيب تمامها يساوى $\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$ مع الخط المستقيم

لَ : ٣ س − ص + ٥ = ٠ . **فما هو ميل الخط المستقيم ل ؟**

أوجد : معادلة الخط المستقيم ل إذا كان يمر بالنقطة (١ ، −٢) «غير معرف أ، $\frac{٤}{٣}$»

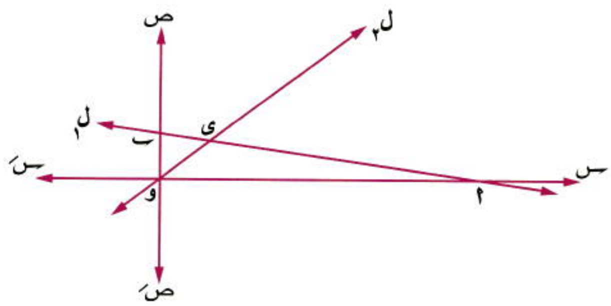
---

٤ **أثبت أن الزاوية بين المستقيمين :** ص = $\frac{١ + ب}{١ − ب}$ س + ٦ ، ص − ب س + ١ = ٠

قياسها ثابت لجميع قيم ب ≠ ١ وأوجد قياس هذه الزاوية. «٤٥°»

---

٥ **فى الشكل المقابل :**



معادلة ل١ هى : س + ٧ ص = ٧

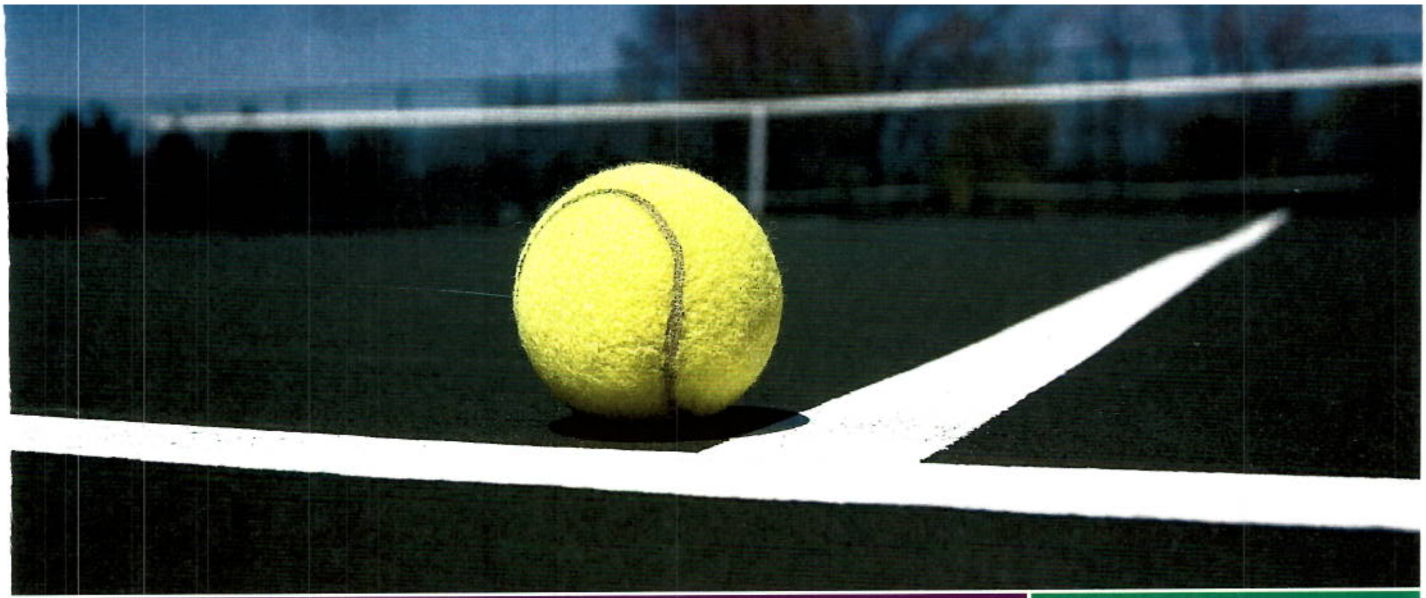
، معادلة ل٢ هى : ٣ س − ٤ ص = ٠

أوجد بالدرجات قياس

الزاوية المنفرجة ى

ثم أوجد إحداثيات النقطتين أ ، ب

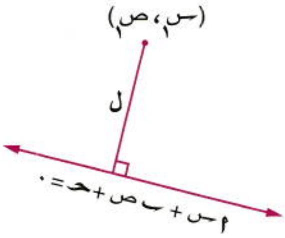
«١٣٥°، أ(٧ ، ٠) ، ب(٠ ، ١)»



الدرس 4 طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

* طول العمود (ل) المرسوم من النقطة (س_1 ، ص_1)

إلى الخط المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + جـ = ٠



يتحدد من العلاقة : $\boxed{\text{طول العمود (ل)} = \dfrac{|\text{أ}\,\text{س}_1 + \text{ب}\,\text{ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}}$

ملاحظات هامة

١ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (س_1 ، ص_1) على المستقيم :

أ س + ب ص + جـ = ٠ يساوى الصفر فإن النقطة تكون واقعة على المستقيم.

٢ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل (٠ ، ٠) على المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠ يساوى $\dfrac{|\text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

٣ طول العمود المرسوم من النقطة (س_1 ، ص_1) على محور السينات = $|\text{ص}_1|$

٤ طول العمود المرسوم من النقطة (س_1 ، ص_1) على محور الصادات = $|\text{س}_1|$

٥ إذا كانت (س_1 ، ص_1) ، (س_2 ، ص_2) نقطتين فى المستوى الذى يحوى الخط المستقيم

أ س + ب ص + جـ = ٠ وكان المقداران أ س_1 + ب ص_1 + جـ

، أ س_2 + ب ص_2 + جـ لهما نفس الإشارة كانت النقطتان على جانب واحد من الخط المستقيم وإن اختلفا فى الإشارة كانت النقطتان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم.

مثال ١

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) إلى الخط المستقيم :

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (-١ ، ٢) + ك (٤ ، -٣)

الحل

∵ المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ٢) + ك (٤ ، −٣) يمر بالنقطة (−١ ، ٢) وميله = $\frac{-٣}{٤}$

∴ الصورة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{-٣}{٤}$ ∴ ٤ ص − ٨ = −٣ س − ٣

∴ الصورة العامة هى : ٣ س + ٤ ص − ٥ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٣(٣) + ٤(٥) - ٥|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ = ٤,٨ وحدة طول.

حاول بنفسك

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، ٣) إلى الخط المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٣) + ك (٤ ، ٣)

مثال ٢

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ = (٢ ، ٤) إلى المستقيم المار بالنقطة ب = (−٢ ، ٠) وميله = $\frac{٥}{٦}$

الحل

∵ معادلة المستقيم المار بالنقطة ب = (−٢ ، ٠) وميله = $\frac{٥}{٦}$ هى :

$\frac{ص - ٠}{س + ٢} = \frac{٥}{٦}$ أى ٥ س − ٦ ص + ١٠ = ٠

∴ طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستقيم = $\frac{|٥ \times ٢ - ٦ \times ٤ + ١٠|}{\sqrt{٢٥ + ٣٦}} = \frac{٤}{\sqrt{٦١}}$ وحدة طول.

مثال ٣

إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٧ ، حـ) إلى المستقيم : ٦ س − ٨ ص + ١٧ = ٠

يساوى ٣,٥ وحدة طول فأوجد قيمة : حـ

الحل

∵ $\frac{٧}{٢} = \frac{|٦ \times ٧ - ٨ \times حـ + ١٧|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}$ ∴ $\frac{٧}{٢} = \frac{|٥٩ - ٨ حـ|}{١٠}$

∴ ٣٥ = |٥٩ − ٨ حـ| ∴ ٥٩ − ٨ حـ = ٣٥ ، أ ٥٩ − ٨ حـ = −٣٥

∴ −٨ حـ = −٢٤ ، أ −٨ حـ = −٩٤ ∴ حـ = ٣ ، أ حـ = $\frac{٤٧}{٤}$

مثال ٤

مستقيم طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ٥) عليه يساوى ٣ وحدات والمتجه (٣ ، ٤) متجه اتجاه له

أوجد معادلة هذا المستقيم.

الحـــل

∵ المتجه (٣ ، ٤) متجه اتجاه للمستقيم. ∴ المتجه (٤ ، −٣) متجه عمودى على المستقيم.

∴ معادلة المستقيم هى : ٤ س − ٣ ص + حـ = ٠

، ∵ طول العمود عليه من النقطة (٢ ، ٥) = ٣ وحدة طول.

∴ $\frac{|\text{٤} \times \text{٢} - \text{٣} \times \text{٥} + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{٩} + \text{١٦}}} = \text{٣}$ ∴ |٨ − ١٥ + حـ| = ٣ × ٥ ∴ |حـ − ٧| = ١٥

∴ حـ − ٧ = ± ١٥ ∴ حـ = ٧ + ١٥ = ٢٢

أ، حـ = ٧ − ١٥ = −٨ ∴ معادلة المستقيم هى : ٤ س − ٣ ص + ٢٢ = ٠

أ، ٤ س − ٣ ص − ٨ = ٠

مثال ٥

أ ب حـ مثلث رءوسه أ = (١ ، ٥) ، ب = (٥ ، −٣) ، حـ = (١ ، ٠) أوجد مساحته.

الحـــل

نعتبر أحد الأضلاع وليكن $\overline{\text{ب حـ}}$ هو قاعدة المثلث ونوجد الارتفاع وهو طول العمود من أ إلى الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ونوجد كذلك طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ثم نحسب مساحة المثلث كما يلى :

∵ ب حـ = $\sqrt{(\text{١} - \text{٥})^2 + (\text{٠} + \text{٣})^2} = \sqrt{\text{١٦} + \text{٩}}$ = ٥ وحدات طولية.

، معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هى : $\frac{\text{ص} + \text{٣}}{\text{س} - \text{٥}} = \frac{\text{٠} + \text{٣}}{\text{١} - \text{٥}} = \frac{\text{٣}}{-\text{٤}}$ **أى** ٣ س + ٤ ص − ٣ = ٠

∴ طول العمود من أ إلى $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{|\text{٣} \times \text{١} + \text{٤} \times \text{٥} - \text{٣}|}{\sqrt{\text{٩} + \text{١٦}}} = \frac{|\text{٣} + \text{٢٠} - \text{٣}|}{\text{٥}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{٥}}$ = ٤ وحدات طولية.

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٥ × ٤ = ١٠ وحدات مربعة.

حاول بنفسك

إذا كانت النقط : أ = (−٣ ، ٠) ، ب = (٣ ، ٢) ، حـ = (−١ ، ٥) تمثل رؤوس مثلث **أوجد :**

١ طول $\overline{\text{ب حـ}}$

٢ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

٣ طول العمود الساقط من أ على $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

٤ مساحة Δ أ ب حـ

مثال ٦

أوجد مساحة الدائرة التى مركزها النقطة م (١ ، ٢) ويمسها المستقيم الذى معادلته :

ل : ٦ س + ٨ ص − ٢ = ٠ (حيث π = ٣,١٤)

الحـــل

$\because$ طول العمود المرسوم من المركز م (١ ، ٢) على المماس ل = $\frac{|٦ \times ١ + ٨ \times ٢ - ٢|}{\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}}$ = $\frac{٢٠}{١٠}$ = ٢ وحدة طول.

، $\because$ طول نصف قطر الدائرة = طول العمود المرسوم من المركز على المماس ل

$\therefore$ نق = ٢ وحدة طول. $\therefore$ المساحة = π نق^٢ = ٣,١٤ × ٤ = ١٢,٥٦ وحدة مربعة.

مثال ٧

أثبت أن النقطتين : ؋ = (٣ ، ١) ، ب = (-٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم ل : ٣ س - ٤ ص + ٦ = ٠ وعلى بُعدين متساويين منه.

الحـــل

$\because$ طول العمود من ؋ على الخط المستقيم ل = $\frac{|٣ \times ٣ - ٤ \times ١ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = $\frac{|١١|}{٥}$ = $\frac{١١}{٥}$ = ٢,٢ وحدة طول.

، طول العمود من ب على الخط المستقيم ل = $\frac{|٣ (-٣) - ٤ (٢) + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = $\frac{|-١١|}{٥}$ = $\frac{١١}{٥}$ = ٢,٢ وحدة طول.

$\therefore$ ؋ ، ب على بُعدين متساويين من الخط المستقيم ل

، $\because$ المقدار : ٣ س - ٤ ص + ٦ له إشارتان مختلفتان ١١ ، -١١

عند التعويض بإحداثيي كل من النقطتين ؋ ، ب

$\therefore$ النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم ل

مثال ٨

أثبت أن المستقيمين ل$_١$ ، ل$_٢$ متوازيان وأوجد البُعد بينهما فى كل مما يأتى :

١ ل$_١$: س - ٢ ص + ١١ = ٠ ، ل$_٢$: ٢ س - ٤ ص + ٧ = ٠

٢ ل$_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -٥) + ك (٣ ، -٤) ، ل$_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك$'$ (-٦ ، ٨)

الحـــل

١ $\because$ ميل المستقيم ل$_١$ = $\frac{-١}{-٢}$ = $\frac{١}{٢}$

، ميل المستقيم ل$_٢$ = $\frac{-٢}{-٤}$ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ الميلان متساويان.

$\therefore$ المستقيمان متوازيان.

ملاحظة

لإيجاد البُعد بين ل$_١$ ، ل$_٢$ نعين نقطة على أحد المستقيمين ونوجد طول العمود الساقط منها على المستقيم الآخر.

* فبوضع $س = ١$ مثلاً فى معادلة المستقيم $ل_١$

∴ $ص = ٦$

∴ $(١ ، ٦) \in ل_١$

∴ البُعد بين المستقيمين = طول العمود المرسوم

من النقطة $(١ ، ٦)$ على المستقيم $ل_٢$

$$= \frac{|٢ \times ١ - ٤ \times ٦ + ٧|}{\sqrt{٤ + ١٦}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢} \text{ وحدة طول.}$$

ملاحظة

البعد بين المستقيمين المتوازيين

$أ س + ب ص + جـ = ٠$ ، $أ س + ب ص + ء = ٠$

يساوى $\frac{|جـ - ء|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

٢ المتجه $ى = (٣ ، -٤)$ متجه اتجاه للمستقيم $ل_١$

، المتجه $ى' = (-٦ ، ٨)$ متجه اتجاه للمستقيم $ل_٢$

، ∵ $ى' = (-٦ ، ٨) = -٢ (٣ ، -٤) = -٢ ى$ ∴ $ل_١ // ل_٢$

، ∵ النقطة $ن = (٢ ، -٥) \in ل_١$

، ∵ $ل_٢ : س = ١ - ٦ ك'$ ، $ص = ٤ + ٨ ك'$ ∴ $ل_٢ : \frac{س - ١}{-٦} = \frac{ص - ٤}{٨}$

∴ $ل_٢ : ٤ س + ٣ ص - ١٦ = ٠$

∴ البعد بين المستقيمين = طول العمود المرسوم من النقطة $(٢ ، -٥)$ على المستقيم $ل_٢$

$$= \frac{|٤ \times ٢ + ٣ (-٥) - ١٦|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = ٤,٦ \text{ وحدة طول.}$$

مثال ٩

أثبت أن النقطة : $(٤ ، ٦)$ تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين :

$ل : ٩ س - ١٣ ص - ٨ = ٠$ ، $ل' : س = ٥ + ٣ ك$ ، $ص = ك + ٣$

الحل

النقطة تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين ل ، لَ إذا كانت على بُعدين متساويين من المستقيمين.

بُعد النقطة $(٤ ، ٦)$ عن المستقيم ل $= \frac{|٩ \times ٤ - ١٣ \times ٦ - ٨|}{\sqrt{٨١ + ١٦٩}} = \frac{|٣٦ - ٧٨ - ٨|}{\sqrt{٢٥٠}}$

$= \frac{|-٥٠|}{٥\sqrt{١٠}} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول (١)

، معادلة لَ هى : $\frac{س - ٥}{٣} = \frac{ص - ٣}{١}$ أى : $س - ٣ ص + ٤ = ٠$

∴ بُعد النقطة $(٤ ، ٦)$ عن المستقيم لَ $= \frac{|٤ - ٣ \times ٦ + ٤|}{\sqrt{١ + ٩}} = \frac{|-١٠|}{\sqrt{١٠}}$

$= \sqrt{١٠}$ وحدة طول (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ النقطة $(٤ ، ٦)$ تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين ل ، لَ

تمارين 8

على طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) طول العمود المرسوم من النقطة (–٣ ، ٥) إلى محور الصادات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) –٣

(٢) طول العمود المرسوم من النقطة (–٣ ، ٥) إلى محور السينات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) –٣

(٣) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم ٣ س – ٤ ص – ١٥ = ٠
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى الخط المستقيم : ٤ س + ٣ ص – ٥ = ٠
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، –٤) إلى الخط المستقيم س + ٥ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٠ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) –٥

(٦) 📖 طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ١ (د) ٠

(٧) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٤ ، ٣)
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

(٨) طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، ٢) على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ١) + ك (٣ ، –٤)
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) طول العمود المرسوم من النقطة (–٢ ، –٤) على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٦ ، ٨)
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١,٦ (ب) ٢,٦ (جـ) ٠,٦ (د) ٣,٦

(١٠) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، −٥) على المستقيم ل : س = −٢ + ٤ ك ، ص = −٣ ك
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١١) بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، −٣) ، (١ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

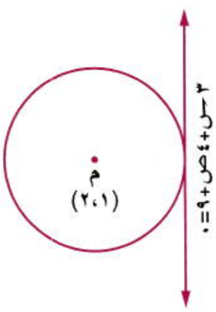
(١٢) بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) والمتجه (٢ ، −١) متجه اتجاه له
يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) ٢ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٣ $\sqrt{٥}$ (د) ٤ $\sqrt{٥}$

(١٣) أ ب حـ مثلث فيه : أ (٣ ، ٧) ، ب (٧ ، −١) ، حـ (٣ ، ٢) فإن طول العمود النازل من أ إلى
$\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

(١٤) فى الشكل المقابل :



المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ مماس للدائرة م
حيث م (١ ، ٢) فإن طول نصف قطر الدائرة
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٥}$
(جـ) ٤ (د) ٣

(١٥) مساحة الدائرة التى مركزها النقطة (٤ ، −١) ويمسها المستقيم ل : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (١٢ ، ٥)
تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٨ π (ب) ٩ π (جـ) ٦ π (د) ٣ π

(١٦) البعد بين المستقيمين : ص − ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٥

(١٧) البعد بين المستقيمين : $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ٠) + ك (٤ ، −٣) ، ٦ س + ٨ ص − ٩ = ٠
يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(١٨) البعد بين المستقيمين : ٣ س − ٤ ص + ٢٠ = ٠ ، ٣ س − ٤ ص + ١٠ = ٠
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٩) البعد بين المستقيمين : ر = (٢ ، ٠) + ك (١٢ ، −٥) ، ر = (٤,٦ ، ٠) + ك (١٢ ، −٥)
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

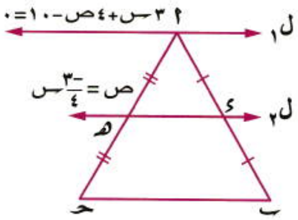
(٢٠) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ك) على المستقيم ٢ س + ص + ١ = ٠
يساوى $\sqrt{٥}$ وحدة طول فإن إحدى قيم ك = ...

(أ) −٤ (ب) −٥ (جـ) −٨ (د) −١٠

(٢١) إذا كان البعد بين المستقيمين ل١ : ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ ، ل٢ : ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠
يساوى ٣ وحدات طول ، حـ > ٠ فإن : حـ = ...

(أ) ٥٤ (ب) ٦ (جـ) ٣٠ (د) ٣

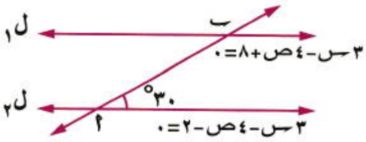
(٢٢) في الشكل المقابل :



طول العمود المرسوم من نقطة أ على المستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$
يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣
(جـ) ٤ (د) ٥

(٢٣) في الشكل المقابل :



طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢
(جـ) ٣ (د) ٤

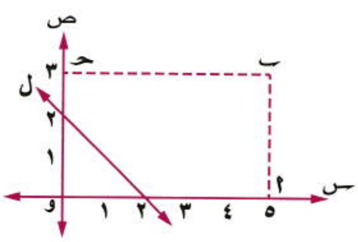
(٢٤) معادلة أحد المستقيمين الذى ميله = $-\frac{٥}{١٢}$ وطول العمود الساقط عليه من النقطة (٢ ، −١) يساوى ٢ وحدة طول هى ....

(أ) ٥ س + ١٢ ص − ٢٨ = ٠ (ب) ٥ س + ١٢ ص − ٢٤ = ٠
(جـ) ٥ س + ١٢ ص + ٢٤ = ٠ (د) ٥ س − ١٢ ص + ٢٨ = ٠

(٢٥) رتب المستقيمات الآتية تصاعديًا من حيث بعدها عن نقطة الأصل ل١ : س + ٢ ص + ٣ = ٠
، ل٢ : س + ٢ ص − ١ = ٠ ، ل٣ : س + ٢ ص − ٤ = ٠

(أ) ل١ ، ل٢ ، ل٣ (ب) ل٢ ، ل٣ ، ل١ (جـ) ل٢ ، ل١ ، ل٣ (د) ل٣ ، ل١ ، ل٢

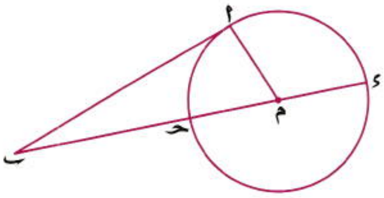
(٢٦) في الشكل المقابل :



طول العمود المرسوم من النقطة ب على المستقيم ل
يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٣ $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٦}$
(جـ) ٣ (د) ٤

(٢٧) في الشكل المقابل :



إذا كانت م دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسًا لها وكانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أم}}$

هي س − ٣ ص + ٤ = ٠ ، كانت النقطة ب (٤ ، −٤)

فإن : ب حـ × ب ء = ... وحدة مربعة.

(أ) −٢ (ب) ٢ $\sqrt{١٠}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٥}$ (د) ٤٠

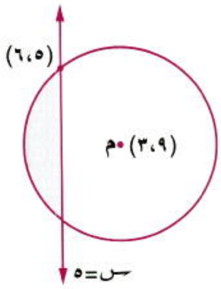
(٢٨) مربع فيه معادلتي المستقيمين الحاملين لضلعين متقابلين فيه هما ص = ٣ ، ص = −٢

فإن معادلتي المستقيمين الحاملين للضلعين الآخرين يمكن أن يكونا ....

(أ) ص = ٣ ، ص = −٢ (ب) س = ٣ ، س = ٢

(جـ) س = ٧ ، س = ٢ (د) ص = ٤ ، ص = −١

(٢٩) في الشكل المقابل :



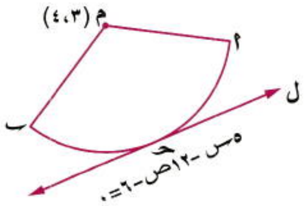
ارتفاع القطعة الدائرية

الصغرى المظللة = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٢ (د) ١

(٣٠) في الشكل المقابل :



قطاع دائرى ، المستقيم ل مماسًا لدائرته

فإن : أ م = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) $\sqrt{٣}$

(جـ) $\frac{٧}{١٣}$ (د) ٣

(٣١) إذا كان المستقيم ل يمر بنقطة الأصل وكانت النقطتان (١ ، −٢) ، (٣ ، ٤) على أبعاد متساوية من المستقيم ل فإن ميل المستقيم ل يساوى ....

(أ) ٣ أ، $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ أ، $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ أ، ٣ (د) $\frac{١}{٣}$ أ، ٢

(٣٢) لجميع قيم θ فإن طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم : س جتا θ + ص جا θ = ل

يساوى ....

(أ) | ل | (ب) | ل جتا θ | (جـ) | ل جا θ | (د) $\left| \frac{\text{ل}}{\sqrt{١ + \text{ل}^٢}} \right|$

(٣٣) إذا كان أ تنتمى للمستقيم : ٣ س − ٤ ص + ٤ = ٠ ، ب تنتمى للمستقيم ٣ س − ٤ ص − ١ = ٠

فإن أقل قيمة لطول $\overline{\text{أب}}$ تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(٣٤) إذا كانت أ ، ب نقطتان على المستقيم س − ٢ ص + ٥ = ٠ حيث طول $\overline{\text{أب}}$ يساوى ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طولية ، حـ نقطة على المستقيم س − ٢ ص − ١ = ٠ فإن مساحة المثلث أ ب حـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٢ $\sqrt{٥}$ (ب) ١٢ (جـ) ٦ $\sqrt{٥}$ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ى إلى المستقيم ل إذا كانت :

(١) ى = (٢ ، ١) ، ل : ٣ س + ٤ ص − ٣٠ = ٠

(٢) ى = (٤ ، ٥) ، ل : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢) + ك (٣ ، −٤)

(٣) ى = (٠ ، ٠) ، ل : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ٥) + ك (٣ ، ٤)

(٤) ى = (٢ ، −٤) ، ل : ١٢ س + ٥ ص − ٤٣ = ٠

(٥) ى = (٥ ، ٢) ، ل : ٨ س + ١٥ ص − ١٩ = ٠

(٦) ى = (−٢ ، −٧) ، ل : س + ص + ٩ = ٠

(٧) ى = (٢ ، −٦) ، ل : $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٢} = ٢$

(٨) ى = $\left(٢\sqrt{\text{ب}} ، -\sqrt{\text{أ}}\right)$ ، ل : (أ − ب) س + ٢ $\sqrt{\text{أ ب}}$ ص − ٢ أ $\sqrt{\text{ب}}$ = ٠

---

٢ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : أ = (٣ ، ٥) ، ب = (−١ ، ٢) ، حـ = (٧ ، −٤)

أوجد طول العمود الساقط من أ إلى $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ «٤٫٨ وحدة طول»

---

٣ احسب طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة م = (٣ ، −١) ويمسها المستقيم الذى معادلته

ل : ٤ س + ٣ ص + ٦ = ٠ . «٣ وحدة طول»

---

٤ أوجد بعد النقطة (١ ، −٢) عن الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) والذى يصنع زوايا متساوية القياس مع كل من الاتجاهين الموجب لمحور السينات والسالب لمحور الصادات. «$\sqrt{٢}$ وحدة طول»

---

٥ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، حـ) على الخط المستقيم :

٢ س + ٣ ص + ٥ = ٠ يساوى $\sqrt{١٣}$ وحدة طول **فأوجد قيمة** : حـ «٢ أ ، $-\frac{٢٠}{٣}$»

---

٦ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) على المستقيم :

٣ س − ٤ ص + حـ = ٠ يساوى ٢ وحدة طول **فأوجد قيمة** : حـ «٥ أ ، −١٥»

٧ إذا كان طول العمود الساقط من النقطة (٧ ، −١) على المستقيم :

أ س + ص = ٠ يساوى $٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول **فأوجد قيم** : أ الممكنة. «٣ أ ، $\frac{-١٣}{٩}$»

---

٨ **أثبت أن المستقيمين** : $ل_١$: ٢ س + ص − ٣ = ٠ ، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، ٨) + ك (−١ ، ٢) متوازيان

ثم أوجد البعد بينهما. «$٣\sqrt{٥}$ وحدة طول»

---

٩ **أثبت أن المستقيمين** : $ل_١$: ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠ ، $ل_٢$: ٦ س − ٨ ص + ٢١ = ٠ متوازيان

ثم أوجد البعد بينهما. «٤,٥ وحدة طول»

---

١٠ **أثبت أن المستقيمين** : $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٥ ، ٢) ، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −٣) + ك (١٠ ، ٤) متوازيان

ثم أوجد البعد بينهما. «$\sqrt{٢٩}$ وحدة طول»

---

١١ **طرق** : طريقان متجاوران مسار الطريق الأول تمثله المعادلة : ٣ س − ٤ ص − ٧ = ٠ .

ومسار الطريق الثانى تمثله المعادلة : ٣ س − ٤ ص + ١١ = ٠ .

أثبت أن : الطريقين متوازيان ثم أوجد أقصر بعد بينهما. «٣,٦ وحدة طول»

---

١٢ إذا قطع المستقيم : ٤ س − ٣ ص = ١٢ محورى الإحداثيات فى النقطتين أ ، ب **فأوجد** :

(١) مساحة سطح المثلث و أ ب حيث و نقطة الأصل.

(٢) أقصر مسافة من نقطة الأصل إلى الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ «٦ وحدة مربعة ، ٢,٤ وحدة طول»

---

١٣ إذا كانت النقط أ = (−٤ ، ١) ، ب = (٢ ، ٣) ، حـ = (−٢ ، ٦) هى رءوس مثلث **فأوجد** :

(١) طول $\overline{ب حـ}$

(٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٣) طول العمود الساقط من أ إلى $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٤) مساحة Δ أ ب حـ

«٥ وحدات طول ، ٣ س + ٤ ص − ١٨ = ٠ ، ٥,٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة مربعة»

---

١٤ أوجد مساحة المثلث الذى رءوسه النقط أ = (٣ ، ٢) ، ب = (−٢ ، ٥) ، حـ = (١ ، −٣) «١٠,٥ وحدة مربعة»

---

١٥ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (−١ ، ٤) ، ب = (٣ ، −٢) ، حـ = (−١ ، −٥) **أوجد** :

(١) إحداثيى النقطة ء

(٢) طول $\overline{ب حـ}$

(٣) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٤) طول العمود الساقط من أ إلى $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٥) مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

«(−٥ ، ١) ، ٥ وحدات طول ، ٣ س − ٤ ص − ١٧ = ٠ ، ٧,٢ وحدة طول ، ٣٦ وحدة مربعة»

١٦ أثبت أن النقط : أ = (٣ ، −١) ، ب = (−٥ ، ٢) ، حـ = (−٢ ، ٤) ، ء = (٦ ، ١)

هـي رءوس متوازي أضلاع وأوجد مساحته. «٢٥ وحدة مربعة»

---

١٧ أثبت أن النقط : أ = (٢ ، ٣) ، ب = (٦ ، ٢) ، حـ = (−٢ ، −٢) ، ء = (−٢ ، ١)

هي رءوس شبه منحرف وأوجد مساحته. «١٨ وحدة مربعة»

---

١٨ الربط بالهندسة : أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، فإذا كانت :

أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٣) ، حـ (٦ ، ١) ، ء (٤ ، ص)

أوجد قيمة ص ، ثم أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء «−٣ ، ١٢ وحدة مربعة»

---

١٩ أوجد معادلة المستقيم الذي المتجه (−١ ، ٧) متجه اتجاه له وطول العمود النازل عليه من النقطة (٣ ، ١)

يساوي ٣ $\sqrt{٢}$ وحدة طول. «٧ س + ص + ٨ = ٠ أ، ٧ س + ص − ٥٢ = ٠»

---

٢٠ أثبت أن النقطتين : (١ ، ١) ، (−٢ ، ٣) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم

٢ س − ص + ٣ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه.

---

٢١ **هل النقطتان (١ ، ٤) ، (−٢ ، ٣) تقعان على نفس الجانب من الخط المستقيم :**

٢ س − ص + ٣ = ٠ أم على جانبين مختلفين ؟

---

٢٢ أثبت أن المستقيم : ٣ س − ٤ ص + ٣ = ٠ يمس كلًا من الدائرتين اللتين مركزاهما النقطتان

م = (٥ ، ٢) ، مَ = (−٢ ، ٣) واللتان طولا نصفي قطريهما ٢ ، ٣ وحدة طول على الترتيب ، وبين

هل الدائرتان تقعان في جانب واحد أم في جانبي هذا المستقيم ؟

---

٢٣ الربط بالهندسة : دائرة مركزها نقطة الأصل فيها وتران معادلتيهما :

٤ س − ٣ ص + ١٠ = ٠ ، ٥ س − ١٢ ص + ٢٦ = ٠ أثبت أن الوترين متساويان في الطول.

---

٢٤ أثبت أن : النقطة (١١ ، ٨) هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث الذي معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه

هي : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−٣ ، ٢٠) + ك (١ ، ٠) ، ٣ س + ٤ ص = ٥ ، ٥ س + ١٢ ص + ٥ = ٠

---

٢٥ أثبت أن : أ (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفي الزاوية بين المستقيمين :

٩ س − ١٣ ص − ٨ = ٠ ، س − ٣ ص + ٤ = ٠

---

٢٦ **أوجد مساحة الشكل الرباعي أ ب حـ ء الذي رءوسه النقط :**

أ = (٢ ، ٠) ، ب = (٤ ، ١) ، حـ = (٣ ، ٥) ، ء = (−٤ ، ٨) «٢٣٫٥ وحدة مربعة»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أ ب جـ ء مربع حيث أ (٢ ، −٣) ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ هى ٤ س + ٣ ص − ٩ = ٠ .

فإن مساحة المربع = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع فيه : أ (٢ ، −١) ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ هى س + ص = ٢

فإن طول ضلع المثلث أ ب جـ = ... وحدة طولية.

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\sqrt{٢}$

(٣) معادلة الخط المستقيم الذى طول العمود المرسوم من (٠ ، ٠) عموديًا عليه يساوى ٤ وحدات وهذا الخط يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هى ....

(أ) س + $\sqrt{٣}$ ص ± ٨ = ٠ . (ب) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٤ = ٠ .

(جـ) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٢ = ٠ . (د) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٨ = ٠ .

(٤) نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث الذى أضلاعه تنطبق على المستقيمات :

س = ٠ ، ص = ٠ ، س + ص = ١ هى ....

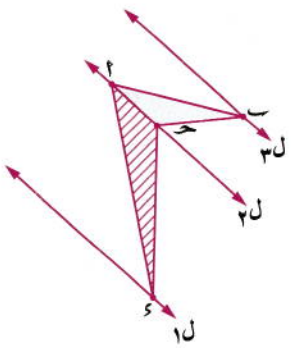
(أ) (١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (١ ، ٠) (د) $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$

(٥) إذا كان : جـ هو طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم :

س + ب ص = ٢ جـ فإن : ب يمكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{١}{\text{جـ}}$ (د) جـ

(٦) **فى الشكل المقابل :**



إذا كانت معادلة $ل_١$ هى ٢ س + ٣ ص + ك = ٠ .

، معادلة $ل_٢$ هى ٢ س + ٣ ص − ١ = ٠ .

، معادلة $ل_٣$ هى ٢ س + ٣ ص − ٤ = ٠ .

وكانت $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ب جـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ء جـ})} = \frac{١}{٢}$

فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) −٣

(٧) النسبة التي يقسم بها المستقيم س − ص − ٢ = ٠ القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٣ ، −١)

، ب (٨ ، ٩) هي ....

(أ) ١ : ٢ من الداخل (ب) ٢ : ١ من الخارج

(جـ) ٢ : ٣ من الداخل (د) ٣ : ٢ من الخارج

---

٢ أوجد نقطة على المستقيم س + ص + ٩ = ٠ وتبعد عن المستقيم س + ٢ ص + ٢ = ٠

بمقدار $\sqrt{5}$ وحدة طولية. «(−١١ ، ٢) ، (−٢١ ، ١٢)»

---

٣ إذا كانت : أ = (٣ ، ٤) ، ب (٤ ، ٦) ، حـ = (−١ ، ٢) ، ء = (٢ ، ٠)

فأوجد طول : $\overline{حـَ ءَ}$ حيث حـَ ، ءَ نقطتا تقاطع العمودين المرسومين من حـ ، ء على الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

« $\frac{1}{\sqrt{5}}$ وحدة طول»

---

٤ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٤) وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوى ٢

وحدة طول وبين أن هناك مستقيمين يحققان هذه الشروط. «س − ٢ = ٠ ، ٣ س + ٤ ص + ١٠ = ٠»

---

٥ إذا كانت : أ = (٣ ، ٥) ، ب = (١١ ، ١١) نقطتين ثابتتين فأوجد النقطة (أو النقط) حـ التى تنتمى لمحور

السينات بحيث تكون مساحة Δ أ ب حـ تساوى ٣٠ وحدة مربعة. «($\frac{19}{3}$ ، ٠) أو ($\frac{-41}{3}$ ، ٠)»

---

٦ **أثبت أن النقط :** أ = (−٣ ، −٣) ، ب = (٤ ، ٤) ، حـ = (−١ ، ٤) ، ء = (−٣ ، ٢)

هى رؤوس شبه منحرف متساوى الساقين. وإذا كان $\overline{أحـ} \cap \overline{بء} = \{هـ\}$

فأوجد إحداثيى النقطة هـ وطول العمود النازل منها على $\overline{أب}$ «(−$\frac{13}{9}$ ، $\frac{22}{9}$) ، $\frac{35\sqrt{2}}{18}$»

الدرس 5
المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

إذا تقاطع المستقيمان $ل_١ : أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ = ٠$ ، $ل_٢ : أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ = ٠$

فى نقطة فإن المعادلة العامة لجميع المستقيمات المارة بنقطة تقاطعهما هى :

$م (أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١) + ل (أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢) = ٠$ (١)

حيث $م \in ح$ ، $ل \in ح$

- فى حالة أن م = صفر فإننا نحصل على معادلة المستقيم $ل_٢$
- فى حالة أن ل = صفر فإننا نحصل على معادلة المستقيم $ل_١$
- فى حالة أن م ≠ صفر ، ل ≠ صفر فإننا نحصل على المعادلة العامة لأى مستقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ بخلافهما وفى هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة (١) على الصورة :

$أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ + ك (أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢) = صفر$

حيث ك ثابت لا يساوى الصفر.

مثال ١

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$٢ س + ٣ ص = ١٨$ ، $٥ س - ٢ ص - ٧ = ٠$ ويمر بالنقطة (٥ ، ٣)

الحل

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين المعلومين بخلافهما هى :

$٢ س + ٣ ص - ١٨ + ك (٥ س - ٢ ص - ٧) = ٠$ (١)

، ∵ النقطة (٥ ، ٣) تقع على هذا المستقيم. ∴ فهى تحقق معادلته.

∴ $٢ \times ٥ + ٣ \times ٣ - ١٨ + ك (٥ \times ٥ - ٢ \times ٣ - ٧) = ٠$

∴ ١٠ + ٩ − ١٨ + ك (٢٥ − ٦ − ٧) = ٠ ∴ ١ + ١٢ ك = ٠

∴ ك = $\frac{-١}{١٢}$ وبالتعويض فى (١) :

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ٢ س + ٣ ص − ١٨ + $\frac{-١}{١٢}$ (٥ س − ٢ ص − ٧) = ٠

وبالضرب × ١٢ : ∴ ٢٤ س + ٣٦ ص − ٢١٦ − ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠

أى ١٩ س + ٣٨ ص − ٢٠٩ = ٠ أى س + ٢ ص − ١١ = ٠

حل آخر:

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ٣ ص = ١٨ ، ٥ س − ٢ ص = ٧

بحلهما جبريًا وذلك بضرب المعادلة الأولى فى ٢ والثانية فى ٣

∴ ٤ س + ٦ ص = ٣٦

، ١٥ س − ٦ ص = ٢١

بالجمع : ∴ ١٩ س = ٥٧

∴ س = ٣ وبالتعويض فى أى من المعادلتين. ∴ ص = ٤

∴ نقطة التقاطع هى (٣ ، ٤) ثم نوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٣) كما سبق دراسة ذلك.

حاول بنفسك

أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ٣ ص = ٩ ، ٤ س + ٥ ص = ١٥ ويمر بالنقطة (٥ ، −٤)

مثال ٢

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س + ٢ ص = ١٠

، ٥ س − ٣ ص − ٤ = ٠ ويكون عموديًا على المستقيم : ٢ س + ٧ ص − ٤ = ٠

الحل

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين بخلافهما هى :

٣ س + ٢ ص − ١٠ + ك (٥ س − ٣ ص − ٤) = ٠ (١)

∵ ميل المستقيم : ٢ س + ٧ ص − ٤ = ٠ هو $\frac{-٢}{٧}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب $\frac{٧}{٢}$

ومن المعادلة (١) : ∴ ٣ س + ٢ ص − ١٠ + ٥ ك س − ٣ ك ص − ٤ ك = ٠

∴ س (٣ + ٥ ك) + ص (٢ − ٣ ك) − ١٠ − ٤ ك = ٠

∴ ميله = − $\frac{٣ + ٥ ك}{٢ − ٣ ك}$ ∴ $\frac{٧}{٢}$ = − $\frac{٣ + ٥ ك}{٢ − ٣ ك}$

∴ ٦ + ١٠ ك = −١٤ + ٢١ ك ∴ ك = $\frac{٢٠}{١١}$

وبالتعويض فى (١) :

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ٣ س + ٢ ص − ١٠ + $\frac{٢٠}{١١}$ (٥ س − ٣ ص − ٤) = ٠

أى ٣٣ س + ٢٢ ص − ١١٠ + ١٠٠ س − ٦٠ ص − ٨٠ = ٠

أى ١٣٣ س − ٣٨ ص − ١٩٠ = ٠

أى ٧ س − ٢ ص − ١٠ = ٠

مثال ٣

أثبت أن المستقيمين : ٤ س − ٣ ص + ٧ = ٠ ، $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٤ ، ٣) متقاطعان على التعامد ثم أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

∵ $م_١ = \frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$ ، $م_٢ = -\frac{٣}{٤}$ ∴ $م_١ \times م_٢ = \frac{٤}{٣} \times -\frac{٣}{٤} = -١$

∴ المستقيمان متقاطعان على التعامد.

* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين نوجد أولاً المعادلة العامة للمستقيم الثانى

∵ المستقيم الثانى يمر بالنقطة (٢ ، ٥) وميله = $-\frac{٣}{٤}$

∴ المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ٥}{س - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

أى أن المعادلة العامة هى : ٣ س + ٤ ص − ٢٦ = ٠

* بحل المعادلتين : ٤ س − ٣ ص + ٧ = ٠ (١) ، ٣ س + ٤ ص − ٢٦ = ٠ (٢) معًا

بضرب المعادلة (١) × ٤ : ∴ ١٦ س − ١٢ ص + ٢٨ = ٠ (٣)

بضرب المعادلة (٢) × ٣ : ∴ ٩ س + ١٢ ص − ٧٨ = ٠ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) :

∴ ٢٥ س − ٥٠ = ٠ ∴ س = ٢

وبالتعويض فى (١) :

∴ ص = ٥ ∴ نقطة التقاطع هى : (٢ ، ٥)

تمارين 9

على المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) نقطة تقاطع المستقيمين : س + ٤ = ٠ ، ص − ٣ = ٠ هى ....

(أ) (٤ ، ٣) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (−٤ ، ٣) (د) (٤ ، −٣)

(٢) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٢ ، ص = ٥ هى ....

(أ) ٥ س − ٢ ص = ٠ (ب) ٢ س − ٥ ص = ٠

(جـ) ٢ س + ٥ ص = ٠ (د) ٥ س + ٢ ص = ٠

(٣) معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين : ص = ٤ ، س = $\frac{٣}{٤}$ ص

هى ....

(أ) ص = ٣ (ب) س = ٣ (جـ) ص = ٤ (د) س = ٤

(٤) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ل$_١$: س + ٢ ص − ٤ = ٠ ، ل$_٢$: س − ٢ ص = ٠

ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٢ (ب) ص = ١ (جـ) ص = ٣ (د) ص = ٢

(٥) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ص = ٣ ، س + ٤ ص + ٢ = ٠

ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) ص − ٢ = ٠ (ب) س − ص = ٢ (جـ) س − ٢ = ٠ (د) س + ٢ = ٠

(٦) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٣ ، ٢ س − ص = ٦ ويمر بالنقطة

(٢ ، −١) هى ....

(أ) س − ص + ٣ = ٠ (ب) س − ص − ٣ = ٠

(جـ) س + ص + ٣ = ٠ (د) ٢ س − ص − ٣ = ٠

(٧) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠ ، س + ٣ ص = ٧ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −١) + ك (٣ ، ١) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٣) + ك (٢ ، −١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (٢ ، −١) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (−١ ، ٢)

(٨) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) وبنقطة تقاطع المستقيمين ل$_١$: ٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠
، ل$_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (−٢ ، ٠) + ك (٣ ، ٢) هى ....

(أ) س − ص + ١ = ٠ (ب) س − ص + ٢ = ٠

(جـ) س + ص − ١ = ٠ (د) س + ص + ٢ = ٠

(٩) المعادلة المتجهة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ل$_١$: س − ٥ = ٠
، ل$_٢$: س + ص = ١٣ ومتجه اتجاهه (٤ ، ١) هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٤ ، ١) + ك (٥ ، ٨) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٦) + ك (٤ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٨) + ك (٤ ، ١) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، −٨) + ك (١ ، ٤)

(١٠) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س − ٥ ص − ١٣ = ٠ ، ٢ ص − ٣ س + ٧ = ٠
ويوازى المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ١) + ك (٥ ، ٤) هى ....

(أ) ٤ س + ٥ ص − ١٤ = ٠ (ب) ٤ س − ٥ ص + ١٤ = ٠

(جـ) ٥ س − ٤ ص − ١٤ = ٠ (د) ٤ س − ٥ ص − ١٤ = ٠

(١١) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ٣ ص − ٢ = ٠ ، ٣ س − ص − ١٤ = ٠
ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥° هى ....

(أ) س + ص = ٠ (ب) س + ص = ٢

(جـ) س − ص = ٢ (د) ص − س = ٢

(١٢) عدد المستقيمات التى تمر بنقطة تقاطع مستقيمين = ...

(أ) صفر. (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

(١٣) إذا مر المستقيم (س − ٤ ص + ١٤) + ك (٤ س + ص + ٥) = ٠ بالنقطة (٢ ، ١)
فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{-٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{-٦}{٧}$

(١٤) إذا مر محور السينات بنقطة تقاطع المستقيمين أ س + ص + ٣ = ٠ ، ب س + ص + ١ = ٠
فإن : أ = ...

(أ) ب (ب) ٣ ب (جـ) $\frac{١}{٣}$ ب (د) ٣ − ب

(١٥) نقطة تقاطع المستقيمان : $\overleftarrow{ر_١}$ = (٦ ، ٠) + ك$_١$ (٣ ، −٢) ، $\overleftarrow{ر_٢}$ = (٢ ، ١) + ك$_٢$ (١ ، ١)
هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (−١ ، ١) (د) (−٣ ، ٢)

(١٦) معادلة المستقيم المارة بنقطة تقاطع المستقيمين س = -٣ ، ص = ٢ وينصف الزاوية بينهما هى ....

(١) س - ص + ٥ = ٠ (٢) س + ص + ١ = ٠

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط.

(جـ) (١) ، (٢) معًا. (د) لا شىء مما سبق.

(١٧) أ ب جـ مثلث فيه معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى س - ٢ ص + ٥ = ٠ ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ هى س + ص + ٢ = ٠

فإن أى من المستقيمات التالية يمكن إيجاد معادلته ؟

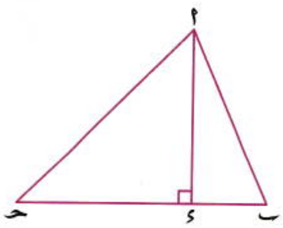
(أ) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

(ب) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ حيث $\overline{\text{أ د}}$ متوسط فى Δ أ ب جـ

(جـ) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ حيث $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

(د) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ حيث $\overrightarrow{\text{أ و}}$ منصف زاوية ($\angle$ ب أ جـ)

(١٨) فى الشكل المقابل :



معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى س + ص + ١ = ٠

، معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ هى ٢ س - ص + ٥ = ٠

، معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ هى س - ٤ ص - ٤ = ٠

، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ فإن معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ هى ....

(أ) ٤ س + ص + ٨ = ٠ (ب) ٨ س + ٢ ص - ٥ = ٠

(جـ) ٤ ص - س - ٦ = ٠ (د) ص + ٤ س + ٧ = ٠

(١٩) انطلقت قذيفة من مكان ما لتصيب هدفًا ثابتًا متبعة المسار فى الخط المستقيم ٢ س + ص - ١ = ٠ وكذلك قذيفة من مكان آخر لتصيب نفس الهدف متبعة المسار فى الخط المستقيم س - ٣ ص + ٤ = ٠ فإن معادلة المستقيم الذى تسلكه قذيفة من نقطة (٥ ، -٣) لتصيب نفس الهدف هى ....

(أ) ٥ س + ٦ ص - ٧ = ٠ (ب) ٣ س - ٢ ص - ٢١ = ٠

(جـ) ٤ س - ص - ٢٣ = ٠ (د) ٢ س + ٧ ص + ١١ = ٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٣ س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ٣ ص = ١ ويمر بالنقطة (١ ، -١) «ص + ١ = ٠»

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ص = ٢ ، ٤ س + ٣ ص - ٣ = ٠ ونقطة الأصل. «٢ س + ٣ ص = ٠»

٣ أوجد معادلة المستقيم المتجهة المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

ر = ك (-٣ ، ٢) ، ٣ س - ٢ ص = ١٣ ويوازى محور الصادات.

«ر = (٣ ، -٢) + ك (٠ ، ١)»

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

س - ٣ ص + ٥ = ٠ ، ٢ س - ص - ٤ = ٠ ويكون موازيًا للمستقيم :

س - ٢ ص + ١ = ٠

«٥ س - ١٠ ص + ١١ = ٠»

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٥ س - ص = ٥ ، س + ٢ ص = ١ ويكون عموديًا على المستقيم الثانى.

«٢ س - ص - ٢ = ٠»

٦ أثبت أن المستقيمين : ٢ س - ٣ ص + ٤ = ٠ ، ر = (١ ، ٢) + ك (-٢ ، ٣)

متقاطعان على التعامد ثم أوجد نقطة تقاطعهما.

«(١ ، ٢)»

٧ أثبت أن المستقيمين : س - ٤ ص + ١٤ = ٠ ، ٤ س + ص + ٥ = ٠

متعامدان ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع والنقطة (٢ ، ١)

«(-٢ ، ٣) ، ٢ ص + س - ٤ = ٠»

٨ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ص - ١ = ٠ ، س - ص + ٣ = ٠ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٣ وحدات.

«٨ س + ص + ٣ = ٠»

٩ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٥ س - ص = ٥ ، س + ٢ ص = ١ ويقطع من الجزءين الموجبين لمحورى الإحداثيات طولين متساويين.

«س + ص - ١ = ٠»

١٠ إذا كان ل$_1$: ٣ س + ٢ ص - ٧ = ٠ ، ل$_2$: ر = (-٢ ، ٠) + ك (٣ ، ٢) **فأوجد :**

(١) المعادلة الكارتيزية للمستقيم ل$_2$ (٢) قياس الزاوية بين المستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$

(٣) نقطة تقاطع المستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$

(٤) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين والنقطة (٣ ، ٤)

(٥) طول العمود المرسوم من نقطة تقاطع المستقيمين إلى الخط المستقيم الذى معادلته :

٣ س - ٤ ص - ٩ = ٠

(٦) مساحة سطح المثلث المحدد بالمستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$ ومحور السينات.

١١ الربط بالحياة : طريقان مستقيمان معادلة مسار الأول : ٣ س − ٤ ص − ١٤ = ٠

ومعادلة مسار الثانى : ٤ س + ٣ ص − ٢ = ٠

أثبت أن الطريقين متعامدان ، ثم أوجد :

(١) نقطة تقاطعهما.

(٢) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة التقاطع والنقطة (٣ ، −٢)

(٣) طول أقصر بعد من نقطة تقاطع الطريقين على طريق آخر معادلته : ٤ س + ٣ = ٠

(٤) مساحة سطح المنطقة المثلثة المحددة بالطريقين ومحور الصادات.

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) نقطة تقاطع المستقيمين المختلفين $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ ، $\frac{س}{ب} + \frac{ص}{أ} = ١$ هى ....

(أ) (أ ، ب) (ب) $\left(\frac{١}{٢} أ ، \frac{١}{٢} ب\right)$

(جـ) $\left(\frac{أ + ب}{أ ب} ، \frac{أ + ب}{أ ب}\right)$ (د) $\left(\frac{أ ب}{أ + ب} ، \frac{أ ب}{أ + ب}\right)$

(٢) لقيم ك المختلفة فإن المعادلة (٢ + ك) س + (١ + ك) ص = ٥ + ٧ ك تمثل ....

(أ) مستقيمات متوازية.

(ب) مستقيمات متقاطعة فى النقطة (−٢ ، ٩)

(جـ) مستقيمات متقاطعة فى النقطة (٢ ، −٩)

(د) لا شىء مما سبق.

(٣) إذا كان : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه معادلات المستقيمات التى تحمل أضلاعه $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ هى س + ٢ ص = ٣ ، س = ١ ، س − ٣ ص = ٤ ، ٥ س + ص + ١٢ = ٠

على الترتيب فإن قياس الزاوية بين القطران $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ء ب}$ تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٤) إذا مرت الثلاث مستقيمات : ٣ س + ص − ٢ = ٠ ، ك س + ٢ ص − ٣ = ٠

، ٢ س − ص − ٣ = ٠ بنقطة واحدة فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٥

(٥) إذا كانت المستقيمات : س + أ = ٠ ، ص + ٤ = ٠ ، س + ٢ ص + ٤ = ٠ تحمل متوسطات

مثلث فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

٢ **أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :**

س + ص = ٤ ، س − ص = ٢ وطول العمود النازل عليه من نقطة الأصل يساوى وحدة طولية.

«ص − ١ = ٠ أ، ٣ س − ٤ ص − ٥ = ٠»

---

٣ **أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :**

$\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٢) + ك (٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{ر}$ = (١١ ، ٤) + ك َ (٣ ، ١) وطول العمود النازل عليه من النقطة (−٢ ، ١) يساوى ٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

«ص + ٧ س − ٣٧ = ٠»

---

٤ إذا كانت : أ = (١ ، ١) ، ب = (٧ ، ٤) ، ء = (٢ ، ٧) ثلاثة رؤوس فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب حـ ء الذى فيه : ق (∠ب) = °٩٠ أوجد :

(١) معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ (٢) معادلة $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

(٣) إحداثيي النقطة حـ

«ص + ٢ س − ١٨ = ٠ ، ٦ ص + س − ٤٤ = ٠ ، $\left(\frac{٦٤}{١١} ، \frac{٧٠}{١١}\right)$»